Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Алексейчук, Неасимптотические оценки распределения вероятностей ранга случайной матрицы над конечным полем, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 2, 85–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm23>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:46:55

Неасимптотические оценки распределения вероятностей ранга случайной матрицы над конечным полем

© 2007 г. А. Н. Алексейчук

Рассматривается случайная матрица A размера $(n + s) \times n$ с независимыми в совокупности строками над полем из q элементов. В терминах коэффициентов Фурье распределений строк этой матрицы получены выражения верхних и (для случая, когда коэффициенты Фурье — неотрицательные числа) нижних оценок вероятностей значений ее ранга. Получена верхняя граница расстояния по вариации между распределениями рангов матрицы A и случайной равновероятной матрицы. Указано условие, при котором это расстояние по вариации стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном s , и показано, что данное условие, в определенном естественном смысле, не может быть ослаблено.

1. Введение

Задача об асимптотическом поведении распределения вероятностей ранга случайной $T \times n$ матрицы A над конечным полем при $n, T \rightarrow \infty$ и различных предположениях относительно закона распределения матрицы A хорошо известна в вероятностной комбинаторике. Ей посвящено много публикаций, обстоятельный обзор которых можно найти в [1].

В [2–4] решается задача построения неасимптотических оценок вероятностей значений ранга случайной матрицы A (для фиксированных натуральных T и n). При этом в [2, 3] рассматриваются булевы матрицы с независимыми в совокупности случайными элементами. В [4] приводятся явные выражения для вероятностей значений ранга матрицы A с независимыми строками над произвольным конечным полем в предположении, что вероятность принадлежности каждой строки матрицы A подпространству, порожденному ее предыдущими строками, зависит только от размерности этого подпространства, и приводятся некоторые оценки распределения ранга матрицы A при отказе от этого предположения.

Настоящая статья отличается от работ [2–4] как исходными предположениями относительно закона распределения строк матрицы A , так и методом построения оценок распределения ее ранга.

2. Постановка задачи и формулировки основных результатов

Рассмотрим случайную матрицу A размера $T \times n$ над полем $F = GF(q)$ с независимыми в совокупности строками $A_1, \dots, A_T$, распределенными по закону

$$\mathbf{P}\{A_i = u\} = p_{n,i}(u), \quad u \in F^n, \quad i = 1, \dots, T.$$

Введем обозначения $s = T - n, s_0 = \max\{0, -s\}$,

$$\pi_{n,s}(t) = \mathbf{P}\{\text{rank } A = n - t\}, \quad t = s_0, \dots, n. \quad (1)$$

Пусть χ — нетривиальный аддитивный характер поля F ,

$$\hat{p}_{n,i}(u) = \sum_{v \in F^n} p_{n,i}(v) \chi(uv), \quad u \in F^n,$$

— преобразование Фурье распределения вероятностей $p_{n,i}, i = 1, \dots, n + s$ (uv обозначает скалярное произведение над полем F векторов $u, v \in F^n$, см. [5]),

$$\rho_{n,s} = \max\{|\hat{p}_{n,i}(u)| : u \in F^n \setminus \{0\}, i = 1, \dots, n + s\}.$$

Назовем произвольное распределение вероятностей $p = (p(v), v \in F^n)$ на множестве F^n положительно полуопределенным, если для любого $u \in F^n$ выполняется неравенство

$$p(u) = \sum_{v \in F^n} p(v) \chi(uv) \geq 0.$$

Наряду с матрицей A рассмотрим случайную равновероятную $(n + s) \times n$ матрицу $A^{(0)}$ над полем F . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \pi_{n,s}^{(0)}(t) &= \mathbf{P}\{\text{rank } A^{(0)} = n - t\}, & t &= s_0, \dots, n, \\ (q^{-1})_m &= (1 - q^{-1}) \dots (1 - q^{-m}), & m &= 0, 1, \dots, \\ (q^{-1})_\infty &= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{-m}). \end{aligned}$$

Известно (см., например, [1]), что

$$\pi_{n,s}^{(0)}(t) = \frac{(q^{-1})_n (q^{-1})_{n+s}}{(q^{-1})_{t+s} (q^{-1})_{n-t} (q^{-1})_t} q^{-t(t+s)}, \quad t = s_0, \dots, n. \quad (2)$$

Требуется оценить близость значений (1) и (2) для всех $t = s_0, \dots, n$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $p_{n,i}, i = 1, \dots, n + s$, — произвольное распределение вероятностей на множестве F^n . Тогда

$$\pi_{n,s}(t) \leq \pi_{n,s}^{(0)}(t) (1 + \rho_{n,s})^{n-t} (1 + q^t (n + s) \rho_{n,s})^{t+s}, \quad t = s_0, \dots, n, \quad (3)$$

и при $s \leq 0$

$$\pi_{n,s}^{(0)}(-s) (1 - \rho_{n,s})^{n+s} \leq \pi_{n,s}(-s) \leq \pi_{n,s}^{(0)}(-s) (1 + \rho_{n,s})^{n+s}. \quad (4)$$

Кроме того, если $p_{n,i}$ является положительно полуопределенным распределением вероятностей, то

$$\pi_{n,s}^{(0)}(t)(1 - \rho_{n,s})^{n-t} \leq \pi_{n,s}(t), \quad t = s_0, \dots, n. \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть $p_{n,i}$, $i = 1, \dots, n + s$, — положительно полуопределенное распределение вероятностей на множестве F^n . Тогда для расстояния по вариации $d(\pi_{n,s}, \pi_{n,s}^{(0)})$ между распределениями вероятностей $\pi_{n,s}$ и $\pi_{n,s}^{(0)}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} d(\pi_{n,s}, \pi_{n,s}^{(0)}) &= \frac{1}{2} \sum_{t=s_0}^n |\pi_{n,s}(t) - \pi_{n,s}^{(0)}(t)| \\ &\leq \frac{1}{2(q^{-1})_\infty} \sum_{t=s_0}^n ((1 + \rho_{n,s})^{n-t}(q^{-t} + (n + s)\rho_{n,s})^{t+s} - q^{-t(t+s)}(1 - \rho_{n,s})^{n-t}). \end{aligned} \quad (6)$$

При этом, если s — фиксированное целое число и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n\rho_{n,s}) = 0, \quad (7)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\pi_{n,s}, \pi_{n,s}^{(0)}) = 0. \quad (8)$$

Замечание 1. Сравним верхнюю границу (4) вероятности максимального значения ранга случайной $(n + s) \times n$ матрицы A , $s \leq 0$, с аналогичной границей, полученной в [4].

Предположим, что строки $A_1, \dots, A_T$ матрицы A одинаково распределены. Для любых $0 \leq i \leq t \leq T$ обозначим $l_t(i)$ условную вероятность события, состоящего в том, что случайный вектор A_{t+1} принадлежит подпространству, порожденному векторами $A_1, \dots, A_t$, при условии, что размерность этого подпространства равна числу i . Пусть $s = T - n \leq 0$ и $\pi_{n,s}(-s)$ есть вероятность того, что матрица A имеет максимальный ранг, равный $n + s$. Согласно [4] (см. лемму 1.4 и следствие 1.1),

$$\pi_{n,s}(-s) = \prod_{i=0}^{n+s-1} (1 - l_i(i)) \quad (9)$$

и при выполнении условия $l_t(i) \leq l_t(i + 1)$, $0 \leq i < t \leq n + s - 1$, справедливо неравенство

$$\pi_{n,s}(-s) \leq \prod_{i=0}^{n+s-1} \left(1 - \frac{m(i + 1) - m(i)}{(q - 1)m(i)} \right), \quad (10)$$

где

$$m(i) = q^{-(n-i)} \sum_{x \in F^n} (\mathbf{P}\{A_1 x = 0\})^i, \quad i = 0, 1, \dots, n + s. \quad (11)$$

Покажем, что в некоторых случаях верхняя граница (4) является более точной оценкой значения $\pi_{n,s}(-s)$ по сравнению с неравенством (10). Рассмотрим семейство распределений вероятностей на множестве F^n

$$p_\Delta(0) = q^{-n}(1 + (q^n - 1)\Delta), \quad p_\Delta(u) = q^{-n}(1 - \Delta), \quad u \in F^n \setminus \{0\}, \quad (12)$$

где $\Delta \in [0, 1]$. Нетрудно видеть, что $\hat{p}_\Delta(u) = \Delta$ для любого $u \in F^n \setminus \{0\}$, в частности, распределение (12) является положительно полуопределенным.

Пусть строки матрицы A распределены по закону (12). В этом случае значение $l_i(i)$ зависит только от i (см. [4], с. 30),

$$l_i(i) = q^{-(n-i)}(1 + (q^{n-i} - 1)\Delta), \quad i = 0, 1, \dots, n + s,$$

и на основании (9)

$$\pi_{n,s}(-s) = \pi(\Delta) = \prod_{i=0}^{n+s-1} (1 - q^{-(n-i)}(1 + (q^{n-i} - 1)\Delta)). \quad (13)$$

Далее, используя формулы (11) и (12), нетрудно убедиться в том, что

$$m(i) = q^{-(n-i)} + q^{-n}(q^n - 1)(1 + (q - 1)\Delta)^i, \quad i = 0, 1, \dots, n + s,$$

и следовательно,

$$1 - \frac{m(i+1) - m(i)}{(q-1)m(i)} = \frac{q^{-i}(q^n - 1)(1 + (q-1)\Delta)^i(1 - \Delta)}{1 + q^{-i}(q^n - 1)(1 + (q-1)\Delta)^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n + s - 1.$$

Таким образом, неравенство (10) принимает вид

$$\pi_{n,s}(-s) \leq \pi^{(1)}(\Delta) = \prod_{i=0}^{n+s-1} \frac{q^{-i}(q^n - 1)(1 + (q-1)\Delta)^i(1 - \Delta)}{1 + q^{-i}(q^n - 1)(1 + (q-1)\Delta)^i}, \quad (14)$$

При этом на основании равенства $\rho_{n,s} = \Delta$, вытекающего из соотношений (12), верхняя граница (4) имеет вид

$$\pi_{n,s}(-s) \leq \pi^{(2)}(\Delta) = \pi_{n,s}^{(0)}(-s)(1 + \Delta)^{n+s}. \quad (15)$$

Заметим теперь, что согласно формулам (13), (15)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0+} \pi(\Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \pi^{(2)}(\Delta) = \pi_{n,s}^{(0)}(-s) = \prod_{i=0}^{n+s-1} (1 - q^{-(n-i)}),$$

в то время как предел выражения в правой части неравенства (14) равен

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0+} \pi^{(1)}(\Delta) = \prod_{i=0}^{n+s-1} \frac{q^{-i}(q^n - 1)}{1 + q^{-i}(q^n - 1)} > \pi_{n,s}^{(0)}(-s).$$

Отсюда следует, что в случае, когда строки матрицы A распределены по закону (12), верхняя оценка (4) является более точной по сравнению с оценкой (10) при всех достаточно малых неотрицательных Δ .

С другой стороны, следует отметить, что значение выражения в правой части неравенства (10) всегда меньше 1, в то время как для верхней границы (4) это условие, вообще говоря, может не выполняться.

Замечание 2. В условиях теоремы 2 достаточное для выполнения (8) условие (7) нельзя ослабить в следующем смысле: если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n\rho_{n,s}) = c > 0,$$

то равенство (8) может не выполняться. Действительно, пусть строки матрицы A распределены по закону (12), где

$$\Delta = \Delta_n = \frac{c}{n}(1 + (q^n - 1)^{-1}) - (q^n - 1)^{-1}$$

при всех достаточно больших натуральных n и $c > 0$. Тогда $p_{n,i}(0) = c/n$, и на основании теоремы 1.3 из [4] последовательности распределений вероятностей $\pi_{n,s}$ и $\pi_{n,s}^{(0)}$ сходятся (в смысле слабой сходимости) к различным предельным распределениям вероятностей при $n \rightarrow \infty$.

3. Доказательства теорем

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть L_k — произвольное k -мерное подпространство векторного пространства F^n , $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n + s\}$

$$q^{-(n-k)}(1 - (q^{n-k} - 1)\rho_{n,s}) \leq \mathbf{P}\{A_i \in L_k\} \leq q^{-(n-k)}(1 + (q^{n-k} - 1)\rho_{n,s}).$$

Если $p_{n,i}$ — положительно полуопределенное распределение вероятностей, то

$$q^{-(n-k)} \leq \mathbf{P}\{A_i \in L_k\}, \quad i \in \{1, \dots, n + s\}.$$

Доказательство. Пусть $E = L_k^\perp$ — ортогональное дополнение к подпространству L_k . На основании леммы 9.31 из [5] для любого векторного пространства V над полем $\mathbf{C}$ и произвольного отображения $f: F^n \rightarrow V$ справедливо равенство

$$\sum_{u \in E} \hat{f}(u) = |E| \sum_{v \in E^\perp} f(v), \quad (16)$$

где

$$\hat{f}(u) = \sum_{v \in F^n} f(v) \chi(uv).$$

Полагая в (16) $f(v) = p_{n,i}(v)$, $v \in F^n$ ($V = \mathbf{C}$) и принимая во внимание равенства

$$E^\perp = L_k, \quad |E| = q^{n-k}, \quad \hat{f}(0) = \sum_{v \in F^n} p_{n,i}(v) = 1,$$

получим, что

$$\mathbf{P}\{A_i \in L_k\} = \sum_{v \in L_k} p_{n,i}(v) = q^{-(n-k)} \left(1 + \sum_{u \in L_k^\perp \setminus \{0\}} \hat{p}_{n,i}(u) \right), \quad (17)$$

Утверждение леммы следует непосредственно из (17) и определения параметра $\rho_{n,s}$.

Лемма 2. Пусть вещественные числа $P_k, Q_k, k \in \{0, 1, \dots, n\}$, таковы, что для любых $i \in \{1, \dots, n+s\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ и произвольного k -мерного подпространства $L_k \subseteq F^n$

$$P_k \leq \mathbf{P}\{A_i \in L_k\} \leq Q_k \leq 1. \quad (18)$$

Тогда

$$\pi_{n,s}(t) \leq C_{t+s}(Q_0, \dots, Q_{n-t}) \prod_{i=0}^{n-t-1} (1 - P_i), \quad t = s_0, \dots, n, \quad (19)$$

где

$$C_{t+s}(x_0, \dots, x_{n-t}) = \sum_{(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-t}) \in N_0^{n-t+1}: \alpha_0 + \dots + \alpha_{n-t} = t+s} x_0^{\alpha_0} \dots x_{n-t}^{\alpha_{n-t}}$$

— полная однородная симметрическая функция степени $t+s, t \in \{s_0, \dots, n\}$.

Кроме того, при $s \leq 0$

$$\prod_{i=0}^{n+s-1} (1 - Q_i) \leq \pi_{n,s}(-s) \leq \prod_{i=0}^{n+s-1} (1 - P_i). \quad (20)$$

Если наряду с (18) имеют место неравенства

$$0 \leq P_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (21)$$

то

$$C_{t+s}(P_0, \dots, P_{n-t}) \prod_{i=0}^{n-t-1} (1 - Q_i) \leq \pi_{n,s}(t), \quad t = s_0, \dots, n. \quad (22)$$

Доказательство. Для любых $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-t} \leq n+s$ обозначим $M(i_1, \dots, i_{n-t})$ совокупность всех $(n+s) \times n$ матриц A над полем F , обладающих следующим свойством: строки с номерами $i_1, \dots, i_{n-t}$ матрицы A , и только они, не являются линейными комбинациями предыдущих строк этой матрицы.

Ясно, что множества $M(i_1, \dots, i_{n-t})$ образуют разбиение совокупности всех $(n+s) \times n$ матриц ранга $n-t$ над полем F . Поэтому

$$\pi_{n,s}(t) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-t} \leq n+s} \mathbf{P}\{A \in M(i_1, \dots, i_{n-t})\}, \quad t = s_0, \dots, n. \quad (23)$$

При этом, если $s \leq 0$, то

$$\pi_{n,s}(-s) = \mathbf{P}\{A \in M(1, 2, \dots, n+s)\}. \quad (24)$$

Заметим теперь, что при выполнении условия (18) в силу независимости строк матрицы A

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A \in M(i_1, \dots, i_{n-t})\} &\leq Q_0^{i_1-1} (1 - P_0) Q_1^{i_2-i_1-1} (1 - P_1) \dots \\ &\quad \times Q_{n-t-1}^{i_{n-t}-i_{n-t-1}-1} (1 - P_{n-t-1}) Q_{n-t}^{n+s-i_{n-t}} \\ &= Q_0^{i_1-1} Q_1^{i_2-i_1-1} \dots Q_{n-t-1}^{i_{n-t}-i_{n-t-1}-1} Q_{n-t}^{n+s-i_{n-t}} \prod_{i=0}^{n-t-1} (1 - P_i) \end{aligned} \quad (25)$$

и при $s \leq 0$

$$\prod_{i=0}^{n+s-1} (1 - Q_i) \leq \mathbf{P}\{A \in M(1, 2, \dots, n+s)\} \leq \prod_{i=0}^{n+s-1} (1 - P_i). \quad (26)$$

Аналогично при выполнении неравенств (18), (21)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A \in M(i_1, \dots, i_{n-t})\} &\geq P_0^{i_1-1} (1 - Q_0) P_1^{i_2-i_1-1} (1 - Q_1) \dots \\ &\quad \times P_{n-t-1}^{i_{n-t}-i_{n-t-1}-1} (1 - Q_{n-t-1}) P_{n-t}^{n+s-i_{n-t}} \\ &= P_0^{i_1-1} P_1^{i_2-i_1-1} \dots P_{n-t-1}^{i_{n-t}-i_{n-t-1}-1} P_{n-t}^{n+s-i_{n-t}} \prod_{i=0}^{n-t-1} (1 - Q_i). \end{aligned} \quad (27)$$

Непосредственно из формул (23)–(27) следуют оценки (19), (20), (22). Лемма доказана.

Лемма 3. Для любого $t \in \{s_0, \dots, n\}$ справедливо равенство

$$C_{t+s}(q^{-n}, q^{-(n-1)}, \dots, q^{-t}) = \pi_{n,s}^{(0)}(t) \prod_{i=0}^{n-t-1} (1 - q^{-(n-i)})^{-1}. \quad (28)$$

Доказательство. Равенство (28) вытекает из формул (19) и (22) при $A = A^{(0)}$, $P_k = Q_k = q^{-(n-k)}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Доказательство теоремы 1. Положим

$$\begin{aligned} P_k &= q^{-(n-k)} (1 - (q^{n-k} - 1)\rho_{n,s}), \\ Q_k &= q^{-(n-k)} (1 + (q^{n-k} - 1)\rho_{n,s}), \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Согласно лемме 1 справедливы неравенства (18). Следовательно, при $s \leq 0$ на основании формул (20), (28) и соотношений

$$\begin{aligned} (1 - P_k)(1 - q^{-(n-k)})^{-1} &= 1 + \rho_{n,s}, \\ (1 - Q_k)(1 - q^{-(n-k)})^{-1} &= 1 - \rho_{n,s}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

имеют место неравенства (4).

Убедимся в справедливости формулы (3). Заметим, что

$$0 < Q_k \leq q^{-(n-k)} + \rho_{n,s}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Поэтому на основании (19)

$$\pi_{n,s}(t) \leq C_{t+s}(q^{-n} + \rho_{n,s}, \dots, q^{-t} + \rho_{n,s}) \prod_{i=0}^{n-t-1} (1 - P_i), \quad t = s_0, \dots, n. \quad (29)$$

Для оценки выражения в правой части (29) воспользуемся неравенством

$$\begin{aligned} (C_{t+s}(x_0 + y_0, \dots, x_{n-t} + y_{n-t}))^{1/(t+s)} \\ \leq (C_{t+s}(x_0, \dots, x_{n-t}))^{1/(t+s)} + (C_{t+s}(y_0, \dots, y_{n-t}))^{1/(t+s)}. \end{aligned}$$

где $x_i, y_i \geq 0$, $i \in \{0, 1, \dots, n-t\}$, $t \in \{s_0, \dots, n\}$ (см. предложение F5 на с. 91 в [6]). В результате получим, что для любого $t \in \{s_0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} & C_{t+s}(q^{-n} + \rho_{n,s}, \dots, q^{-t} + \rho_{n,s}) \\ & \leq C_{t+s}(q^{-n}, \dots, q^{-t}) \left(1 + \left(\frac{C_{t+s}(\rho_{n,s}, \dots, \rho_{n,s})}{C_{t+s}(q^{-n}, \dots, q^{-t})} \right)^{1/(t+s)} \right)^{t+s} \\ & = \pi_{n,s}^{(0)}(t) \prod_{i=0}^{n-t-1} (1 - q^{-(n-i)})^{-1} \left(1 + \left(\frac{C_{t+s}(\rho_{n,s}, \dots, \rho_{n,s})}{C_{t+s}(q^{-n}, \dots, q^{-t})} \right)^{1/(t+s)} \right)^{t+s}, \end{aligned} \quad (30)$$

где последнее равенство вытекает из формулы (28).

Заметим теперь, что

$$C_{t+s}(\rho_{n,s}, \dots, \rho_{n,s}) = (\rho_{n,s})^{t+s} \binom{n+s}{t+s} \leq ((n+s)\rho_{n,s})^{t+s}, \quad (31)$$

$$(C_{t+s}(q^{-n}, \dots, q^{-t}))^{-1} = \frac{(q^{-1})_{t+s}(q^{-1})_{n-t}}{(q^{-1})_{n+s}} q^{t(t+s)} \leq q^{t(t+s)}, \quad t \in \{s_0, \dots, n\} \quad (32)$$

(см. формулы (2) и (28)). Подставляя оценки (31), (32) в выражение (30), на основании формулы (29) получим неравенство

$$\pi_{n,s}(t) \leq \pi_{n,s}^{(0)}(t) (1 + q^t(n+s)\rho_{n,s})^{t+s} \prod_{i=0}^{n-t-1} \left(\frac{1 - P_i}{1 - q^{-(n-i)}} \right), \quad t \in \{s_0, \dots, n\},$$

равносильное (3). Итак, формула (3) доказана.

Наконец, для доказательства неравенства (5) в предположении положительной полуопределенности распределения вероятностей $p_{n,i}$, $i = 1, \dots, n+s$, достаточно положить в (18)

$$P_k = q^{-(n-k)}, \quad Q_k = q^{-(n-k)}(1 + (q^{n-k} - 1)\rho_{n,s}), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

(см. лемму 1) и воспользоваться соотношениями (22) и (28). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Заметим, что справедливость неравенства (6) следует непосредственно из оценок (3), (5) и неравенств

$$\pi_{n,s}^{(0)}(t) < \frac{1}{(q^{-1})_\infty} q^{-t(t+s)}, \quad t = s_0, \dots, n,$$

вытекающего из формулы (2). Остается показать, что при фиксированном целом s равенство (7) влечет равенство (8).

Согласно (7), существует натуральное $n_0 \geq s_0$ такое, что

$$q^{-k} + (n+s)\rho_{n,s} < 1 \quad (33)$$

для любых $n_0 < k \leq n$.

Обозначим S_n сумму в правой части неравенства (6) и заметим, что

$$S_n = S_{n,1}(k) + S_{n,2}(k), \quad n_0 < k \leq n, \quad (34)$$

где

$$S_{n,1}(k) = \sum_{t=s_0}^{k-1} ((1 + \rho_{n,s})^{n-t} (q^{-t} + (n+s)\rho_{n,s})^{t+s} - q^{-t(t+s)} (1 - \rho_{n,s})^{n-t}),$$

$$S_{n,2}(k) = \sum_{t=k}^n ((1 + \rho_{n,s})^{n-t} (q^{-t} + (n+s)\rho_{n,s})^{t+s} - q^{-t(t+s)} (1 - \rho_{n,s})^{n-t}).$$

Непосредственно из равенства (7) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,1}(k) = 0, \quad n_0 < k. \quad (35)$$

Далее, на основании (33) для любых $n_0 < k \leq n$

$$\begin{aligned} S_{n,2}(k) &\leq \sum_{t=k}^n (1 + \rho_{n,s})^{n-t} (q^{-t} + (n+s)\rho_{n,s})^{t+s} \\ &\leq (1 + \rho_{n,s})^n \sum_{t=k}^n (q^{-k} + (n+s)\rho_{n,s})^{t+s} \\ &< (1 + \rho_{n,s})^n \frac{(q^{-k} + (n+s)\rho_{n,s})^{k+s}}{1 - (q^{-k} + (n+s)\rho_{n,s})}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (7), находим, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_{n,2}(k) \leq \frac{q^{-k(k+s)}}{1 - q^{-k}}, \quad n_0 < k. \quad (36)$$

Таким образом, в силу соотношений (6), (34)–(36)

$$0 \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d(\pi_{n,s}, \pi_{n,s}^{(0)}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d(\pi_{n,s}, \pi_{n,s}^{(0)}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \frac{q^{-k(k+s)}}{1 - q^{-k}}$$

для любого натурального $k > n_0$. Следовательно, выполняется равенство (8). Теорема доказана.

Список литературы

1. Левитская А. А., Системы случайных уравнений над конечными алгебраическими структурами. *Кибернетика и системный анализ* (2005) **41**, №1, 82–116.
2. Masol V. V., Explicit representation of some coefficients in the expansion of the random matrix rank distribution in the field $GF(2)$. *Theory Stoch. Process.* (2000) **6** (22), №3–4, 122–126.
3. Масол В. В., Разложение по степеням малого параметра распределения максимального ранга случайной булевой матрицы. *Кибернетика и системный анализ* (2002) **38**, №6, 176–180.
4. Балакин Г. В., Системы случайных уравнений над конечным полем. *Труды по дискретной математике* (1998) **2**, 21–37.
5. Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*, т. 1, 2. Мир, Москва, 1988.
6. Маршалл А., Олкин И., *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения*. Мир, Москва, 1983.

Статья поступила 28.09.2005.