Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, А. В. Пашкевич, Об условиях эффективности решения многокритериальной дискретной задачи, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 1, 17–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:39:46

УДК 519.6

Об условиях эффективности решения многокритериальной дискретной задачи

© 2002 г. В. А. Емеличев, А. В. Пашкевич

Для широкого класса многокритериальных (векторных) задач оптимизации с конечным множеством векторных оценок на основе аддитивного метода агрегирования специальных монотонных функций от частных критериев получены необходимые и достаточные условия эффективности (оптимальности по Парето) решения.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Алгоритм».

1. Введение

Необходимые и достаточные условия того, чтобы данное решение многокритериальной задачи было эффективным (оптимальным по Парето), обычно формулируются в зависимости от свойств частных критериев и структуры множества решений (см., например, [1, 2]). Знание таких условий служит основой для разработки методов нахождения эффективных решений, а также способов проверки эффективности выбранного решения.

Целью настоящей статьи является обобщение некоторых результатов работ [3, 4], где для многокритериальных дискретных задач (задач с конечным множеством векторных оценок) в терминах линейной свертки видоизмененных частных критериев и в терминах суммы положительных степеней частных критериев найдены необходимые и достаточные условия эффективности решения. Здесь эти условия формулируются в терминах суммы специальных монотонных функций от частных критериев. Получен ряд следствий, позволяющих искомое множество Парето представить в виде множества решений параметрической скалярной дискретной задачи оптимизации.

2. Определения

Пусть на множестве (допустимых) решений X произвольной природы задана вектор-функция

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad n \geq 2,$$

компоненты которой (частные критерии) без потери общности будем считать минимизируемыми:

$$f_i(x) \rightarrow \min_{x \in X}, \quad i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Определение 1. Следуя [3, 4], n -критериальной дискретной задачей (n -КДЗ) назовем задачу нахождения множества эффективных решений (множества Парето)

$$P(X, f) = \{x \in X: \pi(x, f) = \emptyset\},$$

где

$$\pi(x, f) = \{x' \in X: f(x) \geq f(x'), f(x) \neq f(x')\},$$

при условии конечности образа множества X в критериальном пространстве, то есть конечности множества векторных оценок

$$f(X) = \{y \in \mathbf{R}^n: y = f(x), x \in X\}.$$

Эту задачу будем обозначать через (X, f) , а через $f_i(X)$ – проекцию множества $f(X)$ на ось i :

$$f_i(X) = \{y \in \mathbf{R}: y = f_i(x), x \in X\}, \quad i \in N_n.$$

Без потери общности можно в дальнейшем предполагать, что задача (X, f) такова, что

$$\forall i \in N_n \quad \exists x, x' \in X \quad (f_i(x) \neq f_i(x')). \quad (1)$$

В самом деле, пусть J – множество тех индексов из N_n , для которых условие (1) не выполняется. Легко видеть, что в случае, когда $J \neq N_n$, можно перейти к эквивалентной задаче (то есть к задаче с тем же множеством Парето) путем исключения тех критериев, которые занумерованы числами из J . Очевидно, что в новой задаче условие (1) будет выполняться. Если $J = N_n$, то каждое решение x n -КДЗ (X, f) эффективно.

Ясно, что в случае, когда выполняется свойство (1), справедливо неравенство $|f(X)| \geq 2$, которое в дальнейшем будем учитывать.

Для всякого натурального числа m будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_+^m &= \{z \in \mathbf{R}^m: z_i \geq 0, i \in N_m\}, \\ \mathbf{R}_{++}^m &= \{z \in \mathbf{R}^m: z_i > 0, i \in N_m\}, \\ \mathbf{R}_{--}^m &= \{z \in \mathbf{R}^m: z_i < 0, i \in N_m\}. \end{aligned}$$

Определение 2. Пусть $U \subset \mathbf{R}^n$, $|U| \geq 2$, $i \in N_n$, $a \geq 0$, $\hat{v} > a$,

$$U_i = \{z \in \mathbf{R}: z = u_i, u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \in U\}.$$

Будем говорить, что вектор-функция

$$\xi(u, v) = (\xi_1(u_1, v), \xi_2(u_2, v), \dots, \xi_n(u_n, v))$$

принадлежит классу $\Xi(U, a, \hat{v})$ и писать $\xi \in \Xi(U, a, \hat{v})$, если выполняются следующие условия:

$$\forall i \in N_n \quad (\xi_i: U_i \times (a, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+), \quad (2)$$

$$\forall i \in N_n \quad \forall v > a \quad \forall u, u' \in U \quad (u_i > u'_i \Rightarrow \xi_i(u_i, v) > \xi_i(u'_i, v)), \quad (3)$$

$$\forall i \in N_n \quad \forall v \geq \hat{v} \quad \forall u, u' \in U \quad (u_i > u'_i \Rightarrow \xi_i(u_i, v) \geq n\xi_i(u'_i, v)). \quad (4)$$

Существование таких вектор-функций очевидно (см. ниже п. 4).

3. Теоремы

Теорема 1 (достаточное условие). Пусть вектор-функция

$$\xi(u, v) = (\xi_1(u_1, v), \xi_2(u_2, v), \dots, \xi_n(u_n, v)),$$

каждая i -я компонента которой определена на множестве $f_i(X) \times (a, \infty)$, $a \geq 0$, удовлетворяет условию (3). Тогда при любом числе $v > a$ решение x^* n -КДЗ (X, f) , для которого верно равенство

$$\sum_{i=1}^n \xi_i(f_i(x^*), v) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i(f_i(x), v) : x \in X \right\}, \quad (5)$$

является эффективным.

Доказательство. Предположим противное, то есть решение $x^* \in X$, удовлетворяя равенству (5), не является эффективным. Тогда в силу внешней устойчивости n -КДЗ (X, f) [1] существует такое решение $x^0 \in P(X, f)$, что

$$f(x^*) \geq f(x^0), \quad f(x^*) \neq f(x^0).$$

Отсюда, учитывая условие (3), находим, что при любом $v > a$ справедливы неравенства

$$\xi_i(f_i(x^*), v) \geq \xi_i(f_i(x^0), v), \quad i \in N_n,$$

причем хотя бы одно из них строгое. Поэтому при любом $v > a$

$$\sum_{i=1}^n \xi_i(f_i(x^*), v) > \sum_{i=1}^n \xi_i(f_i(x^0), v),$$

что противоречит равенству (5).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (необходимое условие). Пусть $\xi \in \Xi(f(X), a, \hat{v})$ и решение $x^* \in P(X, f)$, причем для любого числа $v > a$ выполняются равенства

$$\xi_1(f_1(x^*), v) = \xi_2(f_2(x^*), v) = \dots = \xi_n(f_n(x^*), v). \quad (6)$$

Тогда при любом $v \geq \hat{v}$ верно равенство

$$n\xi_1(f_1(x^*), v) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i(f_i(x), v) : x \in X \right\}. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $x^* \in P(X, f)$. Разобьем множество X на два непересекающихся подмножества

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x \in X : [x^*, x]_- \cup [x^*, x]_0 = N_n\}, \\ X_2 &= \{x \in X : [x^*, x]_+ \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} [x^*, x]_+ &= \{i \in N_n: f_i(x^*) > f_i(x)\}, \\ [x^*, x]_- &= \{i \in N_n: f_i(x^*) < f_i(x)\}, \\ [x^*, x]_0 &= \{i \in N_n: f_i(x^*) = f_i(x)\}. \end{aligned}$$

Пусть $x \in X_1$. Тогда при любом индексе $i \in N_n$ очевидно неравенство $f_i(x^*) \leq f_i(x)$. Поэтому для всякого $v > a$ согласно (3) верны неравенства

$$\xi_i(f_i(x^*), v) \leq \xi_i(f_i(x), v), \quad i \in N_n,$$

а следовательно, с учетом (6), и неравенство

$$n\xi_1(f_1(x^*), v) \leq \sum_{i=1}^n \xi_i(f_i(x), v). \quad (8)$$

Далее покажем, что это неравенство справедливо для любого решения $x \in X_2$ при всяком $v \geq \hat{v}$.

Пусть $x \in X_2$. Тогда $[x^*, x]_+ \neq \emptyset$. Так как $x^* \in P(X, f)$, то $[x^*, x]_- = [x, x^*]_+ \neq \emptyset$. Зафиксируем произвольное число $v \geq \hat{v}$. Пусть далее

$$\begin{aligned} k &\in \arg \max \{\xi_i(f_i(x^*), v) - \xi_i(f_i(x), v) : i \in [x^*, x]_+\}, \\ l &\in \arg \min \{\xi_j(f_j(x), v) - \xi_j(f_j(x^*), v) : j \in [x, x^*]_+\}. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая неравенства

$$f_l(x) > f_l(x^*), \quad v \geq \hat{v},$$

и применяя условие (4), убеждаемся, что верно неравенство

$$\xi_l(f_l(x), v) \geq n\xi_l(f_l(x^*), v).$$

Отсюда, согласно (2) и (6), выводим, что

$$\begin{aligned} \xi_l(f_l(x), v) - \xi_l(f_l(x^*), v) &\geq (n-1)\xi_l(f_l(x^*), v) \\ &= (n-1)\xi_k(f_k(x^*), v) \\ &\geq (n-1)(\xi_k(f_k(x^*), v) - \xi_k(f_k(x), v)). \end{aligned}$$

Поэтому для всякого решения $x \in X_2$ и всякого $v \geq \hat{v}$ верно неравенство (8), поскольку

$$\begin{aligned} n\xi_1(f_1(x^*), v) - \sum_{i=1}^n \xi_i(f_i(x), v) &= \sum_{i=1}^n \xi_i(f_i(x^*), v) - \sum_{i=1}^n \xi_i(f_i(x), v) \\ &= \sum_{i \in [x^*, x]_+} (\xi_i(f_i(x^*), v) - \xi_i(f_i(x), v)) - \sum_{j \in [x, x^*]_+} (\xi_j(f_j(x), v) - \xi_j(f_j(x^*), v)) \\ &\leq (n-1)(\xi_k(f_k(x^*), v) - \xi_k(f_k(x), v)) - (\xi_l(f_l(x), v) - \xi_l(f_l(x^*), v)) \leq 0. \end{aligned}$$

Итак, при любом $v \geq \hat{v}$ неравенство (8) выполняется для всякого решения $x \in X$, то есть, верно равенство (7).

Теорема 2 доказана.

Подбирая вектор-функцию $\xi(u, v)$ подходящего вида, будем получать соответствующие конкретизации теорем 1 и 2, которые сформулируем в виде следствий. Для доказательства этих следствий нам понадобится ряд лемм.

4. Леммы

Всюду в этом пункте $n \geq 2$ — целое число.

Лемма 1. Пусть $U \subset \mathbf{R}^n$, $2 \leq |U| < \infty$, $t \in \mathbf{R}_{++}^n$. Тогда вектор-функция $\xi(u, v)$ с компонентами

$$\xi_i(u_i, v) = v^{u_i/t_i}, \quad i \in N_n,$$

принадлежит классу $\Xi(U, 1, \hat{v})$, где

$$\begin{aligned} \hat{v} &= n^{\tau/\delta}, \\ \tau &= \max\{t_i : i \in N_n\}, \\ \delta &= \min\{u_i - u'_i > 0 : u, u' \in U, i \in N_n\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что существование числа δ гарантируется неравенствами $2 \leq |U| < \infty$.

Очевидно, что вектор-функция $\xi(u, v)$ удовлетворяет условиям (2) и (3).

В выполнимости условия (4) легко убедиться, поскольку для любых $v \geq \hat{v}$, $u, u' \in U$ и $i \in N_n$ таких, что $u_i > u'_i$, с учетом условий леммы 1 имеем

$$\frac{\xi_i(u_i, v)}{\xi_i(u'_i, v)} = v^{(u_i - u'_i)/t_i} \geq \hat{v}^{(u_i - u'_i)/t_i} = n^{\tau(u_i - u'_i)/(\delta t_i)} \geq n^{(u_i - u'_i)/\delta} \geq n.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $U \subset \mathbf{R}_+^n$, $2 \leq |U| < \infty$, $t \in \mathbf{R}_{++}^n$. Тогда вектор-функция $\xi(u, v)$ с компонентами

$$\xi_i(u_i, v) = u_i^{vt_i}, \quad i \in N_n,$$

принадлежит классу $\Xi(U, 0, \hat{v})$, где

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \begin{cases} \log n / (\tau \log \Delta), & \text{если число } \Delta \text{ существует,} \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \tau &= \min\{t_i : i \in N_n\}, \\ \Delta &= \min\{u_i/u'_j > 1 : u, u' \in U, i, j \in N_n\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. Легко проверить, что вектор-функция $\xi(u, v)$ удовлетворяет условиям (2) и (3).

Докажем выполнимость условия (4). Пусть число Δ существует. С учетом включения $U \subset \mathbf{R}_+^n$, рассмотрим два возможных случая.

Пусть $u_i > u'_i > 0$. Тогда при любом $v \geq \hat{v}$

$$\begin{aligned} \frac{\xi_i(u_i, v)}{\xi_i(u'_i, v)} &= \left(\frac{u_i}{u'_i}\right)^{vt_i} \geq \left(\frac{u_i}{u'_i}\right)^{\hat{v}t_i} = \left(\frac{u_i}{u'_i}\right)^{t_i \log n / (\tau \log \Delta)} \\ &\geq \left(\frac{u_i}{u'_i}\right)^{\log n / \log \Delta} \geq \Delta^{\log n / \log \Delta} = n, \end{aligned}$$

то есть условие (4) выполняется.

Пусть теперь $u_i > u'_i = 0$. Тогда при любом $v \geq \hat{v}$

$$\xi_i(u_i, v) = u_i^{vt_i} > 0 = n\xi_i(u'_i, v),$$

то есть условие (4) выполняется и в этом случае.

Если же числа Δ не существует, то, учитывая неравенство $|U| \geq 2$ и формулу, задающую Δ , убеждаемся, что при любых $i \in N_n$ и $u \in U$ справедливо включение $u_i \in \{0, b\}$, где $b > 0$. Тогда из неравенства $u_i > u'_i$ следует, что $u_i = b$ и $u'_i = 0$. Поэтому, принимая во внимание неравенство $v \geq \hat{v} = 1$, получаем, что

$$\xi_i(u_i, v) = b^{vt_i} > 0 = n\xi_i(u'_i, v).$$

Следовательно, импликация (4) имеет место и в этом случае.

Итак, $\xi \in \Xi(U, 0, \hat{v})$.

Лемма 2 доказана.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 3. Если $\xi \in \Xi(U, a, \hat{v})$ и $t \in \mathbf{R}_{++}^n$, то вектор-функция $\bar{\xi}(u, v)$ с компонентами

$$\bar{\xi}_i(u_i, v) = t_i \xi_i(u_i, v), \quad i \in N_n,$$

принадлежит классу $\Xi(U, a, \hat{v})$.

Лемма 4. Пусть $\xi \in \Xi(U, a, \hat{v})$ и $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*) \in U$ таковы, что при любых $v > a$ и $i \in N_n$ справедливо неравенство $\xi_i(u_i^*, v) > 0$. Тогда вектор-функция $\bar{\xi}(u, v)$ с компонентами

$$\bar{\xi}_i(u_i, v) = \frac{\xi_i(u_i, v)}{\xi_i(u_i^*, v)}, \quad i \in N_n,$$

принадлежит классу $\Xi(U, a, \hat{v})$.

Доказательство. Выполнимость условия

$$\forall i \in N_n \quad (\bar{\xi}_i: U_i \times (a, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+)$$

очевидна.

Так как $\xi \in \Xi(U, a, \hat{v})$, из условия (3), учитывая неравенство $\xi_i(u_i^*, v) > 0$, справедливое при любых $v > a$ и $i \in N_n$, получаем, что

$$\forall i \in N_n \quad \forall v > a \quad \forall u, u' \in U \quad (u_i > u'_i \Rightarrow \bar{\xi}_i(u_i, v) > \bar{\xi}_i(u'_i, v)).$$

Поскольку $\xi \in \Xi(U, a, \hat{v})$, верна формула (4). Поэтому, принимая во внимание неравенство $\xi_i(u_i^*, v) > 0$, справедливое при любых $v > a$ и $i \in N_n$, находим, что

$$\forall i \in N_n \quad \forall v \geq \hat{v} \quad \forall u, u' \in U \quad (u_i > u'_i \Rightarrow \bar{\xi}_i(u_i, v) \geq n\bar{\xi}_i(u'_i, v)).$$

Итак, $\bar{\xi} \in \Xi(U, a, \hat{v})$.

Лемма 4 доказана.

Как и прежде (см. определение 2) через U_i будем обозначать проекцию множества U на ось i , $i \in N_n$.

Лемма 5. Если $U \subset \mathbf{R}^n$, $2 \leq |U| < \infty$, $\eta_i(u_i)$, $i \in N_n$, — возрастающие функции

$$\eta_i: U_i \rightarrow \mathbf{R}_+,$$

то вектор-функция $\xi(u, v)$ с компонентами

$$\xi_i(u_i, v) = \eta_i^v(u_i), \quad i \in N_n,$$

принадлежит классу $\Xi(U, 0, \hat{v})$, где

$$\hat{v} = \begin{cases} \log n / \log \Delta, & \text{если число } \Delta \text{ существует,} \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (11)$$

$$\Delta = \min\{\eta_i(u_i)/\eta_j(u'_j) > 1: u, u' \in U, i, j \in N_n\}.$$

Доказательство. Легко проверить, что в силу условий леммы 5 вектор-функция $\xi(u, v)$ удовлетворяет условиям (2) и (3).

Докажем теперь выполнимость условия (4). Пусть число Δ существует. Принимая во внимание неотрицательную определенность функций η_i , рассмотрим два возможных случая.

Пусть $u_i > u'_i$ и $\eta_i(u'_i) > 0$. Тогда при всяком $v \geq \hat{v}$

$$\frac{\xi_i(u_i, v)}{\xi_i(u'_i, v)} = \left(\frac{\eta_i(u_i)}{\eta_i(u'_i)} \right)^v \geq \left(\frac{\eta_i(u_i)}{\eta_i(u'_i)} \right)^{\hat{v}} = \left(\frac{\eta_i(u_i)}{\eta_i(u'_i)} \right)^{\log n / \log \Delta} \geq \Delta^{\log n / \log \Delta} = n.$$

Пусть теперь $u_i > u'_i$ и $\eta_i(u'_i) = 0$. Тогда в силу возрастания функции η_i справедливо неравенство $\eta_i(u_i) > 0$. Поэтому при любом $v \geq \hat{v}$

$$\xi_i(u_i, v) = \eta_i^v(u_i) > 0 = n \xi_i(u'_i, v).$$

Если же число Δ не существует, то, учитывая неравенство $|U| \geq 2$ и формулу, задающую Δ , при всяком векторе $u \in U$ убеждаемся в справедливости включений $\eta_i(u_i) \in \{0, b\}$, $i \in N_n$, где $b > 0$. Поэтому из неравенства $u_i > u'_i$ с учетом возрастания функции η_i следует, что $\eta_i(u_i) = b$ и $\eta_i(u'_i) = 0$. Отсюда получаем, что при любых $i \in N_n$ и $v \geq \hat{v} = 1$ справедливы соотношения

$$\xi_i(u_i, v) = \eta_i^v(u_i) = b^v > 0 = n \xi_i(u'_i, v).$$

Следовательно, условие (4) имеет место и в этом случае.

Лемма 5 доказана.

5. Следствия

Во всех приведенных ниже следствиях речь идет о n -КДЗ (X, f) , для которой, как мы уже условились, $2 \leq |f(X)| < \infty$, $n \geq 2$.

Положим

$$\mathbf{R}_{>1}^n = \{y \in \mathbf{R}^n: y_i > 1, i \in N_n\}.$$

Следствие 1. При любом векторе $\kappa \in \mathbf{R}_{>1}^n$ решение x^* n -КДЗ (X, f) , удовлетворяющее равенству

$$\sum_{i=1}^n \kappa_i^{f_i(x^*)} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \kappa_i^{f_i(x)}: x \in X \right\}, \quad (12)$$

является эффективным.

Если для решения $x^* \in P(X, f)$ выполняется одно из двух условий $f(x^*) \in \mathbf{R}_{++}^n$ или $f(x^*) \in \mathbf{R}_{--}^n$, то найдется вектор $\kappa \in \mathbf{R}_{>1}^n$, при котором справедливо равенство (12).

Доказательство. Докажем первое утверждение. На основании леммы 1 вектор-функция $\xi(u, v)$ с компонентами

$$\xi_i(u_i, v) = v^{u_i/t_i}, \quad i \in N_n,$$

при любом $t \in \mathbf{R}_{++}^n$ принадлежит классу $\Xi(U, 1, \hat{v})$, где $\hat{v}$ задается формулой (9). Поэтому в силу теоремы 1 при любых $v > 1$, $t_i > 0$, $i \in N_n$, решение x^* , удовлетворяющее равенству

$$\sum_{i=1}^n v^{f_i(x^*)/t_i} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n v^{f_i(x)/t_i} : x \in X \right\},$$

является эффективным.

Для завершения доказательства первого утверждения достаточно убедиться, что для всякого вектора $\kappa \in \mathbf{R}_{>1}^n$ найдется число $v > 1$ и вектор $t \in \mathbf{R}_{++}^n$ такие, что

$$\kappa_i = v^{1/t_i}, \quad i \in N_n.$$

Очевидно, что для этого при любом фиксированном $v > 1$ в качестве t следует брать вектор с компонентами

$$t_i = \frac{\log v}{\log \kappa_i}, \quad i \in N_n.$$

Докажем второе утверждение следствия. Пусть $x^* \in P(X, f)$. Определим компоненты вектор-функции $\xi(u, v)$ следующим образом:

$$\xi_i(u_i, v) = v^{u_i/|f_i(x^*)|}, \quad i \in N_n.$$

На основании леммы 1 вектор-функция $\xi \in \Xi(f(X), 1, \hat{v})$, где $\hat{v}$ определяется по формуле (9). Далее, учитывая условия следствия 1, состоящее в том, что $\text{sign } f_i(x^*)$ одинаков для всех $i \in N_n$, при всяком $v > 1$

$$\xi_1(f_1(x^*), v) = \xi_2(f_2(x^*), v) = \dots = \xi_n(f_n(x^*), v) = v^{\text{sign } f_1(x^*)}.$$

Отсюда в силу теоремы 2 при всяком $v \geq \hat{v}$ получаем, что

$$nv^{\text{sign } f_1(x^*)} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n v^{f_i(x)/|f_i(x^*)|} : x \in X \right\}.$$

Следовательно, в качестве компонент вектора $\kappa \in \mathbf{R}_{>1}^n$ можно взять любые числа $\kappa_i = v^{1/|f_i(x^*)|}$, $i \in N_n$, при $v \geq \hat{v}$.

Следствие 1 доказано.

Введем обозначение

$$H(X, f) = \bigcup_{\kappa \in \mathbf{R}_{>1}^n} H(X, f, \kappa),$$

где

$$H(X, f, \kappa) = \arg \min \left\{ \sum_{i=1}^n \kappa_i^{f_i(x)} : x \in X \right\}.$$

Тогда из следствия 1 легко выводим следующее утверждение.

Следствие 2. Если выполняется одно из двух условий $f(X) \subset \mathbf{R}_{++}^n$ или $f(X) \subset \mathbf{R}_{--}^n$, то $P(X, f) = H(X, f)$.

Следствие 3 ([4]). Если $f(X) \subset \mathbf{R}_{++}^n$, то справедливы следующие утверждения.

При любом векторе $\kappa \in \mathbf{R}_{++}^n$ решение x^* n -КДЗ (X, f) , удовлетворяющее равенству

$$\sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i}(x^*) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i}(x) : x \in X \right\}, \quad (13)$$

является эффективным.

Если для решения $x^* \in P(X, f)$ верно одно из двух условий $0 < f_i(x^*) < 1$ для всех $i \in N_n$ или $f_i(x^*) > 1$ для всех $i \in N_n$, то найдется вектор $\kappa \in \mathbf{R}_{++}^n$, при котором справедливо равенство (13).

Доказательство. Докажем первое утверждение. На основании леммы 2 вектор-функция $\xi(u, v)$ с компонентами

$$\xi_i(u_i, v) = u_i^{vt_i}, \quad i \in N_n,$$

при любом $t \in \mathbf{R}_{++}^n$ принадлежит классу $\Xi(U, 0, \hat{v})$, где $\hat{v}$ задается формулой (10). Поэтому в силу теоремы 1 при любых $v > 0$, $t_i > 0$, $i \in N_n$, решение x^* , удовлетворяющее равенству

$$\sum_{i=1}^n f_i^{vt_i}(x^*) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n f_i^{vt_i}(x) : x \in X \right\},$$

является эффективным.

Для завершения доказательства первого утверждения достаточно убедиться, что для всякого вектора $\kappa \in \mathbf{R}_{++}^n$ найдется число $v > 1$ и вектор $t \in \mathbf{R}_{++}^n$ такие, что

$$\kappa_i = vt_i, \quad i \in N_n.$$

Очевидно, что для этого при любом фиксированном числе $v > 1$ в качестве t следует брать вектор с компонентами

$$t_i = \frac{\kappa_i}{v}, \quad i \in N_n.$$

Докажем теперь второе утверждение. Пусть $x^* \in P(X, f)$. Введем вектор-функцию $\xi(u, v)$ с компонентами

$$\xi_i(u_i, v) = u_i^{vt_i}, \quad i \in N_n,$$

где

$$t_i = \frac{\log f_1(x^*)}{\log f_i(x^*)} > 0.$$

Тогда по лемме 2 вектор-функция $\xi \in \Xi(f(X), 0, \hat{v})$, где $\hat{v}$ определяется по формуле (10). Кроме того, в силу строения вектор-функции $\xi(u, v)$ для всякого $v > 0$ очевидны равенства

$$\xi_1(f_1(x^*), v) = \xi_2(f_2(x^*), v) = \dots = \xi_n(f_n(x^*), v) = f_1^v(x^*).$$

Поэтому на основании теоремы 2 при всяком $v \geq \hat{v}$ верно равенство

$$nf_1^v(x^*) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n f_i^{vt_i}(x) : x \in X \right\}.$$

Следовательно, в качестве компонент вектора $\kappa \in \mathbf{R}_{++}^n$ можно взять любые числа $\kappa_i = vt_i$, $i \in N_n$, при $v \geq \hat{v}$.

Следствие 3 доказано.

Учитывая это следствие, легко сформулировать утверждение, аналогичное следствию 2, что предоставляется читателю.

Введем обозначение

$$\Lambda_n = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}_{++}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Следствие 4. Если вектор-функция $\xi \in \Xi(f(X), a, \hat{v})$, то имеют место следующие утверждения.

При любом векторе $\lambda \in \Lambda_n$ и любом числе $v > a$ решение x^* n -КДЗ (X, f) , удовлетворяющее равенству

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i(f_i(x^*), v) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i(f_i(x), v) : x \in X \right\}, \quad (14)$$

эффективно.

Если для решения $x^* \in P(X, f)$ неравенство $\xi_i(f_i(x^*), v) > 0$ выполняется при любых $v > a$ и $i \in N_n$, то при всяком $v \geq \hat{v}$ найдется вектор $\lambda \in \Lambda_n$, для которого верно равенство (14).

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_n$. На основании леммы 3 вектор-функция $\bar{\xi}(u, v)$ с компонентами

$$\bar{\xi}_i(u_i, v) = \lambda_i \xi_i(f_i(x), v), \quad i \in N_n,$$

принадлежит классу $\Xi(f(X), a, \hat{v})$. Поэтому в силу теоремы 1 при любых $v > a$ и $\lambda \in \Lambda_n$ верно равенство (14).

Докажем второе утверждение. Пусть $x^* \in P(X, f)$. При любом $v > a$ зададим вектор

$$\lambda = \lambda(v) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_i(v) = \frac{L(v)}{\xi_i(f_i(x^*), v)}, \quad i \in N_n, \\ L(v) &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i(f_i(x^*), v)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что вектор $\lambda(v) \in \Lambda_n$ при любом $v > 0$.

Для всякого индекса $i \in N_n$ определим функцию

$$\bar{\xi}_i(u_i, v) = \frac{\xi_i(u_i, v)}{\xi_i(f_i(x^*), v)}.$$

Нетрудно убедиться, что при любом $v > a$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i(u_i, v) = \frac{1}{L(v)} \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i(u_i, v). \quad (16)$$

Согласно лемме 4 вектор-функция $\bar{\xi} \in \Xi(f(X), a, \hat{v})$, причем для всякого $v > a$ справедливы равенства

$$\bar{\xi}_1(f_1(x^*), v) = \bar{\xi}_2(f_2(x^*), v) = \dots = \bar{\xi}_n(f_n(x^*), v) = 1.$$

Поэтому в силу теоремы 2 при любом $v \geq \hat{v}$

$$\sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i(f_i(x^*), v) = n = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i(f_i(x), v) : x \in X \right\}.$$

Отсюда, учитывая (16) и неравенство $L(v) > 0$, справедливое в силу условий следствия 4 при любом $v > a$, находим, что для всякого $v > a$ имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i(f_i(x^*), v) = nL(v) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i(f_i(x), v) : x \in X \right\}.$$

Таким образом, в качестве компонент вектора $\lambda \in \Lambda_n$ можно взять любые числа $\lambda_i = \lambda_i(v)$, $i \in N_n$, задаваемые формулой (15) при $v \geq \hat{v}$.

Следствие 4 доказано.

Из следствия 4 получаем ряд сопутствующих результатов (см. ниже следствия 5–7).

Следствие 5 ([3]). При любом векторе $\lambda \in \Lambda_n$ и любом $v > 1$ решение x^* n -КДЗ (X, f) , удовлетворяющее равенству

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v^{f_i(x^*)} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v^{f_i(x)} : x \in X \right\}, \quad (17)$$

является эффективным.

Если $x^* \in P(X, f)$, то существует такое число $\hat{v} > 1$, что при любом $v \geq \hat{v}$ найдется вектор $\lambda \in \Lambda_n$, для которого верно равенство (17).

Действительно, на основании леммы 1 вектор-функция $\xi(u, v)$ с компонентами

$$\xi_i(u_i, v) = v^{u_i}, \quad i \in N_n,$$

принадлежит классу $\Xi(f(X), 1, \hat{v})$, где $\hat{v}$ определяется согласно формуле (9). Поэтому следствие 5 легко получаем из следствия 4.

Следствие 6. Если $f(X) \subset \mathbf{R}_+^n$, то справедливы следующие утверждения.

При любом векторе $\lambda \in \Lambda_n$ и любом $v > 0$ решение x^* n -КДЗ (X, f) , удовлетворяющее равенству

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^v(x^*) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^v(x) : x \in X \right\}, \quad (18)$$

эффективно.

Если для $x^* \in P(X, f)$ выполняется включение $f(x^*) \in \mathbf{R}_{++}^n$, то существует такое число $\hat{v} > 0$, что для любого $v \geq \hat{v}$ найдется вектор $\lambda \in \Lambda_n$, при котором верно равенство (18).

Утверждения этого следствия с очевидностью вытекают из совместного применения леммы 2 и следствия 4 для вектор-функции $\xi(u, v)$ с компонентами

$$\xi_i(u_i, v) = u_i^v, \quad i \in N_n.$$

Следствие 7. Пусть $f(X) \subset \mathbf{R}_+^n$ и справедлива формула

$$\forall i \in N_n \quad \forall x, x' \in X \quad (f_i(x) > f_i(x') \Rightarrow f_i(x) \geq n f_i(x')).$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

При любом векторе $\lambda \in \Lambda_n$ решение x^* n -КДЗ (X, f) , удовлетворяющее равенству

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x^*) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) : x \in X \right\}, \quad (19)$$

эффективно.

Если $x^* \in P(X, f)$ и $f(x^*) \in \mathbf{R}_{++}^n$, то найдется вектор $\lambda \in \Lambda_n$, при котором верно равенство (19).

Доказательство. Легко видеть, что при выполнении условий следствия 7 вектор-функция $\xi(u, v)$ с компонентами

$$\xi_i(u_i, v) = u_i v, \quad i \in N_n,$$

принадлежит классу $\Xi(f(X), 0, \hat{v})$ при любом $\hat{v} > 0$. Поэтому из первого утверждения следствия 4 вытекает первое утверждение.

Далее, так как $f(x^*) \in \mathbf{R}_{++}^n$, то при любых $v > 0$ и $i \in N_n$ верно неравенство $\xi_i(f_i(x^*), v) > 0$. Поэтому из второго утверждения следствия 4 находим, что при любом числе $v > 0$ существует вектор $\lambda \in \Lambda_n$, для которого выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v f_i(x^*) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v f_i(x) : x \in X \right\}.$$

Отсюда, учитывая неравенство $v > 0$, получаем, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x^*) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) : x \in X \right\}.$$

Следствие 7 доказано.

Заметим, что в следствиях 5–7 для всякого эффективного решения x^* в качестве вектора λ можно взять вектор, компоненты которого задаются формулой (15).

Наконец, сформулируем следствие, являющееся аналогом теоремы 2 из статьи [4].

Следствие 8. Если решение x^* n -КДЗ (X, f) и возрастающие функции

$$\eta_i: f_i(X) \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad i \in N_n,$$

подчинены условиям

$$\eta_1(f_1(x^*)) = \eta_2(f_2(x^*)) = \dots = \eta_n(f_n(x^*)), \quad (20)$$

то справедливы следующие утверждения.

При любом $v > 0$ решение $x^* \in X$, удовлетворяющее равенству

$$n\eta_1^v(f_1(x^*)) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \eta_i^v(f_i(x^*)): x \in X \right\}, \quad (21)$$

эффективно.

Если $x^* \in P(X, f)$, то существует такое $\hat{v} > 0$, что для любого $v \geq \hat{v}$ справедливо равенство (21).

Доказательство. На основании леммы 5 вектор-функция $\xi(u, v)$ с компонентами

$$\xi_i(u_i, v) = \eta_i^v(u_i), \quad i \in N_n,$$

принадлежит классу $\Xi(f(X), 0, \hat{v})$, где число $\hat{v}$ задается формулой (11). Поэтому из теоремы 1, учитывая равенство (20), выводим первое утверждение.

Далее, применяя теорему 2 и вновь используя равенства (20), получаем второе утверждение следствия 8.

Список литературы

1. Подиновский В. В., Ногин В. Д., *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Наука, Москва, 1982.
2. Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н., *Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем*. Наука, Москва, 1986.
3. Емеличев В. А., Янушкевич О. А., Условия Парето-оптимальности в дискретных векторных задачах оптимизации. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 154–160.
4. Емеличев В. А., Пашкевич А. В., Янушкевич О. А., Условия эффективности решения векторной задачи дискретной оптимизации. *Дискретная математика* (1999) **11**, №1, 140–145.

Статья поступила 02.05.2001.