Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Финальные вероятности для модифицированных ветвящихся процессов, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 1, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm232>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 10:30:33

Финальные вероятности для модифицированных ветвящихся процессов

© 2002 г. Б. А. Севастьянов

Модифицированный ветвящийся процесс $\mathfrak{R}^*$ строится с помощью двух процессов Гальтона–Ватсона $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}_1$ и фиксированного конечного множества натуральных чисел S . Число частиц $\mu^*(t)$ в процессе $\mathfrak{R}^*$ в моменты $t = 0, 1, 2, \dots$ эволюционирует следующим образом. Если $\mu^*(t) \in S$, то каждая из $\mu^*(t)$ частиц независимо друг от друга дает в следующем поколении потомство по закону ветвящегося процесса $\mathfrak{R}_1$, а если $\mu^*(t) \notin S$, то размножение частиц происходит по закону процесса $\mathfrak{R}_0$. Пусть наряду с активными размножающимися частицами в процессах $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}_1$ появляется также случайное количество финальных частиц, которые в дальнейшем не участвуют в эволюции процесса, а накапливаются и составляют при вырождении процесса некоторую финальную величину η_n , где n — начальное число активных частиц. Известно, что в критическом ветвящемся процессе при некоторых условиях распределение случайной величины η_n/n^2 при $n \rightarrow \infty$ сходится к устойчивому закону распределения с параметром $\alpha = 1/2$. В настоящей работе показано, что это свойство распределения числа финальных частиц сохраняется и в модифицированном ветвящемся процессе $\mathfrak{R}^*$. Показано также, что в этой предельной теореме число финальных частиц можно заменить на некую финальную неотрицательную случайную величину η_n , характеризующую финальное состояние ветвящегося процесса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 99-01-00012, 00-15-96136 и фонда INTAS-RFBR, грант 99-01317.

1. Постановка задачи

Обозначим $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1$ два ветвящихся процесса Гальтона–Ватсона. Пусть $\mu_i(t)$ — число частиц процесса $\mathfrak{R}_i$ в момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$. Вероятности

$$p_{1k}^i = \mathbf{P}\{\mu_i(1) = k \mid \mu_i(0) = 1\}$$

и производящие функции

$$h_i(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{1k}^i s^k$$

определяют эволюцию числа частиц $\mu_i(t)$ ветвящегося процесса $\mathfrak{R}_i$. Процесс $\mu_i(t)$ является однородным марковским случайным процессом с дискретным временем

$t = 0, 1, 2, \dots$ Переходные вероятности $p_{nk}^i = \mathbf{P}\{\mu_i(t+1) = k \mid \mu_i(t) = n\}$ определяются с помощью производящей функции

$$h_i^n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}^i s^k,$$

так как размножение каждой частицы в процессе $\mathfrak{B}_i$ не зависит от других частиц. Обозначим $h_i(t, s)$ t -ю итерацию производящей функции $h_i(s)$, то есть

$$h_i(t+1, s) = h_i(t, h_i(s)), \quad h_i(1, s) = h_i(s).$$

Переходные вероятности

$$p_{nk}^i(t) = \mathbf{P}\{\mu_i(t_1 + t) = k \mid \mu_i(t_1) = n\}$$

определяются разложением

$$h_i^n(t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}^i(t) s^k.$$

Обозначим $S = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ фиксированное конечное множество натуральных чисел $0 < g_1 < g_2 < \dots < g_r$. Марковский процесс $\mu^*(t)$ назовем модифицированным ветвящимся процессом $\mathfrak{B}^*$, определяемым процессами $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ и множеством S , если его переходные вероятности определяются следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\mu^*(t+1) = k \mid \mu^*(t) = n\} = \begin{cases} p_{nk}^0, & \text{если } n \notin S, \\ p_{nk}^1, & \text{если } n \in S. \end{cases}$$

Предположим, что в ветвящихся процессах $\mathfrak{B}_i$, $i = 0, 1$, кроме активно размножающихся частиц типа T с законом размножения $\mathbf{P}\{T \rightarrow kT\} = p_{1k}^i$, $i = 0, 1$, с производящими функциями

$$h_i(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{1k}^i s^k,$$

имеются еще финальные частицы типа T' , которые возникают при каждом превращении частиц типа T , но в дальнейшем не изменяются, а их суммарное количество представляет собой конечный продукт всего процесса после его вырождения. В этом случае можно считать, что процесс $\mathfrak{B}_i$ вложен в ветвящийся процесс $\mathfrak{B}'_i$ с финальным типом частиц. В этом процессе эволюция определяется вероятностями превращения

$$p_{kl}^i = \mathbf{P}\{T \rightarrow kT + lT'\}$$

с производящей функцией

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} p_{kl}^i s^k u^l = h_i(s, u);$$

при этом $h_i(s, 1) = h_i(s)$. Если ветвящийся процесс $\mathfrak{B}'_0$ вырождающийся (то есть его эволюция заканчивается тем, что все частицы типа T исчезают с вероятностью 1)

и начинается с одной частицы типа T , то случайное число возникших при этом финальных частиц типа T' имеет производящую функцию $\varphi(u)$, которая определяется как единственное при $0 \leq u \leq 1$ решение уравнения

$$\varphi = h_0(\varphi, u), \quad (1)$$

(см. [1], гл. 5, п. 2, теорема 5). Если начальных частиц типа T было n , то производящая функция числа финальных частиц после исчезновения частиц типа T равна $\varphi^n(u)$, так как частицы размножаются независимо друг от друга. Обозначим η_n случайную величину с производящей функцией $\varphi^n(u)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если процесс $\mathcal{B}'_0$ критический, то есть

$$\left. \frac{\partial h_0(s, u)}{\partial s} \right|_{s=u=1} = 1, \quad \left. \frac{\partial^2 h_0(s, u)}{\partial s^2} \right|_{s=u=1} = B > 0,$$

и $h_0(s, u)$ аналитична в $|s| < 1 + \delta$, $|u| < 1 + \delta$ при некотором $\delta > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta_n}{n^2 A_0 / B} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-1/(2y)} y^{-3/2} dy, \quad x > 0. \quad (2)$$

Доказательство этой теоремы см. в [1], гл. 5, п. 5, теорема 3.

В этой теореме предельное распределение числа финальных частиц представляет собой устойчивый односторонний закон с параметром $\alpha = 1/2$. В п. 2 доказывается, что утверждение (1) справедливо и для модифицированного процесса $\mathcal{B}^*$. В п. 3 устанавливается справедливость (2) для случая, когда финальная случайная величина η_n неотрицательна, но не обязательно целочисленна.

2. Предельная теорема для модифицированного ветвящегося процесса

Пусть ветвящиеся случайные процессы $\mathcal{B}'_i$, $i = 0, 1$, с производящими функциями $h_i(s, u)$, $i = 0, 1$, удовлетворяют следующим условиям (A):

- (A1) производящая функция $h_0(s, u)$ ветвящегося процесса $\mathcal{B}'_0$ при некотором $\delta > 0$ аналитична в области $|s| < 1 + \delta$, $|u| < 1 + \delta$;
- (A2) ветвящийся процесс $\mathcal{B}'_0$ критический, то есть

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h_0(s, u)}{\partial s} \right|_{s=u=1} &= 1, \\ \left. \frac{\partial^2 h_0(s, u)}{\partial s^2} \right|_{s=u=1} &= B > 0, \\ \left. \frac{\partial h_0(s, u)}{\partial u} \right|_{s=u=1} &= A_0 > 0; \end{aligned}$$

- (A3) переходная вероятность p_{11}^1 ветвящегося процесса $\mathcal{B}_1$, вложенного в ветвящийся процесс $\mathcal{B}'_1$, удовлетворяет неравенствам $0 < p_{11}^1 < 1$.

Пусть $\mathcal{B}'^*$ — модифицированный ветвящийся процесс, построенный по ветвящимся процессам $\mathcal{B}'_0, \mathcal{B}'_1$ и конечному множеству состояний

$$S = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}, \quad g_1 < g_2 < \dots < g_r.$$

Обозначим η_n^* число финальных частиц процесса $\mathcal{B}'^*$, остающихся после его вырождения (то есть при исчезновении всех активных частиц), если он начинается с n активных частиц. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (А). Тогда в процессе $\mathcal{B}'^*$ распределение случайной величины $\eta_n^* B^{-1}/(n^2 A_0)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к устойчивому распределению с параметром $\alpha = 1/2$, которое стоит справа в равенстве (1).

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся две вспомогательные леммы.

Обозначим ν_j число посещений процессом $\mathcal{B}^*$ состояния $g_j \in S$ за все время $0 < t < \infty$ и введем многомерную производящую функцию

$$H_n(z) = \mathbf{M}\{z_1^{\nu_1} \dots z_r^{\nu_r} \mid \mu^*(0) = n\}, \quad z = (z_1, \dots, z_r)$$

случайных величин $\nu_1, \dots, \nu_r$, при условии $\mu^*(0) = n$. Введем вероятности $\tilde{p}_{nk}^0(t)$ следующим образом:

$$\tilde{p}_{nk}^0(t+1) = \sum_{l \notin S'} p_{nl}^0 \tilde{p}_{lk}^0(t), \quad \tilde{p}_{lk}^0(1) = p_{lk}^0,$$

где $S' = S \cup \{0\}$,

$$\tilde{p}_{nk}^0 = \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{p}_{nk}^0(t). \quad (3)$$

Таким образом, $\tilde{p}_{nk}^0(t)$ — это вероятность того, что в процессе $\mathcal{B}_0$ траектория, начинающаяся из состояния $\mu_i(0) = n$, попадает в состояние $\mu_0(t) = k$, ни разу не заходя в промежуточные моменты времени $1, 2, \dots, t-1$ в состояния из множества S' , а $\tilde{p}_{nk}^0$ — это вероятность в процессе $\mathcal{B}_0$ первого перехода из состояния n в состояние k без захода в множество S .

Лемма 1. Если выполнены условия (А), то производящая функция $H_n(z)$ при $n \notin S' = S \cup \{0\}$ определяется формулой

$$H_n(z) = \sum_{i=1}^r \tilde{p}_{ng_i}^0 z_i H_{g_i}(z) + \tilde{p}_{n0}^0, \quad (4)$$

а $H_{g_i}(z)$, $i = 1, \dots, r$, удовлетворяют системе линейных уравнений

$$H_{g_i}(z) = \sum_{j=1}^r \tilde{p}_{g_i g_j}^1 z_j H_{g_j}(z) + \sum_{n \notin S'} p_{g_i n}^1 \sum_{j=1}^r \tilde{p}_{ng_j}^0 z_j H_{g_j}(z) + \sum_{n \notin S'} p_{g_i n} \tilde{p}_{n0}^0. \quad (5)$$

Доказательство. Так как процесс $\mathcal{B}_0$ вырождающийся, траектория $\mu^*(t)$, выходящая из состояния $\mu^*(0) = n$, с вероятностью 1 попадает в множество S' . Вероятность

попадания в нуль, минуя S , равна $\tilde{p}_{n0}^0$, а вероятность первого попадания в множестве S в состояние $g_i \in S$ равна $\tilde{p}_{ng_i}^0$, причем

$$\sum_{i=1}^r \tilde{p}_{ng_i}^0 + \tilde{p}_{n0}^0 = 1.$$

Равенство (4) следует из формулы полного математического ожидания. Система уравнений (5) получается следующим образом. Сначала по формуле полного математического ожидания можно получить равенство

$$H_{g_i}(z) = p_{g_i,0}^1 + \sum_{j=1}^r p_{g_i,g_j}^1 z_j H_{g_j}(z) + \sum_{n \in S} p_{g_i,n}^1 H_n(z), \quad (6)$$

а затем заменить в (6) $H_n(z)$ по формуле (4). Лемма доказана.

Лемма 2. Система уравнений (5) имеет при $0 \leq z_i \leq 1$, $i = 1, \dots, r$, единственное решение $H_{g_i}(z)$, $i = 1, \dots, r$.

Доказательство. Существование и единственность решения системы (5) можно доказать с помощью последовательных приближений. Однако для последующего доказательства теоремы 1 нам будет удобнее сослаться на один результат о финальных вероятностях в некотором вспомогательном ветвящемся процессе с несколькими типами частиц. Рассмотрим ветвящийся процесс $\mathcal{B}'_2$ с r типами активных частиц $T_1, T_2, \dots, T_r$ и r типами финальных частиц $T'_1, T'_2, \dots, T'_r$ с производящими функциями

$$h_{2i}(s, z) = p_{i0} + \sum_{j=1}^r p_{ij} s_j z_j, \quad i = 1, \dots, r,$$

где

$$\begin{aligned} p_{i0} &= p_{g_i,0}^1 + \sum_{n \notin S'} p_{g_i,n}^1 \tilde{p}_{n0}^0, \\ p_{ij} &= p_{g_i,g_j}^1 + \sum_{n \notin S'} p_{g_i,n}^1 \tilde{p}_{ng_j}^0, \quad s = (s_1, \dots, s_r), \quad z = (z_1, \dots, z_r). \end{aligned}$$

Процесс $\mathcal{B}'_2$ связан с ветвящимся процессом $\mathcal{B}^*$ следующим образом. В процессе $\mathcal{B}^*$ рассмотрим только те моменты времени t_k , для которых $\mu^*(t_k) \in S'$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда вероятности перехода в процессе $\mathcal{B}_2$ можно записать в виде

$$p_{ij} = \mathbf{P}\{\mu^*(t_{k+1}) = g_j \mid \mu^*(t_k) = g_i\}, \quad p_{i0} = \mathbf{P}\{\mu^*(t_{k+1}) = 0 \mid \mu^*(t_k) = g_i\}.$$

Ветвящийся процесс $\mathcal{B}_2$, состоящий из одних активных частиц, определяется производящими функциями

$$h_{2i}(s) = h_{2i}(s, 1) = p_{i0} + \sum_{j=1}^r p_{ij} s_j, \quad i = 1, \dots, r.$$

Из условия АЗ нетрудно установить, что матрица $\|p_{ij}\|_{1 \leq i, j \leq r}$ неразложима и $p_{r0} > 0$. Отсюда следует, что процесс $\mathcal{B}_2$ докритический, а производящие функции

$\varphi_j(z) = H_{g_j}(z)$, $j = 1, \dots, r$, являются единственным решением системы уравнений в векторной записи

$$\varphi(z) = h_2(\varphi(z), z),$$

где при $s = (s_1, \dots, s_r)$, $z = (z_1, \dots, z_r)$

$$\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_r(z)), \quad h_2(s, z) = (h_{21}(s, z), \dots, h_{2r}(s, z))$$

(см. [1], гл. 5, п. 2, теорема 5). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Финальную случайную величину η_n^* можно представить в виде

$$\eta_n^* = \eta_n^0 - \xi_n^0 + \xi_n^1, \quad (7)$$

где η_n^0 — финальная случайная величина в критическом процессе $\mathcal{B}'_0$ с производящей функцией $\varphi_0^n(u)$, а $\varphi_0(u)$ — решение уравнения (1), ξ_n^0 — число тех финальных частиц, которые должны были появиться в процессе $\mathcal{B}'_0$, но не появились в процессе $\mathcal{B}^*$ в те моменты времени t , когда $\mu^*(t) \in S$, а ξ_n^1 — число финальных частиц, которые появились в моменты t , когда $\mu^*(t) \in S$ в процессе $\mathcal{B}^*$. Разделим обе части равенства (7) на n^2 . В равенстве

$$\eta_n^*/n^2 = \eta_n^0/n^2 - \xi_n^0/n^2 + \xi_n^1/n^2$$

устремим $n \rightarrow \infty$. Докажем, что при этом

$$\xi_n^0/n^2 \rightarrow 0, \quad \xi_n^1/n^2 \rightarrow 0$$

по вероятности. Случайная величина ξ_n^1 — это число финальных частиц в вспомогательном ветвящемся процессе $\mathcal{B}'_3$, который имеет r типов активных частиц и один тип финальных частиц и производящие функции

$$h_{3i}(s, u) = p_{i0} + \sum_{j=1}^r p_{ij} s_j h_1(1, u), \quad i = 1, \dots, r, \quad (8)$$

где $h_1(s, u)$ — производящая функция процесса $\mathcal{B}'_1$. Эти производящие функции отличаются от производящих функций (6) процесса $\mathcal{B}'_2$ тем, что $z_j = h_1(1, u)$. Производящие функции $\varphi_{3i}(u)$, $i = 1, \dots, r$, числа финальных частиц при условии $\mu^*(0) = g_i$ имеют вид

$$\varphi_{3i}(u) = H_{g_i}(h_1(u)).$$

Отсюда с помощью формулы (4) следует, что при $n \rightarrow \infty$ преобразование Лапласа

$$\mathbf{M}\{e^{-\lambda \xi_n^1/n^2}\} = \tilde{p}_{n0}^0 + \sum_{i=1}^r H_{g_i}(h_1(e^{-\lambda/n^2})) \rightarrow 1,$$

поэтому $\xi_n^1/n^2 \rightarrow 0$ по вероятности. Случайная величина ξ_n^0 удовлетворяет неравенствам $0 \leq \xi_n^0 \leq \tilde{\xi}_n^0$, где $\tilde{\xi}_n^0$ — число финальных частиц в ветвящемся процессе $\mathcal{B}'_4$, который отличается от $\mathcal{B}'_3$ только тем, что в производящих функциях (8) вместо $h_1(1, u)$ надо поставить $\varphi_0(u)$, решение уравнения (1). В этом случае при $n \rightarrow \infty$ также

$$\mathbf{M}\{e^{-\lambda \tilde{\xi}_n^0/n^2}\} = \tilde{p}_{n0}^0 + \sum_{i=1}^r p_{ng_i}^0 H_{g_i}(\varphi_0(e^{-\lambda/n^2})) \rightarrow 1,$$

поэтому $\xi_n^0/n^2 \rightarrow 0$ по вероятности. Отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$ предельные законы распределения η_n^*/n^2 и η_n^0/n^2 совпадают. Теорема доказана.

3. Предельное устойчивое распределение для критических ветвящихся процессов с положительными финальными характеристиками

Рассмотрим ветвящийся процесс $\mathcal{B}'_0$ с производящей функцией

$$h_0(s, u) = \mathbf{M}\{s^{\xi(1)} u^{\xi(1)} \mid \mu(0) = 1, \xi(0) = 0\},$$

удовлетворяющей условиям теоремы 1, за исключением того, что случайная величина $\xi(1)$, (равная прибавке к финальной характеристике процесса $\mathcal{B}'_0$) при каждом превращении активной частицы, не обязательно целочисленна. В этом случае сохраняется предельное соотношение (2).

Теорема 3. *Если ветвящийся процесс $\mathcal{B}'_0$ удовлетворяет условиям теоремы 1, за исключением целочисленности случайной величины $\xi(1)$, характеризующей финальную величину процесса, то справедливо предельное соотношение (2).*

Доказательство. Рассмотрим два ветвящихся процесса $\mathcal{B}'_{0m0}$ и $\mathcal{B}'_{0m1}$ с целочисленными финальными характеристиками

$$\xi_{m0}(1) = [m\xi(1)], \quad \xi_{m1}(1) = \xi_{m0}(1) + 1,$$

где m — натуральное число. Легко видеть, что

$$\frac{\xi_{m0}(1)}{m} \leq \xi(1) \leq \frac{\xi_{m1}(1)}{m} = \frac{\xi_{m0}(1)}{m} + \frac{1}{m}, \quad (9)$$

откуда следует, что

$$A_{m0} = \mathbf{M}\xi_{m0}(1) \leq mA_0 \leq \mathbf{M}\xi_{m1} = A_{m1} = A_{m0} + 1. \quad (10)$$

Обозначим $\eta_n, \eta_{nm0}, \eta_{nm1}$ финальные случайные величины в ветвящихся процессах $\mathcal{B}'_0, \mathcal{B}'_{0m0}, \mathcal{B}'_{0m1}$ соответственно. Из (9) следует, что

$$\eta_{nm0} \leq \eta_n \leq \eta_{nm1}. \quad (11)$$

Процессы $\mathcal{B}'_{0m0}, \mathcal{B}'_{0m1}$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta_{nmi}}{n^2 A_{mi}/B} \leq x \right\} = \Phi_{1/2}(x) = \int_0^x e^{-1/(2y)} y^{-3/2} dy, \quad x > 0, \quad i = 0, 1.$$

В силу (10) и (11) при любом m

$$\Phi_{1/2}(xA_0m/A_{m1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta_n}{n^2 A_0/B} \leq x \right\} \leq \Phi_{1/2}(xA_0/A_{m0}),$$

а так как $A_0m/A_{mi} \rightarrow 1, i = 0, 1$, при $m \rightarrow \infty$, отсюда следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 3 ясно, что она обобщает не только теорему 1, но и теорему 2. Аналогичным методом можно получить обобщение предельных теорем для финальных вероятностей в тех ветвящихся процессах с несколькими типами частиц, в которых в качестве предельных распределений появляются устойчивые распределения с параметром $\alpha = 2^{-l}, l = 2, 3, \dots$ (см. [2, 3]).

Список литературы

1. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.
2. Севастьянов Б. А., Финальные вероятности ветвящихся случайных процессов. *Теория вероятностей и ее применения* (1957) 2, №1, 140–141.
3. Шерстнев В. И., Переходные явления для финальных вероятностей ветвящихся процессов. *Теория вероятностей и ее применения* (1986) 31, №1, 111–117.

Статья поступила 13.12.2001.