Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Грушо, Е. Л. Шумицкая, Модель невлиния и скрытые каналы, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 1, 11–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:00:10

Модель невлияния и скрытые каналы

© 2002 г. А. А. Грушо, Е. Л. Шумицкая

В статье рассматриваются математические модели безопасных систем, а именно, традиционная модель невлияния и модель невлияния по вероятности. Доказано, что система может удовлетворять условиям традиционной модели невлияния, но при этом существует скрытый канал с верхнего уровня на нижний. Найдено достаточное условие отсутствия в автоматной модели системы скрытых каналов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00895.

Будем считать, что теоретико-автоматные модели достаточно хорошо отражают исследуемые свойства в реальных системах. Пусть компьютерная система моделируется абстрактным автоматом $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, где X, S, Y — конечные непустые множества, соответственно, входной алфавит, множество состояний и выходной алфавит, $\delta: X \times A \rightarrow S$ — функция переходов, $\lambda: X \times A \rightarrow Y$ — функция выходов.

Будем рассматривать следующую автоматную модель двухуровневой компьютерной системы.

Пусть $X = X_H \times X_L$, где X_H и X_L — множества входов для пользователей уровней H (High) и L (Low), соответственно. Далее везде будем предполагать, что имеется только один пользователь каждого уровня, и называть их H и L , соответственно. Аналогично, пусть $S = S_H \times S_L$, $Y = Y_H \times Y_L$. Будем считать, что множества X_H, X_L, Y_H, Y_L могут содержать среди своих элементов пустое слово, которое мы будем обозначать e .

Определение 1. Пусть $s^1, s^2 \in S$. Определим отношение эквивалентности $\sim$, полагая $s^1 \sim s^2$, если $s_L^1 = s_L^2$. Обозначим $S/\sim$ фактор-множество относительно отношения $\sim$, класс эквивалентности, содержащий s , будем обозначать $[s]$, $s \in S$.

Аналогично определим отношение эквивалентности на множестве выходов Y .

Определение 2. Пусть $y^1, y^2 \in Y$. Определим отношение эквивалентности $\sim$, полагая $y^1 \sim y^2$, если $y_L^1 = y_L^2$. Элементы фактор-множества $Y/\sim$ будем обозначать $[y]$.

В силу различия контекстов путаницы с одинаковым обозначением отношения эквивалентности не возникнет.

Рассмотрим простейшую теоретико-вероятностную модель невлияния. Заметим, что некоторые наши определения несколько отличаются от традиционных [1], мы будем говорить о невидимости верхнего уровня с нижнего уровня. Однако по сути эта модель близка к модели невлияния [1].

Определение 3. Будем говорить, что L не видит H , если функция

$$\tilde{\delta}: X_L \times S/\sim \rightarrow S/\sim,$$

определяемая формулой

$$\tilde{\delta}(x_L, [s]) = [\delta((x_H, x_L), s')], \quad x_H \in X_H, \quad s' \in [s],$$

и функция $\tilde{\lambda}: X_L \times S/\sim \rightarrow Y/\sim$, определяемая формулой

$$\tilde{\lambda}(x_L, [s]) = [\lambda((x_H, x_L), s')], \quad x_H \in X_H, \quad s' \in [s],$$

корректно определены.

Система, удовлетворяющая определению 3, традиционно считается безопасной.

Лемма 1. Пусть L не видит H и фиксированы $y_L^0 \in Y_L$, и $s_L^0 \in S_L$. Тогда для всех $x'_H, x''_H \in X_H$ и всех $s'_H, s''_H \in S_H$

$$\begin{aligned} \{x_L \in X_L: \lambda((x'_H, x_L), (s'_H, s_L^0)) = (y_H, y_L^0), y_H \in Y_H\} \\ = \{x_L \in X_L: \lambda((x''_H, x_L), (s''_H, s_L^0)) = (y_H, y_L^0), y_H \in Y_H\}, \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство. Так как L не видит H , функция $\tilde{\lambda}$ корректно определена. Это значит, что если для некоторого $x'_L \in X_L$

$$\lambda((x_H, x'_L), (s_H, s_L^0)) = (y_H, y_L^0),$$

для некоторых $x_H \in X_H, s_H \in S_H, y_H \in Y_H$, то для всех $x'_H \in X_H$ и $s'_H \in S_H$ существует $y_H \in Y_H$ такое, что

$$\lambda((x'_H, x'_L), (s'_H, s_L^0)) = (y_H, y_L^0).$$

В рассматриваемых множествах y_H пробегает все свои значения, поэтому лемма доказана.

Следствие 1. Пусть L не видит H . Тогда для любых фиксированных $y_L^0 \in Y_L, s_L^0 \in S_L$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \{(x_H, x_L) \in X: \lambda((x_H, x_L), (s'_H, s_L^0)) = (y_H, y_L^0), y_H \in Y_H\} \\ = \{(x_H, x_L) \in X: \lambda((x_H, x_L), (s''_H, s_L^0)) = (y_H, y_L^0), y_H \in Y_H\} \end{aligned} \quad (2)$$

для всех $s'_H, s''_H \in S_H$.

Утверждение непосредственно следует из леммы.

Хотя пользователю L неизвестно сообщение x_H , ему может быть известна статистическая связь между входными сообщениями x_L и x_H или известно априорное совместное распределение векторов (x_L, x_H) . В этих случаях возможен скрытый канал с верхнего уровня на нижний. Чтобы доказать существование скрытого канала, определим невидимость в статистическом смысле.

Пусть на множестве $X = X_H \times X_L$ задано вероятностное распределение $\mathbf{P}$. Для простоты будем считать, что в X нет таких элементов, вероятность которых равна

нулю. Распределение $\mathbf{P}$ индуцирует на множествах X_H и X_L распределения вероятностей $\mathbf{P}_H$ и $\mathbf{P}_L$:

$$\mathbf{P}_H\{x_H\} = \mathbf{P}(\{(x_H, x_L): x_L \in X_L\}) = \sum_{x_L \in X_L} \mathbf{P}(x_H, x_L), \quad (3)$$

$$\mathbf{P}_L\{x_L\} = \mathbf{P}(\{(x_H, x_L): x_H \in X_H\}) = \sum_{x_H \in X_H} \mathbf{P}(x_H, x_L). \quad (4)$$

С помощью функции λ при каждом фиксированном состоянии s распределение $\mathbf{P}$ индуцирует на Y распределение вероятностей $\mathbf{Q}^s$ такое, что

$$\mathbf{Q}^s(y) = \mathbf{P}\{x \in X: \lambda(x, s) = y\}.$$

Аналогично формуле (4) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_L^s\{y_L\} &= \mathbf{Q}^s(\{(y_H, y_L): y_H \in Y_H\}) \\ &= \sum_{y_H \in Y_H} \mathbf{Q}^s(y_H, y_L) = \sum_{y_H \in Y_H} \mathbf{P}\{x \in X: \lambda(x, s) = (y_H, y_L)\} \\ &= \mathbf{P}\{x \in X: \lambda(x, s) = (y_H, y_L), y_H \in Y_H\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Лемма 2. Пусть L не видит H в смысле определения 3. Тогда для любых двух эквивалентных состояний распределения вероятностей на Y_L совпадают, то есть для всех $y_L \in Y_L$ и $s^1 \sim s^2$

$$\mathbf{Q}_L^{s^1}\{y_L\} = \mathbf{Q}_L^{s^2}\{y_L\}.$$

Доказательство. Так как $s^1 \sim s^2$, их L -компоненты совпадают. По формуле (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_L^{s^1}\{y_L\} &= \mathbf{P}\{(x_H, x_L) \in X: \lambda((x_H, x_L), (s_H^1, s_L)) = (y_H, y_L), y_H \in Y_H\}, \\ \mathbf{Q}_L^{s^2}\{y_L\} &= \mathbf{P}\{(x_H, x_L) \in X: \lambda((x_H, x_L), (s_H^2, s_L)) = (y_H, y_L), y_H \in Y_H\}. \end{aligned}$$

А так как L не видит H , по следствию 1

$$\begin{aligned} \{(x_H, x_L) \in X: \lambda((x_H, x_L), (s_H^1, s_L)) = (y_H, y_L), y_H \in Y_H\} \\ = \{(x_H, x_L) \in X: \lambda((x_H, x_L), (s_H^2, s_L)) = (y_H, y_L), y_H \in Y_H\} \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{Q}_L^{s^1}\{y_L\} = \mathbf{Q}_L^{s^2}\{y_L\}$. Лемма доказана.

Далее определим совместную вероятность на $X_H \times Y_L$ при каждом состоянии $s \in S$, по формуле

$$\mathbf{P}^s(x_H^0, y_L^0) = \mathbf{P}\{(x_H^0, x_L): x_L \in X_L, \lambda((x_H^0, x_L), s) = (y_H, y_L), y_H \in Y_H\}. \quad (6)$$

Пользуясь этой совместной вероятностью, условную вероятность можно записать в виде

$$\mathbf{P}^s(y_L | x_H) = \frac{\mathbf{P}^s(x_H, y_L)}{\mathbf{P}_H(x_H)}. \quad (7)$$

Лемма 3. Пусть L не видит H . Тогда для любых двух эквивалентных состояний условные распределения, определяемые формулой (7), совпадают, то есть

$$\mathbf{P}^{s^1}(y_L/x_H) = \mathbf{P}^{s^2}(y_L/x_H), \quad y_L \in Y_L, \quad x_H \in X_H, \quad s^1 \sim s^2.$$

Доказательство. Так как $s^1 \sim s^2$, их L -компоненты совпадают. По формуле (6)

$$\mathbf{P}^{s^1}(x_H, y_L) = \mathbf{P}\{(x_H, x_L): x_L \in X_L, \lambda((x_H, x_L), (s_H^1, s_L)) = (y_H, y_L), y_H \in Y_H\},$$

$$\mathbf{P}^{s^2}(x_H, y_L) = \mathbf{P}\{(x_H, x_L): x_L \in X_L, \lambda((x_H, x_L), (s_H^2, s_L)) = (y_H, y_L), y_H \in Y_H\}.$$

А так как L не видит H , по лемме 1 множества под знаком вероятности совпадают, то есть

$$\mathbf{P}^{s^1}(x_H, y_L) = \mathbf{P}^{s^2}(x_H, y_L).$$

Теперь, применяя формулу (7), получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

Определение 4. Пусть L не видит H . Будем говорить, что L не видит H по вероятности, если для всех $x_H \in X_H, y_L \in Y_L, [s] \in S/\sim$

$$\mathbf{P}^{s'}(y_L/x_H) = \mathbf{Q}^{s''}(y_L), \quad s', s'' \in [s].$$

Корректность этого определения следует из лемм 2 и 3.

Теперь на простом примере покажем, что невидимости в смысле определения 3 недостаточно для невидимости по вероятности.

Пример 1. Пусть $X_H = X_L = \{0, 1, e\}$, где e — пустое слово, $S_H = \{s_H^1, s_H^2\}$, $S_L = \{s_L^1, s_L^2\}$, $Y_H = Y_L = \{0, 1, e\}$. Распределение вероятностей зададим следующим образом:

$\{x_H, x_L\}$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(0, e)	(e, 0)	(1, e)	(1, e)	(e, e)
$\mathbf{P}(x_H, x_L)$	1/9	1/9	1/18	1/6	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9

Тогда на множестве X_H, X_L получаем вероятности $\{1/3, 1/3, 1/3\}$ и $\{5/18, 7/18, 1/3\}$ соответственно. Заметим, что распределения вероятностей на X_H, X_L являются зависимыми, так как, например,

$$\frac{1}{18} = \mathbf{P}(1, 0) \neq \mathbf{P}_H(1)\mathbf{P}_L(0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{18}.$$

Функцию δ зададим так, чтобы выполнялось первое условие определения 3. Функцию $\lambda((x_H, x_L), (s_H, s_L)) = (y_H, y_L)$ зададим таблицей

(x_H, x_L)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(0, e)	(e, 0)	(1, e)	(e, 1)	(e, e)
(s_H^1, s_L^1)	(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(0, e)	(e, 0)	(1, e)	(e, 0)	(e, e)
(s_H^1, s_L^2)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 0)	(0, e)	(e, 1)	(1, e)	(e, 0)	(e, e)
(s_H^2, s_L^1)	(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(1, e)	(e, 0)	(0, e)	(e, 0)	(e, e)
(s_H^2, s_L^2)	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 0)	(1, e)	(e, 1)	(0, e)	(e, 0)	(e, e)

Из нее видно, что если фиксированы вход $x_L \in X_L$ и состояние $s_L \in S_L$, то выход y_L не меняется при любых $x_H \in X_H$ и $s_H \in S_H$, то есть выполнено второе условие определения 3. Таким образом, учитывая, как мы выбрали функцию δ , видим, что пользователь L не видит H .

Теперь найдем распределения вероятностей

$$\mathbf{Q}_L^{s_L}(y_L) = \mathbf{Q}_L^{s'_L}(y_L), \quad s' = (s_H, s_L), \quad s_H \in S_H,$$

и условные вероятности $\mathbf{P}^s(y_L | x_H)$. Пользуясь таблицей, формулами (5), (7), (6), а также леммами 1, 2, 3 и следствием 1, находим, что

$$\mathbf{Q}_L^{s_L^1}(0) = \mathbf{P}(\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (e, 0), (e, 1)\}) = 2/3,$$

$$\mathbf{Q}_L^{s_L^1}(1) = \mathbf{P}(\{\emptyset\}) = 0,$$

$$\mathbf{Q}_L^{s_L^1}(e) = \mathbf{P}(\{(0, e), (1, e), (e, e)\}) = 1/3,$$

$$\mathbf{Q}_L^{s_L^2}(0) = \mathbf{P}(\{(0, 1), (1, 1), (e, 1)\}) = 7/18,$$

$$\mathbf{Q}_L^{s_L^2}(1) = \mathbf{P}(\{(0, 0), (1, 0), (e, 0)\}) = 5/18,$$

$$\mathbf{Q}_L^{s_L^2}(e) = \mathbf{P}(\{(0, e), (1, e), (e, e)\}) = 1/3.$$

Совместную вероятность $\mathbf{P}^s(x_H, y_L)$ задает таблица

(x_H, y_L)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(0, e)	(e, 0)	(1, e)	(e, 1)	(e, e)
(s_H^1, s_L^1)	2/9	0	2/9	0	1/9	2/9	1/9	0	1/9
(s_H^1, s_L^2)	1/9	1/9	1/6	1/18	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
(s_H^2, s_L^1)	2/9	0	2/9	0	1/9	2/9	1/9	0	1/9
(s_H^2, s_L^2)	1/9	1/9	1/6	1/18	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9

Условные вероятности можно найти по формуле

$$\mathbf{P}^{s_L}(y_L | x_H) = \frac{\mathbf{P}^{(s_H, s_L)}(x_H, y_L)}{\mathbf{P}_H(x_H)} = 3\mathbf{P}^{(s_H, s_L)}(x_H, y_L).$$

Из значений $\mathbf{Q}^{s_L}(y_L)$ и $\mathbf{P}^s(x_H, y_L)$, приведенных в предыдущей таблице, видно, что определение 4 невидимости по вероятности выполняется, так как, например,

$$1/2 = \mathbf{P}^{(s_H, s_L^2)}(0/1) \neq \mathbf{Q}_L^{s_L^2}(0) = 7/18,$$

для всех $s_H \in S_H$.

Данный пример показывает, что невидимость в смысле определения 3 не гарантирует невидимости по вероятности.

Легко привести достаточные условия невидимости по вероятности.

Теорема 1. Пусть L не видит H . Тогда для невидимости по вероятности достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{P}(x_H, x_L) = \mathbf{P}_H(x_H)\mathbf{P}(x_L)$$

для всех $x \in X$.

Доказательство. Из определения невидимости следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^s(y_L | x_H) &= \frac{1}{\mathbf{P}_H(x_H)} \mathbf{P}\{(x_H, x_L) \in X : \lambda((x_H, x_L), (s_H^1, s_L)) = (y_H, y_L), y_H \in Y_H\} \\ &= \sum_{(x_H, x_L)} \frac{\mathbf{P}(x_H, x_L)}{\mathbf{P}(x_H)}, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем парам $(x_H, x_L) \in X$ таким, что

$$\lambda((x_H, x_L), (s_H^1, s_L)) = (y_H, y_L), \quad y_H \in Y_H\}.$$

Отсюда в силу независимости получаем, что

$$\mathbf{P}^s(y_L | x_H) = \sum_{y_H \in Y_H} \mathbf{P}\{x \in X: \lambda(x, s) = (y_H, y_L)\} = \mathbf{Q}_L^s(y_L).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Moskowitz I. S., Costich O. L., A classical automata approach to noninterference type problems. *Proc. Computer Security Foundations Workshop 5*. IEEE Press, 1992, 2–8.

Статья поступила 31.08.2001.