Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Э. Гасанов, И. В. Кузнецова, О функциональной сложности двумерной задачи интервального поиска, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 1, 114–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:07:54

О функциональной сложности двумерной задачи интервального поиска

© 2002 г. Э. Э. Гасанов, И. В. Кузнецова

Предлагается модификация алгоритма Бентли–Маурера, решающего двумерную задачу интервального поиска. Эта модификация позволяет снизить исходное логарифмическое среднее время поиска до константного при сохранении логарифмического времени поиска в худшем случае. Этот алгоритм зависит от параметра, при вариации которого объем памяти, необходимый алгоритму, изменяется от $O(k^3)$ до $O(k \log k)$, при этом среднее время поиска (без учета времени на перечисление ответа) изменяется от $O(1)$ до $O(\log k)$. В частности, для любого $\epsilon > 0$ при объеме памяти $O(k^{1+\epsilon})$ достигается среднее время поиска $O(1)$. На основе этих результатов получены верхние оценки функциональной сложности двумерной задачи интервального поиска.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 98-01-00130, 01-01-00748.

1. Введение

Данная работа посвящена исследованию сложности алгоритмов решения двумерной задачи интервального поиска, которая состоит в поиске в конечном подмножестве евклидовой плоскости всех тех точек, которые попадают в прямоугольник-запрос.

Типичная задача интервального поиска для двух измерений заключается в выявлении в базе данных, содержащей записи о служащих некоторой компании, всех служащих, чьи возраст и жалование находятся в заданных интервалах. Это пример взят из [1]. Другой пример можно найти в [2], где рассматривается база данных городов США с координатами в виде широты и долготы. К такой базе естественен вопрос о перечислении всех городов, попадающих в некоторой прямоугольник-запрос. Подобные задачи возникают также в статистике [3] и автоматизации проектирования [4].

Исследованию задачи интервального поиска (в другом переводе с английского — регионального поиска) посвящено большое количество работ [1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Приведем результаты некоторых из них. Алгоритм решения двумерной задачи интервального поиска путем сведения к решению четырех двумерных задач о доминировании можно найти в [1, 6]. В [7] предложен метод многомерного двоичного дерева (k -D-дерева), исходя из того, что бинарное дерево для одномерной задачи дает хороший результат. Этот метод имеет линейные затраты по памяти, но в [17] показано, что в худшем случае этим алгоритмом двумерная задача решается за время $\mathcal{O}(\sqrt{k})$. Здесь и далее, k равно мощности библиотеки, а

оценки приводятся без времени перечисления ответа. В [8] предложен метод прямого доступа, который решает задачу за время $\mathcal{O}(\log k)$, но требует затрат по памяти порядка k^3 . Чтобы уменьшить требуемую память, в [10] предложен многоэтапный метод прямого доступа. Он позволяет снижать порядок требуемой памяти, но при этом возрастает константа при логарифме в оценке времени. С помощью метода дерева интервалов (или дерева регионов) в [11] получена оценка времени поиска $\mathcal{O}(\log^2 k)$ при затратах памяти $\mathcal{O}(k \log k)$. В [22] и [19] независимо предложена модификация дерева интервалов, которая позволила снизить время поиска до $\mathcal{O}(\log k)$ при тех же затратах памяти. В [14] затраты памяти снижены до $\mathcal{O}(k \log k / \log \log k)$, но при этом возросла константа при логарифме в оценке времени. Во всех этих работах оценивается время поиска в худшем случае. В [13] описан метод хеширования, который использован вместо поиска по древовидным структурам в задаче интервального поиска. Применение этого метода позволило получить довольно быстрые в среднем решения задачи интервального поиска при условии, что область запросов находится в заранее определенных границах.

При оценке алгоритмов поиска обычно используют три основные характеристики: объем памяти, требуемый алгоритмом, время поиска в худшем случае и среднее время поиска. Естественно, хотелось бы находить алгоритмы, хорошие в соответствии с той или иной характеристикой, или, возможно, в соответствии с комбинацией характеристик. Выбор критерия оптимизации является одним из основных моментов в теории синтеза управляющих систем (в частности, при синтезе оптимальных алгоритмов поиска). Условимся обозначать через Q объем требуемой памяти, а через T время вычислений. В литературе в первую очередь встречаются такие критерии оптимизации: Q , T , $Q \cdot T$, $Q \cdot T^2$. Выбор конкретного критерия оптимизации осуществляется на практике с учетом специфики разрабатываемой вычислительной системы и особенностей ее использования, и многообразие таких критериев подскazuje необходимость проведения исследований глобальных зависимостей $Q(T)$ или $T(Q)$. Такая мера сложности носит название функциональной и была предложена А. С. Подколзиним [24].

Понятно, что любой алгоритм, который имеет оценки объема памяти и времени работы, дает верхнюю оценку функциональной сложности. В данной работе предлагается алгоритм решения двумерной задачи интервального поиска, зависящий от некоторого параметра. При вариации этого параметра получаются разные соотношения объема памяти и среднего времени поиска, что позволяет оценить функциональную сложность в некоторой последовательности точек. Данный алгоритм является модификацией алгоритма Бентли–Маурера, изложенного в [10], но в отличие от исходного алгоритма предлагаемый алгоритм при сохранении порядка оценок объема памяти и времени в худшем случае имеет константные оценки времени в среднем.

Результаты данной работы были анонсированы в [25, 23].

Авторы выражают благодарность В. Б. Кудрявцеву и А. С. Подколзину за поддержку в работе.

2. Основные понятия и формулировка результата

Мы будем использовать терминологию и обозначения из работы [26].

Пусть X — множество запросов с заданным на нем вероятностным пространством $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, где σ — алгебра подмножеств множества X , $\mathbf{P}$ — вероятностная мера

на σ , Y — множество записей (объектов поиска), ρ — бинарное отношение на $X \times Y$, называемое отношением поиска.

Пятерку $S = \langle X, Y, \rho, \sigma, P \rangle$ будем называть типом. Тройку $I = \langle X, V, \rho \rangle$, где V — некоторое конечное подмножество множества Y , в дальнейшем называемое библиотекой, будем называть задачей информационного поиска (ЗИП) типа S , и будем считать, что ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$ содержательно состоит в перечислении для произвольно взятого запроса $x \in X$ всех тех и только тех записей $y \in V$ таких, что $x\rho y$.

Пусть f — одноместный предикат, определенный на X , то есть $f: X \rightarrow \{0, 1\}$. Множество $N_f = \{x \in X: f(x) = 1\}$ назовем характеристическим множеством предиката f .

Множество $O(y, \rho) = \{x \in X: x\rho y\}$ назовем тенью записи $y \in Y$.

Функцию $\chi_{y, \rho}: X \rightarrow \{0, 1\}$ такую, что $N_{\chi_{y, \rho}} = O(y, \rho)$ назовем характеристической функцией записи y .

Пусть F — множество символов одноместных предикатов, определенных на множестве X , G — множество символов одноместных переключателей, определенных на множестве X . Под переключателем будем понимать функцию, областью значений которой является конечное подмножество натурального ряда. Пару $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$ назовем базовым множеством.

Понятие информационного графа (ИГ) над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$ определяется следующим образом. Берется конечная многополюсная ориентированная сеть. В ней выбирается некоторый полюс, который называется корнем. Остальные полюсы называются листьями и им приписываются записи из Y , причем разным листьям могут быть приписаны одинаковые записи. Некоторые вершины сети (в том числе это могут быть и полюсы) называются переключательными и им приписываются переключатели из G . Ребра, исходящие из каждой из переключательных вершин, нумеруются подряд, начиная с 1, и называются переключательными ребрами. Ребра, не являющиеся переключательными, называются предикатными и им приписываются предикаты из множества F . Таким образом нагруженную многополюсную ориентированную сеть называем ИГ над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$.

Функционирование ИГ определяется следующим образом. Скажем, что предикатное ребро проводит запрос $x \in X$, если предикат, приписанный этому ребру, принимает значение 1 на запросе x . Переключательное ребро, которому приписан номер n , проводит запрос $x \in X$, если переключатель, приписанный началу этого ребра, принимает значение n на запросе x . Ориентированная цепочка ребер проводит запрос $x \in X$, если каждое ребро цепочки проводит запрос x . Запрос $x \in X$ проходит в вершину β ИГ, если существует ориентированная цепочка, ведущая из корня в вершину β , которая проводит запрос x . Запись y , приписанная листу α , попадает в ответ ИГ на запрос $x \in X$, если запрос x проходит в лист α . Ответом ИГ U на запрос x назовем множество записей, попавших в ответ ИГ на запрос x , и обозначим его $\mathcal{F}_U(x)$. Эту функцию $\mathcal{F}_U(x)$ будем считать результатом функционирования ИГ U .

Пусть дана ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$. Скажем, что ИГ U разрешает ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$, если $\mathcal{F}_U(x) = \{y \in V: x\rho y\}$. ИГ U , разрешающий ЗИП I , будем также называть допустимым для I .

Введем понятие сложности ИГ. Пусть β — некоторая вершина ИГ. Предикат, определенный на множестве запросов, который принимает значение 1 на запросе x , если запрос проходит в вершину β , и 0 в противном случае, назовем функцией

фильтра вершины β и обозначим $\varphi_\beta(x)$.

Сложностью ИГ U на запросе $x \in X$ назовем число

$$T(U, x) = \sum_{\beta \in \mathcal{P}} \varphi_\beta(x) + \sum_{\beta \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}} \psi_\beta \varphi_\beta(x),$$

где $\mathcal{R}$ — множество вершин ИГ U , $\mathcal{P}$ — множество переключательных вершин ИГ U , ψ_β — количество ребер, исходящих из вершины β .

Скажем, что базовое множество $\mathcal{F}$ измеримо, если каждая функция из $\mathcal{F}$ измерима (относительно алгебры σ). Далее всюду будем предполагать, что базовое множество измеримо. В этом случае для любого ИГ U над $\mathcal{F}$ функция $T(U, x)$ как функция от x измерима.

Сложностью ИГ U назовем математическое ожидание величины $T(U, x)$, то есть число

$$T(U) = \mathbf{M}_x T(U, x).$$

Объемом $Q(U)$ ИГ U назовем число ребер в графе U . Сложностью задачи I при базовом множестве $\mathcal{F}$ назовем число

$$T(I, \mathcal{F}) = \inf\{T(U) : U \in \mathcal{U}(I, \mathcal{F})\},$$

где $\mathcal{U}(I, \mathcal{F})$ — множество всех ИГ над базовым множеством $\mathcal{F}$, разрешающих ЗИП I .

Дадим описание типа задач поиска, который соответствует двумерной задаче интервального поиска.

Пусть $Y_{\text{int } 2} = [0, 1]^2$ — множество записей и

$$X_{\text{int } 2} = \{\tilde{x} = (u_1, v_1, u_2, v_2) : 0 \leq u_i \leq v_i < 1, i = 1, 2\}$$

— множество запросов. Пусть на множестве $X_{\text{int } 2}$ задано вероятностное пространство $\langle X_{\text{int } 2}, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, где $\mathbf{P}$ задается функцией плотности вероятности $p(\tilde{x})$.

Отношение поиска $\rho_{\text{int } 2}$ определено на $X_{\text{int } 2} \times Y_{\text{int } 2}$ и задается соотношением

$$(u_1, v_1, u_2, v_2) \rho_{\text{int } 2} (y_1, y_2) \iff u_i \leq y_i \leq v_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда тип

$$S_{\text{int } 2} = \langle X_{\text{int } 2}, Y_{\text{int } 2}, \rho_{\text{int } 2}, \sigma, \mathbf{P} \rangle$$

назовем типом двумерного интервального поиска.

Пусть

$$G_1 = \{g_{i,a,b}^{1,m}(\tilde{x}) = [(u_i - a)m/(b - a)] + 1, i = 1, 2, m \in \mathbf{N}, 0 \leq a < b < 1\}, \quad (1)$$

$$G_2 = \{g_{a,b}^{2,m}(\tilde{x}) = [(v_1 - a)m/(b - a)] + 1, m \in \mathbf{N}, 0 \leq a < b < 1\}, \quad (2)$$

$$G_3 = \left\{ g_{i,a}^3(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } u_i \leq a, \\ 2, & \text{если } u_i > a, \end{cases} \quad i = 1, 2, a \in [0, 1] \right\}, \quad (3)$$

$$G_4 = \left\{ g_a^4(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_1 < a, \\ 2, & \text{если } v_1 \geq a, \end{cases} \quad a \in [0, 1] \right\}, \quad (4)$$

$$G_5 = \left\{ g_m^5(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq v_2 - u_2 < 1/m, \\ 2 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad m \in \mathbf{N} \right\}, \quad (5)$$

$$G_6 = \left\{ g_{a,b}^6(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < u_1 \leq v_1 < b, \\ 2 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad 0 \leq a < b < 1 \right\}, \quad (6)$$

$$F_1 = \left\{ f_a(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } u_2 \leq a \leq v_2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad a \in [0, 1) \right\}. \quad (7)$$

Введем базовое множество

$$\mathcal{F} = \langle F_1, G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup G_6 \rangle. \quad (8)$$

Для удобства будем считать, что функция плотности вероятности $p(\tilde{x}) = p(u_1, v_1, u_2, v_2)$, определяющая вероятностную меру $\mathbf{P}$ вероятностного пространства над $X_{\text{int } 2}$, задана на $[0, 1)^2$, но вне $X_{\text{int } 2}$ она принимает значение 0.

Введем обозначения

$$X_{\text{int}} = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq v < 1\},$$

$$p_1(u_1, v_1) = \int_{X_{\text{int}}} p(\tilde{x}) d\tilde{z}_2, \quad p_2(u_1, v_1, u_2, v_2) = p(\tilde{x}),$$

где $\tilde{z}_i = (u_i, v_i)$, $i = 1, 2$.

Пусть $b, d, e, f \in [0, 1)$ и $b < d$, $e < f$, $b \leq e$ и

$$p^1(u_1, v_1) = p_1(u_1, v_1),$$

$$p_{b,d,e,f}^2(u_2, v_2) = \int_b^d du_1 \int_e^f p_2(u_1, v_1, u_2, v_2) dv_1 / \int_b^d du_1 \int_e^f p_1(u_1, v_1) dv_1, \quad (9)$$

$$p^{1,b,d,e,f}(u_1) = \int_e^f p^1(u_1, v_1) dv_1 / \int_b^d du_1 \int_e^f p^1(u_1, v_1) dv_1, \quad (10)$$

$$p^{2,b,d,e,f}(v_1) = \int_b^d p^1(u_1, v_1) du_1 / \int_b^d du_1 \int_e^f p^1(u_1, v_1) dv_1. \quad (11)$$

Пусть c — некоторая вещественная константа. Скажем, что функция плотности вероятности $p(\tilde{x}) = p(u_1, v_1, u_2, v_2)$ обладает свойством c -ограниченности, если для любых $b, d, e, f \in [0, 1)$ таких, что $b < d$, $e < f$, $b \leq e$ выполняются условия

$$(d - b)(f - e)p_{b,d,e,f}^2(u_2, v_2) \leq c, \quad (12)$$

$$(d - b)(f - e)p^{1,b,d,e,f}(u_1) \leq c, \quad (13)$$

$$(d - b)(f - e)p^{2,b,d,e,f}(v_1) \leq c. \quad (14)$$

Теорема 1. Пусть $I = \langle X_{\text{int } 2}, V, \rho_{\text{int } 2} \rangle$ — двумерная задача интервального поиска, где $|V| = k$. Пусть $\mathcal{F}$ — базовое множество, определяемое соотношениями (1)–(8). Пусть

$$R(I) = \sum_{\tilde{y} \in V} \mathbf{P}(O(\tilde{y}, \rho_{\text{int } 2})).$$

Тогда если для некоторой константы c функция плотности вероятности $p(\tilde{x})$, определяющая вероятностную меру $\mathbf{P}$, обладает свойством c -ограниченности, то для любого натурального M такого, что $1 \leq M \leq 2 \ln k$,

$$R(I) \leq T(I, \mathcal{F}, (2/3)Mk^{1+2/M} + \mathcal{O}(k^{1+1/M}(M + (\ln k)/M))) \leq R(I) + 16M - 6,$$

причем для ИГ U^* , на котором достигается верхняя оценка, для любого $\tilde{x} \in X_{\text{int } 2}$ справедлива оценка

$$T(U^*, \tilde{x}) < 10M + 4 \log_2 k + |\{\tilde{y} \in V : \tilde{x} \rho_{\text{int } 2} \tilde{y}\}|.$$

При вариации параметра M мы получаем серию оценок функциональной сложности задачи в различных точках. Так, если $M = 2$, то при объеме памяти $Q = 4k^2/3$ среднее время поиска (без времени перечисления ответа) равно $T = 26$. Для любой константы $\varepsilon > 0$ можно выбрать параметр $M = \lfloor 2/\varepsilon \rfloor$ так, что при объеме памяти $Q = \mathcal{O}(k^{1+\varepsilon})$ среднее время равно $T = 16M - 6 = 16\lfloor 2/\varepsilon \rfloor - 6 = \text{const}$. Ограничение сверху на параметр M , приведенное в теореме, объясняется тем, что функция $Q_1(M) = Mk^{1+2/M}$ имеет точку минимума $M = 2 \ln k$, функция $Q_2(M) = Mk^{1+1/M}$ имеет точку минимума $M = \ln k$, функция $Q_3(M) = ((\ln k)/M)k^{1+1/M}$ является убывающей по M , причем $Q_3(\ln k) = ek$. Поэтому после точки $M = 2 \ln k$ объем $Q(M)$ данного метода заведомо будет возрастать при одновременном возрастании среднего времени поиска $T(M)$. Поэтому при минимальном по порядку для предлагаемого метода объеме $Q = \mathcal{O}(k \log k)$ среднее время есть $T = \mathcal{O}(\log k)$, что соответствует по порядку методу Уилларда [22] и Люкера [19], но в силу сложности своих конструкций предлагаемый метод в данном случае является менее предпочтительным, чем метод Уилларда–Люкера.

Нижняя оценка в теореме следует из теоремы 4 в [27]. Смысл нижней оценки в том, что время поиска не может быть меньше времени, необходимого на перечисление ответа.

Ниже будет приведено доказательство справедливости указанной выше верхней оценки.

3. Неформальное описание алгоритма

Пусть абсциссы точек библиотеки

$$V = \{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k\}, \quad \tilde{y}_i = (y_i^1, y_i^2), \quad i = 1, \dots, k,$$

упорядочены по возрастанию:

$$y_1^1 \leq y_2^1 \leq \dots \leq y_k^1.$$

Для упрощения изложения будем считать, что все точки y_i^1 различны, поскольку при их совпадении сложность получаемых ИГ только уменьшается.

Пусть $M \in \mathbb{N}$, $M \leq k$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_M$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = 1, \dots, M$ — некоторые рациональные числа такие, что

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1.$$

Для любого $q \in \{1, \dots, M\}$ положим $l_0^q = 0$, $l_{k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q+1}}^q = 1$, причем здесь и везде далее, если некоторое действительное число используется как целое, то подразумевается, что используется целая часть этого числа. Множество

$$\mathcal{N}^q = \{l_j^q \mid l_j^q = y_{(j-1)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)+1}}^1, j = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q}\}.$$

Рис. 1. Случай $s \leq t$

назовем q -й сеткой, а интервалы вида

$$[l_j^q, l_{j+1}^q), \quad j = 1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q},$$

назовем интервалами q -й сетки. Точки q -й сетки делят каждый интервал $(q-1)$ -й сетки на k^{α_q} частей. В каждом интервале q -й сетки содержится $k^{1-(\alpha_1 + \dots + \alpha_q)}$ точек из множества $\{y_1^1, \dots, y_k^1\}$, $l_j^{q-1} = l_{(j-1)k^{\alpha_q} + 1}^q$. Очевидно, самая последняя сетка будет иметь вид

$$\mathcal{N}^M = \{l_j^M = y_j^1, \quad j = 1, \dots, k\}.$$

Для $M > 1$ и $q \in \{2, \dots, M\}$ положим

$$\mathcal{N}_s^q = \{l_j^q \in \mathcal{N}^q \mid l_j^q \in (l_s^{q-1}, l_{s+1}^{q-1})\}, \quad s = 1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1}}.$$

Под одномерным интервальным поиском понимается задача типа

$$S_{\text{int}} = \langle X_{\text{int}}, [0, 1), \rho_{\text{int}} \rangle,$$

где ρ_{int} определяется соотношением

$$(u, v) \rho_{\text{int}} y \iff u \leq y \leq v.$$

Поиск по запросу $\tilde{x} = (u_1, v_1, u_2, v_2)$ предлагаемым алгоритмом проводится в M этапов.

1-й этап.

- (1) Среди точек множества $\mathcal{N}^1 \cup \{1\}$ ищется точка, ближайшая справа к u_1 . Пусть это l_p^1 , $p \in \{1, \dots, k^{\alpha_1} + 1\}$.
- (2) Среди точек множества $\{l_j^1 \mid j = p-1, \dots, k^{\alpha_1}\}$ ищется точка, ближайшая слева к v_1 . Пусть это l_r^1 , $r \in \{p-1, \dots, k^{\alpha_1}\}$.
- (3) Если $p < r$, то для упорядоченных ординат y_j^2 тех точек библиотеки V , абсциссы которых удовлетворяют условию $l_p^1 \leq y_j^1 < l_r^1$, мы решаем одномерную задачу интервального поиска, где в качестве запроса берется отрезок $\tilde{x} = [u_2, v_2]$.
- (4) Если $M = 1$ и $l_r^1 = y_i^1$ для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$, то проверяем принадлежность ординаты y_i^2 отрезку $[u_2, v_2]$ и в зависимости от результата проверки включаем или не включаем точку $\tilde{y}_i = (y_i^1, y_i^2)$ в ответ задачи.
- (5) Если $M > 1$, то переходим ко второму этапу.

Рис. 2. Случай $t = s - 1$

q -й этап, $2 \leq q \leq M$. Пусть l_s^{q-1} — точка, ближайшая справа к u_1 на $(q-1)$ -й сетке, l_t^{q-1} — точка, ближайшая слева к v_1 на $(q-1)$ -й сетке. Эти точки являются левыми концами s -го и t -го интервалов $(q-1)$ -й сетки соответственно.

(1) Если $s \leq t$ (см. рис. 1), то

- (1.1) среди точек множества N_{s-1}^q ищем точку, ближайшую справа к u_1 , обозначим найденную точку ξ' ;
- (1.2) среди точек множества N_t^q ищем точку, ближайшую слева к v_1 , обозначим найденную точку ξ'' ;
- (1.3) для упорядоченных ординат y_j^2 тех точек библиотеки V , абсциссы которых y_j^1 удовлетворяют условию $\xi' \leq y_j^1 < l_s^{q-1}$, решаем одномерную задачу интервального поиска с запросом $\tilde{x}' = [u_2, v_2]$;
- (1.4) для упорядоченных ординат y_j^2 тех точек библиотеки V , абсциссы которых y_j^1 удовлетворяют условию $l_t^{q-1} \leq y_j^1 < \xi''$, решаем одномерную задачу интервального поиска с запросом $\tilde{x}' = [u_2, v_2]$.

(2) Если $t = s - 1$ (см. рис. 2), то

- (2.1) среди точек множества N_{s-1}^q ищем точку, ближайшую справа к u_1 , обозначим найденную точку ξ' ;
 - (2.2) пусть ξ — точка, предшествующая точке ξ' на q -й сетке, среди точек множества N_{s-1}^q , не меньших ξ , ищем точку, ближайшую слева к v_1 , обозначим ее ξ'' ;
 - (2.3) если $\xi' < \xi''$, то для упорядоченных ординат y_j^2 тех точек библиотеки V , абсциссы которых y_j^1 удовлетворяют условию $\xi' \leq y_j^1 < \xi''$, решаем одномерную задачу интервального поиска, где в качестве запроса берется отрезок $\tilde{x}' = [u_2, v_2]$.
- (3) Если $q = M$ и $\xi'' = y_i^1$ для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$, то проверяем принадлежность ординаты y_i^2 отрезку $[u_2, v_2]$ и в зависимости от результата проверки включаем или не включаем точку $\tilde{y}_i = (y_i^1, y_i^2)$ в ответ задачи.
- (4) Если $q < M$, то осуществляем переход к следующему этапу.

Для решения одномерной задачи интервального поиска и задачи о нахождении точки, ближайшей к данной (задача о близости) воспользуемся алгоритмами, приведенными в [27]. Дадим их неформальное описание.

3.1. Одномерный интервальный поиск

Пусть $V = \{z_1, \dots, z_l\} \subset [0, 1]$ — упорядоченное по возрастанию множество, в котором мы должны производить поиск (библиотека), X_{int} — множество запросов, $m \in \mathbb{N}$ — некоторый параметр, значение которого будет установлено позже. Построим для библиотеки V множество номеров $S = \{s_1, \dots, s_{m-1}\}$, где s_i — номер записи

из V такой, что z_{s_i} — ближайшая слева запись к точке i/m , $i = 1, \dots, m-1$. Если такой записи нет, то $s_i = 0$. Отметим, что это множество строится только один раз.

Теперь поиск по произвольному запросу $\tilde{x} = (u, v)$ производится следующим образом.

Сначала вычисляется длина запроса $\tilde{x}$.

Если она меньше, чем $1/m$, то в множестве V дихотомическим поиском находится ближайшая справа к точке u запись. Далее, начиная с этой записи, просматриваются слева направо все записи из V и сравниваются с правым концом запроса — точкой v до тех пор, пока очередная запись не станет больше v .

Если $v - u \geq 1/m$, то вычисляем номер $j = \lfloor n \cdot m \rfloor + 1$. Понятно, что точка j/m попадает в интервал $[u, v]$. Теперь, начиная с записи с номером s_j , просматриваем справа налево записи из V и сравниваем с левым концом запроса — точкой u . Как только очередная запись окажется меньше u , начиная с записи с номером $s_j + 1$, просматриваем слева направо записи из V и сравниваем с правым концом запроса — точкой v до тех пор, пока очередная запись не станет больше v .

3.2. Поиск точки, ближайшей к данной

Пусть $V = \{z_1, \dots, z_l\} \subset [a, b]$ — упорядоченное по возрастанию множество, в котором мы должны производить поиск (библиотека), $X = [a, b]$ — множество запросов, $m \in \mathbb{N}$ — некоторый параметр, значение которого будет установлено позже.

Разобьем множество $X = [a, b]$ на m равных частей $X_1, \dots, X_m$, где

$$X_i = [a + (i-1)(b-a)/m, a + i(b-a)/m), \quad i = 1, \dots, m.$$

Пусть $V_i = X_i \cap V$, $i = 1, \dots, m$.

Теперь для произвольной точки-запроса x поиск точки из V , ближайшей справа (слева) к x , будем проводить следующим образом.

Определим ту часть отрезка, которой принадлежит запрос x . Ее номер равен $i = \lfloor (x-a)m/(b-a) \rfloor + 1$, после чего в множестве V_i осуществим обычный дихотомический поиск.

Очевидно, что при $M = 1$ описанный выше многоэтапный алгоритм совпадает с алгоритмом решения двумерной задачи интервального поиска из [27].

4. Построение информационного графа

Прежде, чем приступить к построению ИГ над базовым множеством $\mathcal{F}$, решающего двумерную задачу интервального поиска описанным выше методом, введем вспомогательные блоки, из которых и будем впоследствии строить ИГ.

Пусть $[b, d] \subseteq [0, 1]$ — произвольный интервал.

Пусть $Z = \{z_1, \dots, z_l\}$ — упорядоченное множество действительных чисел из интервала $[b, d]$. Через $U_{Z,b,d}^1$ обозначим ИГ с одной входной вершиной (корнем) и $l+1$ выходными вершинами (листьями, которые занумерованы слева направо числами $1, \dots, l+1$) такой, что функция проводимости между корнем и i -м, $i = 1, \dots, l+1$, листом имеет вид

$$f_i(u_1, v_1, u_2, v_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } z_{i-1} < u_1 \leq z_i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (15)$$

где $z_0 = b$, $z_{l+1} = d$.

Если считать, что i -му листу, $i = 1, \dots, l+1$, соответствует точка z_i , то $U_{Z,b,d}^1$ позволяет находить точку из множества $\{z_1, \dots, z_l, z_{l+1} = d\}$, ближайшую справа к u_1 .

ИГ $U_{Z,b,d}^1$ строится по методу, описанному в параграфе 2.3 в [27] с помощью функций из $G_1 \cup G_3$. Неформальное описание алгоритма соответствующего ИГ $U_{Z,b,d}^1$ (то есть решающего задачу поиска ближайшей точки) приведено в предыдущем разделе.

Вероятностная мера на множестве запросов $u_1 \in [b, d]$ при условии, что $b \leq e \leq v_1 \leq f < 1$, в рассмотренной задаче о близости определяется функцией плотности вероятности, задаваемой соотношением (10). Поскольку справедливо (13), мы находимся в условиях теоремы 7 из [27]. Следовательно, если выбрать в качестве параметра алгоритма (см. предыдущий раздел) $m = \lfloor cl \rfloor$, то

$$Q(U_{Z,b,d}^1) = (2+c)l+1, \quad T(U_{Z,b,d}^1) \leq 2, \quad T(U_{Z,b,d}^1, x) \leq 1 + \lfloor \log_2(l+1) \rfloor \quad (16)$$

для любого $x \in [b, d]$.

Пусть $Z = \{z_1, \dots, z_l\}$ — упорядоченное множество действительных чисел из интервала $[e, f]$. Через $U_{Z,e,f}^2$ обозначим ИГ с одной входной вершиной (корнем) и $(l+1)$ выходными вершинами (листьями, которые занумерованы слева направо числами $1, \dots, l+1$) такой, что функция проводимости между корнем и i -м, $i = 1, \dots, l+1$, листом имеет вид

$$f_i(u_1, v_1, u_2, v_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } z_{i-1} \leq v_1 < z_i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $z_0 = b$, $z_{l+1} = e$.

Если считать, что i -му листу, $i = 1, \dots, l+1$, соответствует точка z_{i-1} , то $U_{Z,e,f}^2$ позволяет находить точку из множества $\{b = z_0, z_1, \dots, z_l\}$, ближайшую слева к v_1 .

ИГ $U_{Z,e,f}^2$ строится аналогично ИГ $U_{Z,e,f}^1$ с помощью функций из $G_2 \cup G_4$.

Вероятностная мера на множестве запросов $v_1 \in [e, f]$ при условии, что $0 \leq b \leq u_1 \leq d < 1$ и $b \leq e$, в рассмотренной задаче о близости определяется функцией плотности вероятности, задаваемой соотношением (11). Поскольку справедливо (14), мы находимся в условиях теоремы 7 из [27]. Поэтому при $m = \lfloor cl \rfloor$

$$Q(U_{Z,e,f}^2) = (2+c)l+1, \quad T(U_{Z,e,f}^2) \leq 2, \quad T(U_{Z,e,f}^2, x) \leq 1 + \lfloor \log_2(l+1) \rfloor \quad (17)$$

для любого $x \in [e, f]$.

Пусть $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$ — упорядоченное множество действительных чисел из интервала $[0, 1)$. Через U_Z^3 обозначим ИГ с одной входной вершиной (корнем) и l выходными вершинами такой, что функция проводимости между корнем и листом с номером i , $i = 1, \dots, l$, имеет вид

$$f_i(u_1, v_1, u_2, v_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } u_2 \leq z_i \leq v_2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если считать, что i -му листу, $i = 1, \dots, l$, соответствует точка z_i , то U_Z^3 позволяет находить все точки из Z , принадлежащие отрезку $[u_2, v_2]$.

ИГ U_Z^3 разрешает одномерную задачу интервального поиска для библиотеки $V = Z$ и множества запросов $X = X_{\text{int}}$. ИГ U_Z^3 будем строить по методу, описанному

в параграфе 2.4.1 в [27], с помощью функций из $G_5 \cup G_6, F_2$. Неформальное описание алгоритма, соответствующего ИГ U_Z^3 (алгоритма решения одномерной задачи интервального поиска), приведено в предыдущем разделе.

Если для некоторых $b, d, e, f \in [0, 1)$ таких, что $b < d \leq e < f$ выполняются неравенства $b \leq u_1 \leq d$ и $e \leq v_1 \leq f$, то вероятностная мера на множестве запросов определяется функцией плотности вероятности, задаваемой соотношением (9). Поскольку выполняется (12), мы находимся в условиях теоремы 8 из [27]. Следовательно, если в качестве параметра алгоритма (см. предыдущий раздел) выбрать $m = 2c \lfloor \log_2 l \rfloor$, то

$$Q(U_Z^3) \leq 4l - 1 + 6c \lfloor \log_2 l \rfloor, \quad T(U_Z^3) \leq 5 + \sum_{z \in Z} \mathbf{P}'(O(z, \rho_{\text{int}})), \quad (18)$$

где $\mathbf{P}'$ определяется функцией плотности вероятности (9), и для любого $\tilde{x} \in X_{\text{int}}$

$$T(U_Z^3, \tilde{x}) \leq 1 + \lfloor \log_2 l \rfloor + |\{z \in Z: \tilde{x} \rho_{\text{int}} z\}|. \quad (19)$$

Приступим к построению информационного графа U^* , решающего двумерную задачу интервального поиска методом, описанным в предыдущем разделе.

Сначала построим ИГ U_q , $q = 1, \dots, M$.

Все полюсы графа U_q , $q = 1, \dots, M$, разделяются на несколько типов.

- (1) При $1 \leq q < M$ в графе U_q есть полюсы ϑ_j^q , $j = 2, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q}$, на которых реализуются функции

$$f_j^{\vartheta, q}(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } l_{j-1}^q < u_1 \leq l_j^q \leq v_1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (20)$$

Из вершин ϑ_j^q в дальнейшем будут выпускаться ИГ, находящие в множестве N_{j-1}^{q+1} точку, ближайшую справа к u_1 .

- (2) При $1 \leq q \leq M$ в U_q есть полюса β_j^q , $j = 1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q}$, на которых реализуются функции

$$f_j^{\beta, q}(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } u_1 \leq l_j^q \leq v_1 < l_{j+1}^q, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (21)$$

При $q < M$ из вершин β_j^q в дальнейшем будут выпускаться ИГ, находящие в множестве N_j^{q+1} точку, ближайшую слева к v_1 , а при $q = M$ в этих вершинах будет выполняться проверка принадлежности отрезку $[u_2, v_2]$ ординаты точки библиотеки V с абсциссой l_j^q .

- (3) При $1 \leq q < M$ в U_q есть полюсы γ_j^q , $j = 2, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q} + 1$. На них реализуются функции

$$f_j^{\gamma, q}(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } l_{j-1}^q < u_1 \leq v_1 < l_j^q, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (22)$$

Из вершин γ_j^q будут выпускаться ИГ, которые находят ближайшую справа к u_1 и ближайшую слева к v_1 точки при условии, что $u_1, v_1 \in (l_{j-1}^q, l_j^q)$.

- (4) При $1 \leq q \leq M$ в U_q есть полюсы δ_{sij}^q , $s = 1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1}}$, $i = 2, \dots, k^{\alpha_q} - 1$, $j = i + 1, \dots, k^{\alpha_q}$. При $q = 1$ индексы меняются как $s = 1$, $i = 1, \dots, k^{\alpha_1} - 1$, $j = i + 1, \dots, k^{\alpha_1}$. На них реализуются функции

$$f_{sij}^{\delta,q}(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & l_{(s-1)k^{\alpha_q}+i-1}^q < u_1 \leq l_{(s-1)k^{\alpha_q}+i}^q, l_{(s-1)k^{\alpha_q}+j}^q \leq v_1 < l_{(s-1)k^{\alpha_q}+j+1}^q, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (23)$$

Из вершин δ_{sij}^q будут выпускаться ИГ, решающие одномерную задачу интервального поиска для ординат тех точек из библиотеки V , абсциссы которых принадлежат интервалу $[l_{(s-1)k^{\alpha_q}+i}^q, l_{(s-1)k^{\alpha_q}+j}^q]$.

- (5) При $1 < q \leq M$ в U_q есть полюсы η_{ij}^q , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1}}$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q} - 1$, на которых реализуются функции

$$f_{ij}^{\eta,q}(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j}^q < u_1 \leq l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^q, \quad v_1 \geq l_i^{q-1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (24)$$

Из вершин η_{ij}^q будут в дальнейшем выпускаться ИГ, решающие одномерную задачу интервального поиска для ординат тех точек библиотеки V , абсциссы которых принадлежат интервалу $[l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^q, l_i^{q-1}]$.

- (6) При $1 < q \leq M$ в U_q есть полюсы ζ_{ij}^q , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1}}$, $j = 2, \dots, k^{\alpha_q}$, на которых реализуются функции

$$f_{ij}^{\zeta,q}(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } l_{(i-1)k^{\alpha_q}+j}^q \leq v_1 < l_{(i-1)k^{\alpha_q}+j+1}^q, \quad u_1 \leq l_i^{q-1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (25)$$

Из вершин ζ_{ij}^q будут в дальнейшем выпускаться ИГ, решающие одномерную задачу интервального поиска для ординат тех точек библиотеки V , абсциссы которых принадлежат интервалу $[l_i^{q-1}, l_{(i-1)k^{\alpha_q}+j}^q]$.

Строить U_q , $q = 1, \dots, M$, будем индуктивно по q .

Пусть $q = 1$. Возьмем ИГ $U_{N^1,0,1}^1$. Он имеет $(k^{\alpha_1} + 1)$ концевых вершин. Обозначим их $\theta_1, \dots, \theta_{k^{\alpha_1}+1}$.

Если $M > 1$, то для вершины $\theta_{k^{\alpha_1}+1}$ введем новое обозначение $\gamma_{k^{\alpha_1}+1}^1$, так как мы попадаем в нее только в том случае, когда

$$l_{k^{\alpha_1}}^1 < u_1 \leq v_1 < l_{k^{\alpha_1}+1}^1 = 1.$$

Если $M = 1$, то пометим ее символом $*$. Выход к вершине, помеченной символом $*$ будет означать, что ответ на запрос $\tilde{x} = (u_1, v_1, u_2, v_2)$ пуст. Эта метка делается только для наглядности описания, на функционирование ИГ она не влияет.

Из каждой вершины θ_i , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1}$, выпустим два ребра, припишем левому 1, правому 2, а самой вершине θ_i припишем переключатель $g_{l_i}^4(\tilde{x}) \in G^4$, обозначим конец левого ребра θ'_i , конец правого θ''_i . В θ'_i мы попадаем только в том случае, когда

$$l_{i-1}^1 < u_1 \leq v_1 < l_i^1, \quad (26)$$

Рис. 3. Информационный граф U_1 , $M > 1$

а в θ_i'' , когда $l_{i-1}^1 < u_1 \leq l_i^1$, $v_1 \geq l_i^1$. Поэтому если $M > 1$, то мы можем обозначить все θ_i' как в γ_i^1 , а θ_i'' как ϑ_i^1 , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1}$.

Вершину θ_1'' пометим символом $*$.

Если $M = 1$, то все θ_i' , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1}$, пометим символом $*$.

Каждую вершину θ_i'' , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1} - 1$ (включая переобозначенные в ϑ_i^1), отождествим с корнем ИГ $U_{Z^{1,i,l_i^1,1}}^2$, где

$$Z^{1,i} = \{l_j^1 \in N^1 \mid j \geq i + 1\}.$$

Информационный граф $U_{Z^{1,i,l_i^1,1}}^2$ имеет $k^{\alpha_1} - i + 1$ концевых вершин, которые обозначим θ_{ij} , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1} - 1$, $j = i, \dots, k^{\alpha_1}$. Понятно, что в вершины θ_{ij} мы проходим только в том случае, когда

$$l_{i-1}^1 < u_1 \leq l_i^1, \quad l_j^1 \leq v_1 < l_{j+1}^1. \quad (27)$$

Следовательно, можно переобозначить вершины θ_{ij} , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1} - 1$, $j = i + 1, \dots, k^{\alpha_1}$, в δ_{1ij}^1 .

Введем новые вершины β_j^1 , $j = 1, \dots, k^{\alpha_1}$, и из каждой θ_{ij} , $i = 1, \dots, j$ (включая θ_{ij} , переобозначенные в δ_{1ij}^1), проведем ребро в вершину β_j^1 , которому припишем предикат, тождественно равный 1. Очевидно, что

$$\varphi_{\beta_j^1} = \begin{cases} 1, & \text{если } l_j^1 \leq v_1 < l_{j+1}^1 \text{ и } u_1 \leq l_j^1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то есть $\varphi_{\beta_j^1} = f_{j,1}^{\beta,1}(\tilde{x})$.

Построенный граф обозначим U_1 . Он изображен на рис. 3 для случая $M > 1$.

Опишем теперь индуктивный переход. Пусть построен ИГ U_{q-1} . Будем строить U_q , достраивая U_{q-1} следующим образом.

Из каждой вершины ϑ_i^{q-1} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, выпустим информационный граф $U_{N_{i-1}^{q-1}, l_{i-1}^{q-1}, l_i^{q-1}}^1$. Этот граф имеет k^{α_q} листьев, которые обозначим τ'_{qij} , $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}$.

В вершину τ'_{qij} мы попадаем только в том случае, когда

$$l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j}^q < u_1 \leq l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^q, \quad v_1 \geq l_i^{q-1}, \quad (28)$$

поскольку

$$N_{i-1}^q = (l_{i-1}^{q-1}, l_i^{q-1}) = (l_{(i-2)k^{\alpha_q}+1}^q, l_{(i-1)k^{\alpha_q}+1}^q).$$

Получаем, что $\varphi_{\tau'_{qij}} = f_{ij}^{\eta, q}(\tilde{x})$. Следовательно, можно переобозначить τ'_{qij} с индексами $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q} - 1$, в η_{ij}^q .

Из каждой вершины β_i^{q-1} , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, выпустим информационный граф $U_{N_i^q, l_i^{q-1}, l_{i+1}^{q-1}}^2$. Граф имеет k^{α_q} листьев, которые обозначим τ''_{qij} , $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}$.

В вершину τ''_{qij} мы попадаем только в том случае, когда

$$l_{(i-1)k^{\alpha_q}+j}^q \leq v_1 < l_{(i-1)k^{\alpha_q}+j+1}^q, \quad u_1 \leq l_i^{q-1}. \quad (29)$$

Таким образом, $\varphi_{\tau''_{qij}} = f_{ij}^{\zeta, q}(\tilde{x})$. Следовательно, можно переобозначить τ''_{qij} с индексами $i = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, $j = 2, \dots, k^{\alpha_q}$, в ζ_{ij}^q .

Рассмотрим вершины γ_i^{q-1} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$. Из каждой такой вершины выпустим информационный граф $U_{N_{i-1}^q, l_{i-1}^{q-1}, l_i^{q-1}}^1$. Этот граф имеет k^{α_q} листьев. Обозначим их θ_{qij} , $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}$. Проводимость в эти вершины будет равна

$$\varphi_{\theta_{qij}} = \begin{cases} 1, & \text{если } l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j}^q < u_1 \leq l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^q, \quad v_1 < l_{(i-1)k^{\alpha_q}+1}^q, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (30)$$

Из каждой вершины θ_{qij} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q} - 1$, выпустим два ребра, припишем левому 1, правому 2, а самой θ_{qij} припишем переключатель $g_{l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^q}^4(\tilde{x})$. Конец левого ребра, выходящего из θ_{qij} , обозначим θ'_{qij} , конец правого θ''_{qij} . Переобозначим все $\theta_{q,i,k^{\alpha_q}}$, $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$, в $\theta'_{q,i,k^{\alpha_q}}$.

Если $q < M$, то переобозначим все θ'_{qij} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}$, в $\gamma_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^q$, так как в θ'_{qij} мы можем попасть только в том случае, когда

$$l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j}^q < u_1 \leq v_1 < l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^q,$$

то есть $\varphi_{\theta'_{qij}} = f_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^{\gamma, q}(\tilde{x})$.

При изменении i от 2 до $k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$, j от 1 до k^{α_q} , $(i-2)k^{\alpha_q} + j + 1$ изменяется от 2 до $k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q} + 1$, поэтому мы получим все вершины типа γ_s^q , $s = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q} + 1$.

Если $q = M$, то все θ'_{qij} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}$, пометим символом $*$.

В вершины θ''_{qij} мы попадаем при условии, что

$$l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j}^q < u_1 \leq l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^q \leq v_1 < l_{(i-1)k^{\alpha_q}+1}^q. \quad (31)$$

Из каждой вершины θ''_{qij} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q} - 2$, выпустим ИГ $U^2_{Z^{q,j}_{i-1}, l^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}, l^{q-1}_i}$, где

$$Z^{q,j}_{i-1} = \{l^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+2}, \dots, l^q_{(i-1)k^{\alpha_q}}\}.$$

Этот информационный граф имеет $(k^{\alpha_q} - j)$ листьев, которые обозначим

$$\mu^q_{ijt}, \quad i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1, \quad j = 1, \dots, k^{\alpha_q} - 2, \quad t = j + 1, \dots, k^{\alpha_q}.$$

Вершины $\theta''_{q,i,k^{\alpha_q}-1}$ переобозначим в $\mu^q_{i,k^{\alpha_q}-1,k^{\alpha_q}}$

В вершину μ^q_{ijt} мы проходим только в том случае, когда

$$l^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+j} < u_1 \leq l^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}, \quad l^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+t} \leq v_1 < l^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+t+1}. \quad (32)$$

Следовательно, $\varphi_{\mu^q_{ijt}} = f^{\delta,q}_{i-1,j+1,t}(\tilde{x})$, и поэтому можно переобозначить вершины μ^q_{ijt} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q} - 2$, $t = j + 2, \dots, k^{\alpha_q}$, в $\delta^q_{i-1,j+1,t}$.

Так как $i - 1$ изменяется от 1 до $k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, $j + 1$ изменяется от 2 до $k^{\alpha_q} - 1$, t изменяется от $(j + 1) + 1$ до k^{α_q} , мы получаем все нужные вершины типа δ^q_{spr} , $s = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, $p = 2, \dots, k^{\alpha_q} - 1$, $r = p + 1, \dots, k^{\alpha_q}$.

Если $q < M$, то введем новые вершины ϑ^q_t , $t = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q}$. Из каждой вершины θ''_{qij} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q} - 1$, и каждой вершины τ'_{qij} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}$ (включая переобозначенные в η^q_{ij}), проведем ребро в вершину $\vartheta^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}$, которому припишем предикат, тождественно равный единице. Поскольку проводимость в вершины θ''_{qij} определяется соотношением (31), а в вершины τ'_{qij} формулой (24), на $\vartheta^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}$ мы имеем нужную нам функцию, так как

$$\varphi_{\vartheta^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}} = \begin{cases} 1, & \text{если } l^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+j} < u_1 \leq l^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1} \leq v_1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При изменении i от 2 до $k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$, j от 1 до k^{α_q} , $t = (i-2)k^{\alpha_q} + j + 1$ изменяется от 2 до $k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q}$, то есть в нужных нам пределах. Здесь индекс $k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q} + 1$ не появляется поскольку при $i = k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$ j меняется от 1 до $k^{\alpha_q} - 1$.

Введем новые вершины β^q_s , $s = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q}$. Из каждой вершины μ^q_{ijt} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} + 1$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q} - 1$, $t = j + 1, \dots, k^{\alpha_q}$ (включая вершины, переобозначенные в $\delta^q_{i-1,j+1,t}$), выпустим ребро в вершину $\beta^q_{(i-2)k^{\alpha_q}+t}$, и из каждой вершины τ'_{qij} , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}$ (включая переобозначенные в ζ^q_{ij}), выпустим ребро в вершину $\beta^q_{(i-1)k^{\alpha_q}+j}$, ребрам припишем предикаты, тождественно равные единице.

Учитывая соотношения (29), (32), легко заметить, что функция фильтра на введенных вершинах β^q_s совпадает с нужной нам функцией, задаваемой соотношением (21), и s изменяется в пределах от 1 до $k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q}$.

Тем самым построение ИГ U_q завершено.

Пусть мы построили информационный граф U_M . Теперь, чтобы завершить построение окончательного ИГ U^* , решающего задачу нашим методом, надо добавить фрагменты, решающие одномерные задачи интервального поиска по вторым координатам (u_2, v_2) .

Пусть q, s, i, j — натуральные числа, $q \in \{1, \dots, M\}$, $s \in \{1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1}}\}$, $i \in \{1, \dots, k^{\alpha_q}\}$, $j \in \{i+1, \dots, k^{\alpha_q} + 1\}$, введем обозначения

$$A_{s,i,j}^q = \{y_p^2 : (y_p^1, y_p^2) \in V, l_{(s-1)k^{\alpha_q}+i}^q \leq y_p^1 < l_{(s-1)k^{\alpha_q}+j}^q\}, \quad (33)$$

то есть $A_{s,i,j}^q$ состоит из ординат точек библиотеки, абсциссы которых принадлежат интервалу $[l_{(s-1)k^{\alpha_q}+i}^q, l_{(s-1)k^{\alpha_q}+j}^q)$.

ИГ U_M содержит полюсы

$$\delta_{sij}^q, \quad q = 1, \dots, M, \quad s = 1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1}}, \quad i = 2, \dots, k^{\alpha_q} - 1, \quad j = i+1, \dots, k^{\alpha_q}.$$

При $q = 1$ индексы меняются так: $s = 1$, $i = 1, \dots, k^{\alpha_1} - 1$, $j = i+1, \dots, k^{\alpha_1}$. В эти полюсы мы попадаем при условии, что

$$l_{(s-1)k^{\alpha_q}+i-1}^q < u_1 \leq l_{(s-1)k^{\alpha_q}+i}^q, \quad l_{(s-1)k^{\alpha_q}+j}^q \leq v_1 < l_{(s-1)k^{\alpha_q}+j+1}^q.$$

Из каждого полюса δ_{sij}^q выпустим ИГ $U_{A_{s,i,j}^q}^3$, который решает одномерную задачу интервального поиска для запроса (u_2, v_2) среди точек из $A_{s,i,j}^q$. Листья ИГ $U_{A_{s,i,j}^q}^3$, которым соответствуют точки $y_p^2 \in A_{s,i,j}^q$, мы объявим листьями окончательного ИГ U^* и припишем им записи $(y_p^1, y_p^2) \in V$.

ИГ U_M содержит полюсы

$$\eta_{ij}^q, \quad q = 2, \dots, M, \quad i = 2, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1}}, \quad j = 1, \dots, k^{\alpha_q} - 1,$$

в которые мы попадаем при условии, что

$$l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j}^q < u_1 \leq l_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^q, \quad v_1 \geq l_{(i-1)k^{\alpha_q}+1}^q.$$

Из каждого полюса η_{ij}^q выпустим ИГ $U_{A_{i-1,j+1,k^{\alpha_q}+1}^q}^3$. Листья ИГ $U_{A_{i-1,j+1,k^{\alpha_q}+1}^q}^3$, которым соответствуют точки $y_p^2 \in A_{i-1,j+1,k^{\alpha_q}+1}^q$, мы объявим листьями окончательного ИГ U^* и припишем им записи $(y_p^1, y_p^2) \in V$.

ИГ U_M содержит полюсы ζ_{ij}^q , $q = 2, \dots, M$, $i = 1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1}}$, $j = 2, \dots, k^{\alpha_q}$, в которые мы попадаем при условии, что

$$u_1 \leq l_{(i-1)k^{\alpha_q}+1}^q, \quad l_{(i-1)k^{\alpha_q}+j}^q \leq v_1 < l_{(i-1)k^{\alpha_q}+j+1}^q.$$

Из каждого полюса ζ_{ij}^q выпустим ИГ $U_{A_{i,1,j}^q}^3$. Листья ИГ $U_{A_{i,1,j}^q}^3$, которым соответствуют точки $y_p^2 \in A_{i,1,j}^q$, мы объявим листьями окончательного ИГ U^* и припишем им записи $(y_p^1, y_p^2) \in V$.

ИГ U_M содержит полюсы β_j^M , $j = 1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_M}$, в которые мы попадаем при условии, что

$$l_{j-1}^M < u_1 \leq l_j^M \leq v_1 < l_{j+1}^M.$$

Из каждого полюса β_j^M выпустим одно ребро, которому припишем предикат $f_{y_j^2} \in F_2$. Конец ребра объявим листом и припишем ему запись $(y_j^1, y_j^2) \in V$.

Полученный окончательный ИГ обозначим U^* . Он соответствует алгоритму решения двумерной задачи интервального поиска, описанному в предыдущем разделе.

5. Допустимость информационного графа

Покажем, что ИГ U^* решает ЗИП $I = \langle X_{\text{int } 2}, V, \rho_{\text{int } 2} \rangle$.

Возьмем произвольный запрос $\tilde{x} = (u_1, v_1, u_2, v_2)$. Возможны следующие случаи.

1. Для любого $q \in \{1, \dots, M\}$ существует номер $r = r(q) \in \{1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q} + 1\}$ такой, что $l_{r-1}^q < u_1 \leq v_1 < l_r^q$. Это означает, что $\{\tilde{y} \in V : \tilde{x} \rho_{\text{int } 2} \tilde{y}\} = \emptyset$. Поскольку путь к листьям ИГ U^* лежит только через вершины типов $\delta_{sij}^q, \eta_{ij}^q, \zeta_{ij}^q, \beta_j^M$, а проводимость в эти вершины есть только в случаях, когда хотя бы одна точка сетки попадает в интервал $[u_1, v_1]$, проводимость в эти вершины на запросе $\tilde{x}$ равна нулю и ответ ИГ U^* на запрос $\tilde{x}$ пуст.

2. Существуют такие номера $q \in \{1, \dots, M\}$ и $r = r(q) \in \{1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q}\}$, что $u_1 \leq l_r^q \leq v_1$. Пусть q_0 — минимальный из номеров q , обладающих таким свойством, то есть либо $q_0 = 1$, либо для любого $q < q_0$ существует такой номер $r = r(q) \in \{1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q} + 1\}$, что $l_{r-1}^q < u_1 \leq v_1 < l_r^q$. Возможны два подслучая.

2.1. Для любого $q \in \{q_0, \dots, M\}$ существует номер $r = r(q) \in \{1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q}\}$ такой, что $l_{r-1}^q < u_1 \leq l_r^q \leq v_1 < l_{r+1}^q$. Это означает, что множество $\{\tilde{y} \in V : \tilde{x} \rho_{\text{int } 2} \tilde{y}\}$ содержит не более одной записи, причем единственным кандидатом на принадлежность этому множеству является запись $(y_{r(M)}^1, y_{r(M)}^2)$. Если $u_2 \leq y_{r(M)}^2 \leq v_2$, то $(y_{r(M)}^1, y_{r(M)}^2) \in \{\tilde{y} \in V : \tilde{x} \rho_{\text{int } 2} \tilde{y}\}$, иначе $\{\tilde{y} \in V : \tilde{x} \rho_{\text{int } 2} \tilde{y}\} = \emptyset$. Непосредственно проверяется, что среди вершин типа β_j^M только проводимость в вершину $\beta_{r(M)}^M$ будет ненулевой, тогда как проводимость всех вершин типа $\delta_{sij}^q, \eta_{ij}^q, \zeta_{ij}^q$ будет равна нулю, так как мы проходим в эти вершины только тогда, когда по крайней мере две точки сетки попадают в интервал $[u_1, v_1]$. Из вершины $\beta_{r(M)}^M$ исходит ребро с предикатом $f_{y_{r(M)}^2}$, что соответствует проверке принадлежности интервалу $[u_1, v_1]$ точки $y_{r(M)}^2$. Таким образом $\mathcal{F}_U(\tilde{x}) = \{\tilde{y} \in V : \tilde{x} \rho_{\text{int } 2} \tilde{y}\}$.

2.2. Существуют номера $q \in \{q_0, \dots, M\}$ и $r = r(q) \in \{1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q} - 1\}$ такие, что $u_1 \leq l_r^q \leq l_{r+1}^q \leq v_1$. Пусть q_1 — минимальный из номеров q , обладающих таким свойством, то есть либо $q_1 = q_0$, либо для любого q такого, что $q_0 \leq q < q_1$, существует такой номер $r = r(q) \in \{1, \dots, k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q}\}$, что

$$l_{r-1}^q < u_1 \leq l_r^q \leq v_1 < l_{r+1}^q.$$

Для каждого $q \in \{1, \dots, M\}$ определим такие номера $r'(q)$ и $r''(q)$, что $l_{r'(q)-1}^q < u_1 \leq l_{r'(q)}^q$ и $l_{r''(q)}^q \leq v_1 < l_{r''(q)+1}^q$. Понятно, что если $q_0 > 1$, то для любого $q \in \{1, \dots, q_0 - 1\}$ справедливо равенство $r'(q) = r''(q) - 1$, и если $q_0 < q_1$, то для любого $q \in \{q_0, \dots, q_1 - 1\}$ справедливо равенство $r'(q) = r''(q)$, и для любого $q \in \{q_1, \dots, M\}$ справедливо неравенство $r'(q) < r''(q)$. Отметим, что если $q_1 > 1$, то для $q < q_1$ согласно сделанному выше замечанию проводимость всех вершин типа $\delta_{sij}^q, \eta_{ij}^q, \zeta_{ij}^q$ будет равна нулю.

Заметим, что для того, чтобы проводимость в вершины типа δ_{sij}^q была равна единице, необходимо, чтобы $q = 1$, либо u_1 и v_1 принадлежали одному интервалу $(q-1)$ -й сетки. Поэтому, если $q_0 < q_1$, то проводимость во все вершины типа δ_{sij}^q будет равна 0. Если же $q_0 = q_1$, то среди вершин типа δ_{sij}^q только проводимость вершины $\delta_{s',i',j'}^{q_1}$ будет равна 1, где $s' = 1$, если $q_1 = 1$, и $s' = r''(q_1 - 1)$, если $q_1 > 1$, $i' = r'(q) - (s' - 1)k^{\alpha_q}$, $j' = r''(q) - (s' - 1)k^{\alpha_q}$. Выход к вершине $\delta_{s',i',j'}^{q_1}$ означает, что будет решаться одномерная задача интервального поиска для запроса (u_2, v_2) среди точек из множества $A_{s',i',j'}^{q_1}$, определяемого соотношением (33).

Легко видеть, что если $q_0 = q_1$, то проводимость всех вершин типа $\eta_{ij}^{q_1}, \zeta_{ij}^{q_1}$ будет равна нулю.

Для каждого $q \in \{\max(q_0 + 1, q_1), \dots, M\}$ среди вершин типа η_{ij}^q , проводимость только одной вершины $\eta_{i''(q), j''(q)}^q$ может быть равна 1, и это случится при условии, что $r'(q - 1) > 1$ и $r'(q) < (r'(q - 1) - 1)k^{\alpha_q} + 1$, при этом $i''(q) = r'(q - 1)$ и $j''(q) = r'(q) - (r'(q - 1) - 2)k^{\alpha_q} - 1$. Выход к вершине $\eta_{i''(q), j''(q)}^q$ означает, что будет решаться одномерная задача интервального поиска для запроса (u_2, v_2) среди точек из множества $A_{i''(q)-1, j''(q)+1, k^{\alpha_q}+1}^q$.

Для каждого $q \in \{\max(q_0 + 1, q_1), \dots, M\}$ среди вершин типа ζ_{ij}^q проводимость только одной вершины $\zeta_{i'''(q), j'''(q)}^q$ может быть равна 1, и это случится при условии, что $r''(q) > (r''(q - 1) - 1)k^{\alpha_q} + 1$ и при этом

$$i'''(q) = r''(q - 1), \quad j'''(q) = r''(q) - (r''(q - 1) - 1)k^{\alpha_q}.$$

Выход к вершине $\zeta_{i'''(q), j'''(q)}^q$ означает, что будет решаться одномерная задача интервального поиска для запроса (u_2, v_2) среди точек из множества $A_{i'''(q)-1, j'''(q)+1}^q$.

И наконец, среди вершин типа β_j^M , проводимость только вершины $\beta_{r''(M)}^M$ будет равна 1, и в этой вершине делается проверка на принадлежность отрезку $[u_2, v_2]$ точки $y_{r''(M)}^2$.

Тем самым, легко видеть, что все множество записей из V , абсциссы которых принадлежат отрезку $[u_1, v_1]$, разделилось на непересекающиеся части и для каждой части решается одномерная задача интервального поиска по вторым координатам, то есть устанавливается принадлежность ординат записей отрезку $[u_1, v_2]$. А это означает, что ответ ИГ U^* на запрос $\tilde{x}$ совпадает с множеством записей из V , удовлетворяющих запросу $\tilde{x}$.

Таким образом, в силу произвольности $\tilde{x}$ мы доказали допустимость ИГ U^* .

6. Объем информационного графа

Для оценки объема информационного графа U^* вычислим сначала объем ИГ U_1 .

ИГ U_1 содержит ИГ $U_{N^1, 0, 1}^1$, объем которого согласно (16) равен

$$Q(U_{N^1, 0, 1}^1) = (2 + c)k^{\alpha_1} + 1.$$

Из каждой вершины τ_i , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1}$, исходит два ребра, что суммарно дает $2k^{\alpha_1}$ ребер.

Из каждой вершины τ_i'' , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1} - 1$, исходит ИГ $U_{2^{1,i}, l_i^1, 1}^2$, объем которого согласно (17) равен

$$Q(U_{2^{1,i}, l_i^1, 1}^2) = (2 + c)(k^{\alpha_1} - i) + 1.$$

В каждую вершину β_j^1 , $j = 1, \dots, k^{\alpha_1}$, из каждой вершины τ_{ij} , $i = 1, \dots, j$, ведет ребро, то есть суммарное число ребер, ведущих в вершины β_j^1 , равно

$$\sum_{j=1}^{k^{\alpha_1}} j = \frac{k^{\alpha_1}(k^{\alpha_1} + 1)}{2}.$$

Таким образом,

$$Q(U_1) = (2+c)k^{\alpha_1} + 1 + 2k^{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{k^{\alpha_1}-1} ((2+c)(k^{\alpha_1}-i)+1) + \frac{k^{\alpha_1}(k^{\alpha_1}+1)}{2} = \frac{3+c}{2}k^{2\alpha_1} + \frac{9+c}{2}k^{\alpha_1}.$$

Подсчитаем объем ИГ U_q при $2 \leq q \leq M$.

ИГ U_q содержит в себе ИГ U_{q-1} .

Из каждой вершины ϑ_i^{q-1} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, исходит ИГ $U_{\mathcal{N}_{i-1}^q, \mathcal{L}_{i-1}^{q-1}, \mathcal{L}_i^{q-1}}$, объем которого согласно (16) равен $(2+c)(k^{\alpha_q}-1)+1$.

Из каждой вершины β_i^{q-1} , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, исходит ИГ $U_{\mathcal{N}_i^q, \mathcal{L}_i^{q-1}, \mathcal{L}_{i+1}^{q-1}}$, объем которого согласно (17) равен $(2+c)(k^{\alpha_q}-1)+1$.

Из каждой вершины γ_i^{q-1} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}+1$, исходит ИГ $U_{\mathcal{N}_{i-1}^q, \mathcal{L}_{i-1}^{q-1}, \mathcal{L}_i^{q-1}}$. Его объем равен $(2+c)(k^{\alpha_q}-1)+1$.

Из каждой вершины θ_{qij} , $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}-1$, исходит по 2 ребра. Из каждой вершины θ''_{qij} , $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}-2$, исходит ИГ $U_{\mathcal{Z}_{i-1}^{q,j}, \mathcal{L}_{(i-2)k^{\alpha_q}+j+1}^q, \mathcal{L}_i^{q-1}}$, объем которого равен $(2+c)(k^{\alpha_q}-j-1)+1$. Таким образом, объем ИГ, растущего из вершины γ_i^{q-1} , равен

$$(2+c)(k^{\alpha_q}-1)+1+2(k^{\alpha_q}-1)+\sum_{j=1}^{k^{\alpha_q}-2} ((2+c)(k^{\alpha_q}-j-1)+1) = \frac{2+c}{2}k^{2\alpha_q} + \frac{4-c}{2}k^{\alpha_q} - 3.$$

Если $q < M$, то в вершины ϑ_t^q , $t = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q}$, из каждой вершины

$$\theta''_{qij}, \quad i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}+1, \quad j = 1, \dots, k^{\alpha_q}-1,$$

и каждой вершины τ'_{qij} , $i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}$, ведет по одному ребру. Следовательно, суммарное число ребер, ведущих в вершины ϑ_t^q , равно

$$k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}(k^{\alpha_q}-1) + (k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}-1)k^{\alpha_q} = 2k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q} - k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} - k^{\alpha_q}.$$

В вершины β_s^q , $s = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q}$, из каждой вершины

$$\mu_{ijt}^q, \quad i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}+1, \quad j = 1, \dots, k^{\alpha_q}-1, \quad t = j+1, \dots, k^{\alpha_q},$$

и каждой вершины τ''_{qij} , $i = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, $j = 1, \dots, k^{\alpha_q}$, ведет по одному ребру. Следовательно, суммарное число ребер, ведущих в вершины β_s^q , равно

$$k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} \sum_{j=1}^{k^{\alpha_q}-1} (k^{\alpha_q}-j) + k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}k^{\alpha_q} = k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q} \frac{k^{\alpha_q}+1}{2}.$$

Тем самым при $2 \leq q < M$

$$\begin{aligned} Q(U_q) &= Q(U_{q-1}) + ((2+c)(k^{\alpha_q}-1)+1)(k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}-1) \\ &\quad + ((2+c)(k^{\alpha_q}-1)+1)k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} \\ &\quad + ((2+c)k^{2\alpha_q}/2 + (4-c)k^{\alpha_q}/2 - 3)k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} \\ &\quad + 2k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q} - k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} - k^{\alpha_q} + k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q}(k^{\alpha_q}+1)/2 \\ &= U(Q_{q-1}) + (3+c)k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}+2\alpha_q}/2 + \mathcal{O}(k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q}). \end{aligned}$$

Учитывая, что суммарное число ребер, ведущих в вершины ϑ_i^q , равно $\mathcal{O}(k^{\alpha_1+\dots+\alpha_q})$, и есть еще другие слагаемые, имеющие тот же порядок, получаем, что

$$Q(U_M) = \frac{3+c}{2} \sum_{q=1}^M k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}+2\alpha_q} + \mathcal{O}(k). \quad (34)$$

Вычислим объем информационного графа U^* .

Из (33) легко видеть, что

$$|A_{s,i,j}^q| = (j-i)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)}. \quad (35)$$

Из каждой вершины

$$\delta_{sij}^q, \quad q = 1, \dots, M, \quad s = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}, \quad i = 2, \dots, k^{\alpha_q} - 1, \quad j = i+1, \dots, k^{\alpha_q}$$

(при $q = 1$ индексы меняются так: $s = 1, i = 1, \dots, k^{\alpha_1} - 1, j = i+1, \dots, k^{\alpha_1}$) исходит ИГ $U_{A_{s,i,j}^q}^3$, объем которого согласно (18) и (35) равен

$$Q(U_{A_{s,i,j}^q}^3) \leq 4(j-i)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)} - 1 + 6c[\log_2((j-i)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)})].$$

Суммируя по всем q, s, i, j , получаем, что объем ИГ, растущих из вершин δ_{sij}^q , (обозначим его Q_1) не превышает

$$\begin{aligned} Q_1 &< \sum_{q=1}^M \sum_{s=1}^{k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}} \sum_{i=2}^{k^{\alpha_q}-1} \sum_{j=i+1}^{k^{\alpha_q}} 4(j-i)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)} \\ &+ \sum_{q=1}^M \sum_{s=1}^{k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}} \sum_{i=2}^{k^{\alpha_q}-1} \sum_{j=i+1}^{k^{\alpha_q}} 6c[\log_2((j-i)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)})] \\ &+ \sum_{j=2}^{k^{\alpha_1}} (4(j-1)k^{1-\alpha_1} + 6c[\log_2((j-1)k^{1-\alpha_1})]). \end{aligned} \quad (36)$$

Оценим первое слагаемое, которое обозначим Q_{11} :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \sum_{q=1}^M \sum_{s=1}^{k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}} \sum_{i=2}^{k^{\alpha_q}-1} \sum_{j=i+1}^{k^{\alpha_q}} 4(j-i)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)} \\ &= 2 \sum_{q=1}^M k^{1-\alpha_q} \sum_{i=2}^{k^{\alpha_q}-1} (k^{\alpha_q} - i)(k^{\alpha_q} - i + 1) = 2 \sum_{q=1}^M k^{1-\alpha_q} \sum_{i=1}^{k^{\alpha_q}-2} i(i+1) \\ &= 2 \sum_{q=1}^M k^{1-\alpha_q} \left(\frac{(k^{\alpha_q} - 2)(k^{\alpha_q} - 1)(2k^{\alpha_q} - 4 + 1)}{6} + \frac{(k^{\alpha_q} - 2)(k^{\alpha_q} - 1)}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \sum_{q=1}^M k(k^{\alpha_q} - 2)(k^{\alpha_q} - 1) = \frac{2}{3} \sum_{q=1}^M k^{1+2\alpha_q} + \mathcal{O} \left(\sum_{q=1}^M k^{1+\alpha_q} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Оценим второе слагаемое, которое обозначим Q_{12} :

$$\begin{aligned}
 Q_{12} &= \sum_{q=1}^M \sum_{s=1}^{k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}} \sum_{i=2}^{k^{\alpha_q}-1} \sum_{j=i+1}^{k^{\alpha_q}} 6c[\log_2((j-i)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)})] \\
 &< 6c \sum_{q=1}^M k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} \sum_{i=2}^{k^{\alpha_q}-1} \sum_{j=i+1}^{k^{\alpha_q}} \log_2(k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1})}) \\
 &= 3c \log_2 k \sum_{q=1}^M k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}} (1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1}))(k^{\alpha_q} - 2)(k^{\alpha_q} - 1) \\
 &< 3c \log_2 k \sum_{q=1}^M k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}+2\alpha_q} (1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1})). \tag{38}
 \end{aligned}$$

Из каждой вершины

$$\eta_{ij}^q, \quad q = 2, \dots, M, \quad i = 2, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}, \quad j = 1, \dots, k^{\alpha_q} - 1,$$

исходит ИГ $U_{A_{i-1,j+1,k^{\alpha_q}+1}}^3$, объем которого согласно (18) и (35) равен

$$Q(U_{A_{i-1,j+1,k^{\alpha_q}+1}}^3) \leq 4(k^{\alpha_q} - j)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)} - 1 + 6c[\log_2((k^{\alpha_q} - j)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)})].$$

Суммируя по всем q, i, j , получаем, что объем ИГ, растущих из вершин η_{ij}^q (обозначим его Q_2), не превышает

$$\begin{aligned}
 Q_2 &< \sum_{q=2}^M \sum_{i=1}^{k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}} \sum_{j=1}^{k^{\alpha_q}-1} (4 + 6c)(k^{\alpha_q} - j)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)} \\
 &= (4 + 6c) \sum_{q=2}^M k^{1-\alpha_q} \sum_{j=1}^{k^{\alpha_q}-1} j < (2 + 3c) \sum_{q=2}^M k^{1+\alpha_q} \tag{39}
 \end{aligned}$$

Из каждой вершины ζ_{ij}^q , $q = 2, \dots, M$, $i = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}$, $j = 2, \dots, k^{\alpha_q}$, исходит ИГ $U_{A_{i,1,j}}^3$, объем которого согласно (18) и (35) равен

$$Q(U_{A_{i,1,j}}^3) \leq 4(j-1)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)} - 1 + 6c(\log_2((j-1)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)})).$$

Суммируя по всем q, i, j , получаем, что объем ИГ, растущих из вершин ζ_{ij}^q (обозначим его Q_3), удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}
 Q_3 &< \sum_{q=2}^M \sum_{i=1}^{k^{\alpha_1+\dots+\alpha_{q-1}}} \sum_{j=2}^{k^{\alpha_q}} (4 + 6c)(j-1)k^{1-(\alpha_1+\dots+\alpha_q)} \\
 &= (4 + 6c) \sum_{q=2}^M k^{1-\alpha_q} \sum_{j=1}^{k^{\alpha_q}-1} j < (2 + 3c) \sum_{q=2}^M k^{1+\alpha_q} \tag{40}
 \end{aligned}$$

Из каждой вершины β_j^M , $j = 1, \dots, k^{\alpha_1+\dots+\alpha_M}$, исходит по одному ребру, следовательно, суммарное число ребер, исходящих из вершин β_j^M , равно

$$Q_4 = k^{\alpha_1+\dots+\alpha_M} = k. \tag{41}$$

Исходя из (37), положим

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_M = 1/M. \quad (42)$$

Согласно (34) и (42)

$$\begin{aligned} Q(U_M) &= \frac{3+c}{2} \sum_{q=1}^M k^{(q+1)/M} + \mathcal{O}(k) = \frac{3+c}{2} k^{1+1/M} \sum_{q=1}^M k^{-q/M} + \mathcal{O}(k) \\ &= \frac{3+c}{2} k^{1+1/M} \frac{1-k^{-1}}{1-k^{-1/M}} + \mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(k^{1+1/M}). \end{aligned} \quad (43)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n d^i(i+1) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n d^j \\ &= \sum_{i=0}^n d^i \frac{1-d^{n-i+1}}{1-d} = \frac{1}{1-d} \sum_{i=0}^n (d^i - d^{n+1}) \\ &= \frac{1}{(1-d)^2} (1 - (n+2)d^{n+1} + (n+1)d^{n+2}), \end{aligned}$$

при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 1/M$ согласно (38)

$$\begin{aligned} Q_{12} &< 3c \log_2 k \sum_{q=1}^M k^{(q+1)/M} \left(1 - \frac{q-1}{m}\right) \\ &= \frac{3c}{M} k^{1+1/M} \log_2 k \sum_{q=1}^M k^{(q-M)/M} (M-q+1) \\ &= \frac{3c}{M} k^{1+1/M} \log_2 k \sum_{q=0}^{M-1} k^{-q/M} (q+1) \\ &= \frac{3c}{M} k^{1+1/M} \frac{\log_2 k}{(1-k^{-1/M})^2} (1 - (M+1)k^{-1} + M k^{-M-1/M}) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{M} k^{1+1/M} \ln k\right). \end{aligned} \quad (44)$$

Таким образом, согласно (43), (36), (37), (44), (39), (40), (41) получим, что

$$\begin{aligned} Q(U) &= Q(U_M) + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 \\ &\leq \frac{2}{3} M k^{1+2/M} + \mathcal{O}\left(M k^{1+1/M} + \frac{\ln k}{M} k^{1+1/M}\right). \end{aligned}$$

7. Сложность информационного графа

Если X — множество запросов с заданным на нем вероятностным пространством $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, $\mathcal{F}$ — базовое множество функций, определенных на X , U — ИГ над $\mathcal{F}$, β — вершина ИГ U , то сложностью вершины β называется число $\mathbf{P}(N_{\varphi\beta})$, сложностью

предикатного ребра (β, α) называется число $\mathbf{P}(N_{\varphi_\beta})$, то есть сложность начала ребра, сложностью переключательного ребра (β, α) называется число $\mathbf{P}(N_{\varphi_\beta})/\psi_\beta$, где, напомним, ψ_β — количество ребер, исходящих из вершины β .

Как показано в [27], сложность ИГ равна сумме сложностей ребер ИГ.

Прежде чем вычислять сложность ИГ U^* , докажем одно вспомогательное утверждение.

Пусть β — вершина некоторого ИГ U . Скажем что подграф U' графа U является зависимым от β , если он содержит вершину β , является связным, состоит только из таких вершин α ИГ U , что любая цепь, ведущая из корня ИГ U в вершину α , проходит через вершину β и содержит все ребра ИГ U , исходящие из вершин U' .

Так, например, если вершина β является корнем связного ИГ U , то ИГ U будет зависимым от β . А для произвольной вершины β любой зависимый от β граф, по крайней мере, содержит все ребра, исходящие из вершины β .

Договоримся через $\mathbf{P}(A | B)$ обозначать условную вероятность события A при условии осуществления события B .

Пусть X — множество запросов с заданным на нем вероятностным пространством $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$. Пусть $X' \in \sigma$. Вероятностным пространством, порожденным множеством X' , назовем вероятностное пространство $\langle X', \sigma', \mathbf{P}' \rangle$, где $\sigma' = \{B \in \sigma : B \subseteq X'\}$, $\mathbf{P}'$ — такая вероятностная мера на σ' , что $\mathbf{P}'(B) = \mathbf{P}(B | X')$ для любого $B \in \sigma'$.

Лемма 1. Пусть β — вершина некоторого ИГ U над базовым множеством, функции которого определены на множестве запросов X , $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$ — вероятностное пространство над X , $X' = N_{\varphi_\beta}$, $\langle X', \sigma', \mathbf{P}' \rangle$ — вероятностное пространство, порожденное множеством X' , U' — зависимый от β подграф ИГ U , T' — сложность ИГ U' (как отдельного ИГ с корнем в вершине β) для вероятностного пространства $\langle X', \sigma', \mathbf{P}' \rangle$. Тогда сложность U' как подграфа ИГ U для вероятностного пространства $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$ равна $T(U') = \mathbf{P}(X')T'$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину α подграфа U' . Из определения зависимого подграфа следует, что $N_{\varphi_\alpha} \subseteq N_{\varphi_\beta} = X'$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(N_{\varphi_\alpha}) = \mathbf{P}(N_{\varphi_\alpha} \cap X') = \mathbf{P}(X')\mathbf{P}(N_{\varphi_\alpha} | X') = \mathbf{P}(X')\mathbf{P}'(N_{\varphi_\alpha}).$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Вычислим сложность ИГ U^* .

Пусть β — некоторая вершина ИГ U^* . Чтобы сократить этажность формул, договоримся обозначать $N(\beta) = N_{\varphi_\beta}$.

Введем следующие множества вершин ИГ U^* :

$$\mathcal{R}_1 = \{\theta_i : i = 1, 2, \dots, k^{1/M}\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{\theta''_i : i = 1, 2, \dots, k^{1/M}\},$$

$$\mathcal{R}_3 = \{\theta_{ij} : i = 1, 2, \dots, k^{1/M} - 1, j = i + 1, \dots, k^{1/M}\},$$

$$\mathcal{R}_4^q = \{\theta_{qij} : i = 2, \dots, k^{(q-1)/M} + 1, j = 1, \dots, k^{1/M} - 1\}, \quad q = 2, \dots, M,$$

$$\mathcal{R}^4 = \bigcup_{q=2}^M \mathcal{R}_4^q.$$

Обозначим через T_q , $q = 1, 2, \dots, M$, суммарную сложность ребер ИГ U_q за исключением ребер, исходящих из вершин множества $\mathcal{B}_4$. Через $\widehat{T}_q(\tilde{x})$, $q = 1, 2, \dots, M$, обозначим сложность ИГ U_q на запросе $\tilde{x}$ минус количество вычисленных переключателей, приписанных вершинам из множества $\mathcal{B}_4$.

Покажем по индукции, что

$$T_q \leq 6q, \quad \widehat{T}_q(\tilde{x}) \leq 6q + \frac{2q}{M} \log_2 k$$

для любого $\tilde{x} \in X_{\text{int } 2}$.

Пусть $q = 1$. Из соотношений (15), (26), (27) легко получаем следующие утверждения:

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathcal{B}_i (\beta_1 \neq \beta_2 \Rightarrow N(\beta_1) \cap N(\beta_2) = \emptyset), \quad i = 1, 2, 3. \quad (45)$$

Из корня ИГ U^* растет ИГ $U_{\mathcal{N}^1, 0, 1}^1$, сложность которого оценивается соотношением (16), вершинам θ_i приписаны переключатели $g_{\theta_i}^4$, из вершин θ_i'' исходят ИГ $U_{Z^{1,i}, l_i^1, 1}^2$, зависящие от θ_i'' и сложность которых оценивается соотношением (17), а из вершин θ_{ij} исходят ребра с предикатом тождественная 1, поэтому с учетом (45) согласно лемме 1

$$T_1 = 2 + \sum_{\beta \in \mathcal{B}_1} \mathbf{P}(N(\beta)) + \sum_{\beta \in \mathcal{B}_2} 2\mathbf{P}(N(\beta)) + \sum_{\beta \in \mathcal{B}_3} \mathbf{P}(N(\beta)) \leq 6,$$

и для любого $\tilde{x} \in X_{\text{int } 2}$

$$\widehat{T}_1(\tilde{x}) \leq 1 + \lceil \log_2(k^{1/M} + 1) \rceil + 1 + 1 + \lceil \log_2(k^{1/M} + 1) \rceil + 1 \leq 6 + \frac{2}{M} \log_2 k.$$

Рассмотрим индуктивный переход. Пусть $q \in \{2, \dots, M\}$ и утверждение индукции выполняется для $q - 1$. Введем обозначения

$$\mathcal{B}_5^q = \{\vartheta_i^{q-1} : i = 2, \dots, k^{(q-1)/M}\} \cup \{\gamma_i^{q-1} : i = 2, \dots, k^{(q-1)/M} + 1\},$$

$$\mathcal{B}_6^q = \{\beta_i^{q-1} : i = 1, \dots, k^{(q-1)/M}\}$$

$$\cup \{\theta_{qij}'' : i = 2, \dots, k^{(q-1)/M} + 1, j = 1, \dots, k^{1/M} - 1\},$$

$$\mathcal{B}_7^q = \{\tau_{qij}' : i = 2, \dots, k^{(q-1)/M}, j = 1, \dots, k^{1/M}\}$$

$$\cup \{\theta_{qij}'' : i = 2, \dots, k^{(q-1)/M} + 1, j = 1, \dots, k^{1/M} - 1\},$$

$$\mathcal{B}_8^q = \{\tau_{qij}'' : i = 1, \dots, k^{(q-1)/M}, j = 1, \dots, k^{1/M}\}$$

$$\cup \{\mu_{ijt}^q : i = 2, \dots, k^{(q-1)/M} + 1, j = 1, \dots, k^{1/M} - 1, t = j + 1, \dots, k^{1/M}\}.$$

Из соотношений (20), (21), (22), (28), (29), (31), (32) легко получаем следующие утверждения:

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathcal{B}_i^q (\beta_1 \neq \beta_2 \Rightarrow N(\beta_1) \cap N(\beta_2) = \emptyset), \quad i = 5, 6, 7, 8. \quad (46)$$

Из вершин ϑ_i^{q-1} и γ_i^{q-1} исходят зависящие от этих вершин ИГ $U_{\mathcal{N}_{i-1}^q, l_{i-1}^{q-1}, l_i^{q-1}}^1$, сложность которых оценивается соотношением (16), из вершин β_i^{q-1} исходят ИГ

$U_{N_i^q, l_i^{q-1}, l_{i+1}^{q-1}}^2$, а из вершин θ_{qij}'' — ИГ $U_{Z_{i-1}^{q,j}, l_{(i-2)k^{\alpha_q+j+1}}^q, l_i^{q-1}}^2$, сложность которых оценивается соотношением (17) и которые зависят от своих корневых вершин, из каждой вершины из множества $\mathfrak{B}_7^q$ исходит ребро с предикатом тождественная 1, ведущее в вершины ϑ_i^q , а из каждой вершины из множества $\mathfrak{B}_8^q$ исходит ребро с предикатом тождественная 1, ведущее в вершины β_i^q , поэтому с учетом (46) согласно лемме 1

$$T_q = T_{q-1} + \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_5^q} 2\mathbf{P}(N(\beta)) + \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_6^q} 2\mathbf{P}(N(\beta)) + \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_7^q} \mathbf{P}(N(\beta)) + \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_8^q} \mathbf{P}(N(\beta)) \leq 6(q-1) + 6 = 6q,$$

и для любого $\tilde{x} \in X_{\text{int } 2}$

$$\begin{aligned} \widehat{T}_q(\tilde{x}) &\leq \widehat{T}_{q-1}(\tilde{x}) + 1 + \lceil \log_2(k^{1/M} + 1) \rceil + 1 + \lceil \log_2(k^{1/M} + 1) \rceil + 1 + 1 \\ &\leq 6q + \frac{2q}{M} \log_2 k. \end{aligned}$$

При $q = M$ нам надо делать на одно вычисление меньше, так как в ИГ U_M нет вершин типа ϑ_i^M , то есть

$$T_M \leq 6M - 1, \quad \widehat{T}_M(\tilde{x}) \leq 6M - 1 + 2 \log_2 k$$

для любого $\tilde{x} \in X_{\text{int } 2}$.

Введем обозначения

$$\mathfrak{B}_9^1 = \{\delta_{1ij}^1: i = 1, \dots, k^{1/M} - 1, j = i + 1, \dots, k^{1/M}\},$$

$$\mathfrak{B}_9^q = \{\delta_{sij}^q: s = 1, \dots, k^{(q-1)/M}, i = 2, \dots, k^{1/M} - 1, j = i + 1, \dots, k^{1/M}\},$$

$$q = 2, \dots, M,$$

$$\mathfrak{B}_{10}^q = \{\eta_{ij}^q: i = 2, \dots, k^{(q-1)/M}, j = 1, \dots, k^{1/M} - 1\}, \quad q = 2, \dots, M,$$

$$\mathfrak{B}_{11}^q = \{\zeta_{ij}^q: i = 1, \dots, k^{(q-1)/M}, j = 2, \dots, k^{1/M} - 1\}, \quad q = 2, \dots, M,$$

$$\mathfrak{B}_9 = \bigcup_{q=1}^M \mathfrak{B}_9^q,$$

$$\mathfrak{B}_{10} = \bigcup_{q=2}^M \mathfrak{B}_{10}^q,$$

$$\mathfrak{B}_{11} = \bigcup_{q=2}^M \mathfrak{B}_{11}^q,$$

$$\mathfrak{B}_{12} = \{\beta_i^M: i = 1, \dots, k\},$$

$$\mathfrak{B}_{13} = \mathfrak{B}_9 \cup \mathfrak{B}_{10} \cup \mathfrak{B}_{11}.$$

С помощью (21), (23), (24), (25), (30) непосредственно проверяется справедливость следующих утверждений:

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{B}_9 \cup \mathfrak{B}_{12} (\beta_1 \neq \beta_2 \Rightarrow N(\beta_1) \cap N(\beta_2) = \emptyset), \quad (47)$$

$$\forall q \in \{2, \dots, M\} (\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{B}_i^q \cup \mathfrak{B}_4^q (\beta_1 \neq \beta_2 \Rightarrow N(\beta_1) \cap N(\beta_2) = \emptyset)), \quad i = 10, 11, \quad (48)$$

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{B}_{13} (\beta_1 \neq \beta_2 \Rightarrow (N(\beta_1) \cap N(\beta_2) = \emptyset \vee A_{\beta_1} \cap A_{\beta_2} = \emptyset)).$$

Пусть $\beta \in \mathfrak{B}_{13}$, тогда для некоторых q, s, i, j из вершины β исходит ИГ $U_{A_{sij}^q}^3$, зависящий от вершины β . Положим

$$A_\beta = \{(y_p^1, y_p^2) \in V : l_{(s-1)k^{\alpha_q}+i}^q \leq y_p^1 < l_{(s-1)k^{\alpha_q}+j}^q\}.$$

Согласно лемме 1 и (18) для данной вершины β

$$\begin{aligned} T(U_{A_{sij}^q}^3) &= \mathbf{P}(N(\beta)) \left(5 + \sum_{y \in A_{sij}^q} \mathbf{P}'(O(y, \rho_{\text{int}})) \right) \\ &= 5\mathbf{P}(N(\beta)) + \sum_{\tilde{y} \in A_\beta} \mathbf{P}(O(\tilde{y}, \rho_{\text{int}2}) \cap N(\beta)). \end{aligned}$$

Учитывая, что при попадании в вершину из $\mathfrak{B}_{12}$ вычисляется один предикат, приписанный ребру, исходящему из этой вершины, а при попадании в вершину из $\mathfrak{B}_4$ вычисляется один переключатель, приписанный этой вершине, находим, что

$$\begin{aligned} T(U^*) &\leq T_M + \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_4} \mathbf{P}(N(\beta)) + \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_{12}} \mathbf{P}(N(\beta)) \\ &\quad + \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_{13}} \left(5\mathbf{P}(N(\beta)) + \sum_{\tilde{y} \in A_\beta} \mathbf{P}(O(\tilde{y}, \rho_{\text{int}2}) \cap N(\beta)) \right) \\ &\leq T_M + 5 \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_9 \cup \mathfrak{B}_{12}} \mathbf{P}(N(\beta)) + 5 \sum_{q=2}^M \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_4^q \cup \mathfrak{B}_{10}^q} \mathbf{P}(N(\beta)) \\ &\quad + 5 \sum_{q=2}^M \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_{11}^q} \mathbf{P}(N(\beta)) + \sum_{\tilde{y} \in V} \sum_{\beta \in \mathfrak{B}_{13} : \tilde{y} \in A_\beta} \mathbf{P}(O(\tilde{y}, \rho_{\text{int}2}) \cap N(\beta)) \\ &\leq 16M - 6 + \sum_{\tilde{y} \in V} \mathbf{P}(O(\tilde{y}, \rho_{\text{int}2})). \end{aligned}$$

Согласно (47) для любого запроса мы можем попасть не более чем в одну вершину из $\mathfrak{B}_9 \cup \mathfrak{B}_{12}$, следовательно, при этом мы в худшем случае выполним $2 + \log_2 k$ вычислений плюс перечисление ответа. Согласно (48) для каждого $q = 2, \dots, M$ и любого запроса мы можем попасть не более чем в одну вершину из $\mathfrak{B}_4 \cup \mathfrak{B}_{10}$ и не более чем в одну вершину из $\mathfrak{B}_{11}$ и в каждом из этих случаев мы выполним не более чем $2 + (1/M) \log_2 k$ вычислений плюс перечисление ответа. Тем самым для любого запроса $\tilde{x} \in X_{\text{int}2}$

$$\begin{aligned} T(U^*, x) &\leq \hat{T}_M + 2 + \log_2 k + 4(M-1) + \frac{M-1}{m} \log_2 k |\{\tilde{y} \in V : \tilde{x} \rho_{\text{int}2} \tilde{y}\}| \\ &< 10M + 4 \log_2 k + |\{\tilde{y} \in V : \tilde{x} \rho_{\text{int}2} \tilde{y}\}|. \end{aligned}$$

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

1. Ли Д., Препарата Ф., Вычислительная геометрия. Обзор. *Киберн. сб.* (1987) **24**, 5–96.
2. Кнут Д., *Искусство программирования для ЭВМ. Сортировка и поиск*, т. 3. Мир, Москва, 1978.
3. Loftsgaarden D. O., Queensberry C. P., A nonparametric density function. *Ann. Math. Stat.* (1965) **36**, 1049–1051.
4. Lauter U., 4-dimensional binary search trees as a means to speed up associative searches in design verification of integrated circuits. *J. Design Automation and Fault Tolerant Computing* (1978) **2**, 241–247.
5. Гасанов Э. Э., Мгновенно решаемые задачи поиска. *Дискретная математика* (1996) **8**, № 3, 119–134.
6. Препарата Ф., Шеймос М., *Вычислительная геометрия. Введение*. Мир, Москва, 1989.
7. Bentley J. L., Multidimensional binary search trees used for associative searching. *Commun. Ass. Comput. Mach.* (1975) **18**, 509–517.
8. Bentley J. L., Decomposable searching problems. *Inform. Processing Letters* (1979) **8**, 244–251.
9. Bentley J. L., Friedman J. H., Data structures for range searching. *Comput. Surveys* (1979) **11**, 397–409.
10. Bentley J. L., Maurer H. A., Efficient worst-case data structures for range searching. *Acta Informatica* (1980) **13**, 155–168.
11. Bentley J. L., Shamos M. I., A problem in multivariate statistics: algorithms, data structure and applications. *Proc. 15th Allerton Conf. Commun., Contr., Comput.* 1977, 193–201.
12. Bentley J. L., Stanat D. F., Analysis of range searching in quad trees. *Inform. Processing Letters* (1975) **3**, 170–173.
13. Bolour A., Optimal retrieval algorithms for small region queries. *SIAM J. Comput.* (1981) **10**, 721–741.
14. Chazelle B. M., Filtering search: a new approach to query-answering. *Proc. 24th IEEE Annual Symp. Found. Computer Sci.* 1983, 122–132.
15. Fredman M. L., A lower bound of the complexity of ortogonal range queries. *J. ACM.* (1981) **28**, 696–705.
16. Gabow H. N., Bentley J. L., Tarjan R. E., Scaling and related techniques for geometry problems. *Proc. 16th ACM Annual Symp. Theory Comput.* 1984, 135–143.
17. Lee D. T., Wong C. K., Worst case analysis for region and partial region searches in multi-dimensional binary search trees and balanced quad trees. *Acta Informatica* (1977) **9**, 23–29.
18. Lee D. T., Wong C. K., Quintari trees: a file structures for multidimensional database system. *ACM Trans. Database Syst.* (1980) **1**, №1, 339–353.
19. Lueker G. S., A data structure for ortogonal range queries. *Proc. 19th Annual IEEE Symp. Found. Computer Sci.* (1978), 28–34.
20. Lueker G. S., Willard D. E., A data structure for dynamic range queries. *Inform. Processing Letters* (1982) **15**, №5, 209–213.
21. Saxe J. B., On the number of range queries in k -space. *Discr. Appl. Math.* (1979) **1**, 217–225.
22. Willard D. E. *Predicate-oriented database search algorithms*. Ph. D. Dissertation, Harvard Univ., Cambridge, MA, 1978.

23. Gasanov E. E., Kuznetsova I. V., On one method to decrease average search time. *Abstr. First Turkish World Math. Symp.* Elazig, Turkey, 1999, 135.
24. Абдул Саттар А. В., Функциональная мера сложности вычислений в автоматных схемах. Автореферат диссер. канд. физико-матем. наук. МГУ, Москва, 1994.
25. Гасанов Э. Э., Кузнецова И. В., Оценки функциональной сложности двумерной задачи интервального поиска. *Тезисы докл. XII Международной конф. "Пробл. теоретич. киберн."*, Нижний Новгород, 1999, 47.
26. Гасанов Э. Э., Информационно-графовая модель хранения и поиска данных. *Интеллект. системы* (1998) 3, №3-4, 163-192.
27. Гасанов Э. Э., *Функционально-сетевые базы данных и сверхбыстрые алгоритмы поиска*. Изд. центр РГГУ, Москва, 1997.

Статья поступила 18.01.2001.