Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Кузьмин, О. В. Леонова, Об аналитической сопряженности полиномов Тушара и им квазиортогональных, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 1, 151–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:12:36

Об аналитической сопряженности полиномов Тушара и им квазиортогональных

© 2002 г. О. В. Кузьмин, О. В. Леонова

Рассматриваются полиномы Тушара, являющиеся обобщениями полиномов Белла, и P -полиномы, составляющие с ними квазиортогональную систему. Установлена аналитическая сопряженность полиномов Тушара и P -полиномов, что позволило, в частности, найти для последних ряд новых рекуррентных соотношений.

1. Введение

В связи с изучением некоторых циклических подстановок Тушар в [1] ввел ряд обобщений полиномов Белла. Для одного из таких обобщений $T_{n,k}(x, y)$, названного полиномами Тушара, в [2] получены экспоненциальные производящие функции и рекуррентные соотношения.

В [3, 4] авторами данной публикации изучаются полиномы $T_{n,k}(x, y)$, при этом найдены некоторые свойства, перечислительные интерпретации и вероятностные приложения. В [3] вводятся новые, так называемые P -полиномы, составляющие с полиномами Тушара квазиортогональную систему. Для P -полиномов $P_{n,k}(x, y)$ получено явное выражение, производящие функции и рекуррентные соотношения, построены алгоритм преобразования полиномов Тушара в P -полиномы и ему обратный.

Во втором параграфе статьи приводятся необходимые определения и свойства полиномов Белла и Платонова.

В третьем параграфе приводятся необходимые определения и свойства полиномов Тушара и P -полиномов.

В четвертом параграфе установлена аналитическая сопряженность полиномов Тушара и P -полиномов.

В пятом параграфе получены новые рекуррентные соотношения.

2. Полиномы Белла и Платонова

Однородные полиномы Белла от переменных x_i , $i \geq 1$, которые мы будем обозначать $A_{n,k}(x) = A(n, k; x_1, x_2, \dots)$, $1 \leq k \leq n$, и в дальнейшем называть A -полиномами, впервые рассматривались Беллом. Пусть последовательность аргументов

A -полиномов задана в виде производящей функции

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!}.$$

Производящими функциями A -полиномов являются

$$\sum_{n=k}^{\infty} A_{n,k}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(x(t))^k}{k!}, \quad (1)$$

Из (1) может быть получена явная формула для A -полиномов

$$A_{n,k}(x) = n! \sum_{n,k} \prod_{i=1}^{n-k+1} x_i^{r_i} [r_i! (i!)^{r_i}]^{-1}, \quad (2)$$

где $A_{0,0}(x) = 1$ и суммирование ведется по всем $r_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} r_i = k, \quad \sum_{i=1}^{n-k+1} i r_i = n.$$

Известно [5], что если $F(t) = f(u)$, $u = g(t)$, то

$$A_{k,r}(F) = \sum_{s=r}^k A_{k,s}(g) A_{s,r}(f), \quad 1 \leq r \leq k. \quad (3)$$

С A -полиномами тесно связаны B -полиномы Платонова (см. [5])

$$B_{n,k}(x) = \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)! x_1^{2n-k}} \sum_{\substack{2n-2k \\ n-k}} (-1)^{r_1} r_1! (2n-k-r_1-1)! \prod_{i=1}^{n-k+1} x_i^{r_i} (r_i! (i!)^{r_i})^{-1}, \quad (4)$$

где $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$, $x_1 \neq 0$, $B_{n,n} = x_1^{-n}$ при $n \geq 0$ и суммирование ведется по всем $r_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 2n-2k$ таким, что

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} r_i = n-k, \quad \sum_{i=1}^{n-k+1} i r_i = 2n-2k.$$

Тесная связь A - и B -полиномов объясняется тем, что они двояко, алгебраически и аналитически, сопряжены. Алгебраическая сопряженность определяется взаимной обратностью бесконечных нижних треугольных матриц $\|A_{n,k}(x)\|$ и $\|B_{n,k}(x)\|$. Аналитическая сопряженность выражается системой тождеств

$$A_{n,k}(x) = B_{n,k}(\tilde{x}), \quad (5)$$

где $x(t)$ и $\tilde{x}(u)$ — взаимно-обратные функции, то есть

$$x(\tilde{x}(u)) = u, \quad \tilde{x}(x(t)) = t.$$

Дополнительно полагаем $A_{0,k}(x) = B_{0,k}(x) = \delta_{0,k}$, где $\delta_{n,k}$ — символ Кронекера, $A_{n,k}(x) = B_{n,k}(x) = 0$, если $k \notin \{1, 2, \dots, n\}$.

С учетом соотношения (5) из (1) получаем, что производящими функциями для B -полиномов являются

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(x) \frac{u^n}{n!} = \frac{(\tilde{x}(u))^k}{k!}, \quad (6)$$

Для B -полиномов справедливы рекуррентные соотношения

$$\binom{k}{r} B_{n,k}(x) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{r+i} B_{r+i,r}(x) B_{n-r-i,k-r}(x), \quad 1 \leq r \leq k \leq n, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} B_{n,k}(x) = -\binom{k+i-1}{i} B_{n+1,k+i}(x), \quad k, i \geq 1, \quad k+i \leq n+1, \quad (8)$$

полученные в [6] и [7] соответственно.

3. Полиномы Тушара и P -полиномы

Полиномы от переменных x_i и y_i , $i \geq 1$, которые мы будем обозначать

$$T_{n,k}(x, y) = T_{n,k}(x_1, \dots; y_1, \dots)$$

для $n, k \geq 1$, $k \leq n$, и в дальнейшем называть полиномами Тушара, впервые рассматривались Тушаром в [1]. Производящая функция полиномов Тушара имеет вид

$$\sum_{n=k}^{\infty} T_{n,k}(x, y) \frac{t^n}{n!} = (x(t))^k \frac{e^{y(t)}}{k!}, \quad (9)$$

где

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{t^i}{i!}, \quad y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{t^i}{i!}.$$

Известен явный вид этих полиномов (см., например, [2]):

$$T_{n,k}(x, y) = n! \sum_{(n;k)} \prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i} (r_i! s_i! (i!)^{r_i+s_i})^{-1}, \quad (10)$$

где $T_{0,0}(x, y) = 1$ и суммирование ведется по всем $r_i, s_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^n r_i = k, \quad \sum_{i=1}^n i(r_i + s_i) = n.$$

Непосредственно из (10) следует, что $T_{n,0}(x, y) = Y_n(y)$, где $Y_n(y) = Y_n(y_1, \dots, y_n)$ — известные полиномы Белла, и $T_{n,n}(x, y) = x_1^n = A_{nn}(x)$. Из сопоставления формул (1) и (9) или (2) и (10) видно, что $T_{n,k}(x, 0) = A_{n,k}(x)$.

Для полиномов Тушара справедливы (см. [2]) соотношения

$$k T_{n,k}(x, y) = \sum_{r=k-1}^n \binom{n}{r} x_{n-r} T_{r,k-1}(x, y), \quad (11)$$

$$T_{n,k}(x, y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (x_{i+1} T_{n-i,k-1}(x, y) + y_{i+1} T_{n-i,k}(x, y)). \quad (12)$$

Полиномы Тушара связаны с A - и B -полиномами равенством [3]

$$T_{n,k}(x, y) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} A_{j,k}(x) \sum_{p=0}^{n-j} A_{n-j,p}(y). \quad (13)$$

P -полиномы можно определить, задав их производящую функцию [3]

$$\sum_{n=k}^{\infty} P_{n,k}(x, y) \frac{u^n}{n!} = \frac{(\tilde{x}(u))^k}{k!} e^{-y(\tilde{x}(u))}, \quad k \geq 0. \quad (14)$$

Разлагая в ряд производящую функцию (14) и приравнявая коэффициенты при $u^n/n!$, получаем явную формулу для P -полиномов

$$P_{n,k}(x, y) = \frac{(-1)^{n-k}}{k! x_1^{2n-k}} \sum_{(2n-2k, n-k)} (-1)^{r_1+s_1+s_2+\dots+s_n} r_1! (2n-k-r_1-1)! \\ \times \left(\sum_{i=1}^n i s_i + k \right) \prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i} (r_i! s_i! (i!)^{r_i+s_i})^{-1}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $x_1 \neq 0$, $P_{n,n}(x, y) = x_1^{-n}$, $n \geq 1$ и суммирование ведется по всем $r_i, s_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^n r_i = n - k, \quad \sum_{i=1}^n i(r_i + s_i) = 2n - 2k.$$

Из сопоставления формул (3) и (6) видно, что $P_{n,k}(x, 0) = B_{n,k}(x)$, то есть P -полиномы являются обобщениями для B -полиномов Платонова.

Как показано в [3], P -полиномы выражаются через A - и B -полиномы формулой

$$P_{n,k}(x, y) = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} B_{n,j}(x) \sum_{p=0}^{j-k} (-1)^p A_{j-k,p}(y) \quad (15)$$

и связаны с полиномами Тушара соотношениями квазиортогональности

$$\sum_{i=k}^n T_{n,i}(x, y) P_{i,k}(x, y) = \delta_{n,k}, \\ \sum_{i=k}^n P_{n,i}(x, y) T_{i,k}(x, y) = \delta_{n,k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

4. Аналитическая сопряженность

Теорема 1. Полиномы Тушара и P -полиномы удовлетворяют соотношениям

$$T_{n,k}(\tilde{x}, \bar{y}) = P_{n,k}(x, y), \quad (16)$$

где функции $x(t)$ и $\tilde{x}(u)$ взаимно-обратны, а $\bar{y}(u) = -y(\tilde{x}(u))$.

Доказательство. Используя соотношения (13) и (5), получим

$$\begin{aligned}
 T_{n,k}(\tilde{x}, \bar{y}) &= A_{n,k}(\tilde{x}) + \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n}{j} A_{j,k}(\tilde{x}) \sum_{p=1}^{n-j} A_{n-j,p}(\bar{y}) \\
 &= B_{n,k}(x) + \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n}{j} B_{j,k}(x) \sum_{p=1}^{n-j} A_{n-j,p}(-y(\tilde{x})) \\
 &= B_{n,k}(x) + \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n}{j} B_{j,k}(x) \sum_{p=1}^{n-j} (-1)^p A_{n-j,p}(y(\tilde{x})).
 \end{aligned}$$

Из последнего соотношения с учетом (3) находим, что

$$\begin{aligned}
 T_{n,k}(\tilde{x}, \bar{y}) &= B_{n,k}(x) + \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n}{j} B_{j,k}(x) \sum_{p=1}^{n-j} (-1)^p \sum_{s=p}^{n-j} A_{n-j,s}(\tilde{x}) A_{s,p}(y) \\
 &= B_{n,k}(x) + \sum_{j=k}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-j} \sum_{s=p}^{n-j} \binom{n}{j} B_{j,k}(x) (-1)^p B_{n-j,s}(x) A_{s,p}(y) \\
 &= B_{n,k}(x) + \sum_{p=1}^{n-k} \sum_{s=p}^{n-k} \sum_{j=k}^{n-s} \binom{n}{j} B_{j,k}(x) B_{n-j,s}(x) (-1)^p A_{s,p}(y) \\
 &= B_{n,k}(x) + \sum_{p=1}^{n-k} \sum_{s=p}^{n-k} (-1)^p A_{s,p}(y) \sum_{j=k}^{n-s} \binom{n}{j} B_{j,k}(x) B_{n-j,s}(x).
 \end{aligned}$$

Из последнего равенства и соотношений (7) и (15) получаем, что

$$\begin{aligned}
 T_{n,k}(\tilde{x}, \bar{y}) &= B_{n,k}(x) + \sum_{p=1}^{n-k} \sum_{s=p}^{n-k} (-1)^p A_{s,p}(y) \binom{k+s}{s} B_{n,k+s}(x) \\
 &= B_{n,k}(x) + \sum_{p=1}^{n-k} \sum_{i=p+k}^n (-1)^p A_{i-k,p}(y) \binom{i}{k} B_{n,i}(x) \\
 &= B_{n,k}(x) + \sum_{i=k+1}^n \sum_{p=1}^{i-k} (-1)^p A_{i-k,p}(y) \binom{i}{k} B_{n,i}(x) \\
 &= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} B_{n,i}(x) \sum_{p=0}^{i-k} (-1)^p A_{i-k,p}(y) = P_{n,k}(x, y),
 \end{aligned}$$

что и дает соотношение (16). Теорема доказана.

5. Рекуррентные соотношения

Теорема 2. Для P -полиномов справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} P_{n,k}(x, y) = -\binom{k+i}{k} \left(P_{n+1,k+i}(x, y) - i \tilde{P}_{n+1,k+i}(x, y) \right), \quad (17)$$

где

$$\tilde{P}_{n,k}(x, y) = \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} \binom{j}{k} B_{n,j}(x) \sum_{p=0}^{j-k} (-1)^p A_{j-k,p}(y).$$

Доказательство. Продифференцировав соотношение (15) по x_i , с учетом (8), получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} P_{n,k}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} B_{n,j}(x) \sum_{p=0}^{j-k} (-1)^p A_{j-k,p}(y) \\ &= - \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} \binom{i+j-1}{i} B_{n+1,j+i}(x) \sum_{p=0}^{j-k} (-1)^p A_{j-k,p}(y) \\ &= - \sum_{j=k+i}^{n+i} \binom{j-i}{k} \binom{j-1}{i} B_{n+1,j}(x) \sum_{p=0}^{j-i-k} (-1)^p A_{j-i-k,p}(y) \\ &= - \binom{k+i}{k} \sum_{j=k+i}^{n+1} \frac{j-i}{j} \binom{j}{k+i} B_{n+1,j}(x) \sum_{p=0}^{j-i-k} (-1)^p A_{j-i-k,p}(y) \\ &= - \binom{k+i}{k} \left(\sum_{j=k+i}^{n+1} \binom{j}{k+i} B_{n+1,j}(x) \sum_{p=0}^{j-i-k} (-1)^p A_{j-i-k,p}(y) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=k+i}^{n+1} \frac{i}{j} \binom{j}{k+i} B_{n+1,j}(x) \sum_{p=0}^{j-i-k} (-1)^p A_{j-i-k,p}(y) \right) \\ &= - \binom{k+i}{k} (P_{n+1,k+i}(x, y) - i \tilde{P}_{n+1,k+i}(x, y)), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{P}_{n,k}(x, y) = \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} \binom{j}{k} B_{n,j}(x) \sum_{p=0}^{j-k} (-1)^p A_{j-k,p}(y).$$

Теорема доказана.

Равенство (16) позволяет получить ряд новых соотношений для P -полиномов.

Непосредственно из соотношений (5), (11) и (16) получаем, что

$$k P_{n,k}(x, y) = \sum_{r=k-1}^n \binom{n}{r} B_{n-r,1}(x) P_{r,k-1}(x, y).$$

Из соотношений (5), (12) и (16) следует, что

$$\begin{aligned}
 P_{n,k}(x, y) &= T_{n,k}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\tilde{x}_{i+1} T_{n-i,k-1}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{y}_{i+1} T_{n-i,k}(\tilde{x}, \tilde{y})) \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (B_{i+1,1}(x) P_{n-i,k-1}(x, y) + \tilde{y}_{i+1} P_{n-i,k}(x, y)) \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(B_{i+1,1}(x) P_{n-i,k-1}(x, y) - \left(\sum_{j=1}^{i+1} y_j B_{i+1,j}(x) \right) P_{n-i,k}(x, y) \right).
 \end{aligned}$$

Список литературы

1. Touchard J., Sur les cycles des substitutions. *Acta Math.* (1939) **70**, 243–279.
2. Chrysaphinou O., On Touchard polynomials. *Discrete Math.* (1985) **54**, 143–152.
3. Кузьмин О. В., Леонова О. В., Полиномы Тушара и им квазиортогональные. *Оптимизация, управление, интеллект*. ИДСТУ СО РАН, Иркутск, 1999, №3, 218–227.
4. Кузьмин О. В., Леонова О. В., Полиномы Тушара и их приложения. *Дискретная математика* (2000) **12**, №3, 60–71.
5. Платонов М. Л., *Комбинаторные числа класса отображений и их приложения*. Наука, Москва, 1979.
6. Платонов М. Л., Комбинаторные полиномы в алгебре операторов, перестановочных со сдвигом. *Дискретная математика* (1992) **4**, №1, 33–49.
7. Кузьмин О. В., Рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации некоторых комбинаторных чисел и полиномов. *Дискретная математика* (1994) **6**, №3, 39–49.

Статья поступила 08.11.2001.