Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Шойтов, Предельные распределения числа наборов H -эквивалентных отрезков в равновероятной полиномиальной схеме серий, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 1, 82–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:38:54

Предельные распределения числа наборов H -эквивалентных отрезков в равновероятной полиномиальной схеме серий

© 2002 г. А. М. Шойтов

В работе изучаются случайные величины, характеризующие связь наборов отрезков равновероятной полиномиальной схемы отношением H -эквивалентности. Получена верхняя оценка расстояния по вариации между распределением случайной величины $\xi_k(H)$, равной числу наборов H -эквивалентных отрезков, и распределением Пуассона. Найдены достаточные условия сходимости функции распределения числа H -эквивалентных отрезков в схеме серий равновероятных полиномиальных испытаний к нормальному распределению, распределению Пуассона и к сложному распределению Пуассона.

Пусть $X = X_1, X_2, \dots$ — последовательность случайных величин (с.в.), принимающих значения из множества $A = \{1, 2, \dots, v\}$, $v > 1$, полученная по равновероятной полиномиальной схеме.

Для натурального n будем говорить (см. [8]), что два вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ из A^n H -эквивалентны относительно некоторой подгруппы H симметрической группы подстановок $S(A)$, если существует такая подстановка $h \in H$, что $h(a_j) = b_j$ для всех $j = 1, \dots, n$. В этом случае будем писать $\bar{a}H\bar{b}$.

Для натурального $k \geq 2$ и произвольных натуральных $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$ определим с.в. $\eta(i_1, \dots, i_k; H, n)$, полагая

$$\eta(i_1, \dots, i_k; H, n) = I(\forall r, s = 1, \dots, k: (X_{i_r}, \dots, X_{i_r+n-1})H(X_{i_s}, \dots, X_{i_s+n-1})), \quad (1)$$

где $I(C)$ — индикатор события C . Рассмотрим с.в.

$$\xi_k = \xi_k(N) = \xi(H, k, N, n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \eta(i_1, \dots, i_k; H, n), \quad (2)$$

равные числу наборов из k H -эквивалентных отрезков длины n в последовательности X длины $N + n - 1$.

Предельное распределение с.в. $\xi(H, k, N, n)$ при $H = \{e\}$ исследовалось в работах А. М. Зубкова и В. Г. Михайлова (см., например, [3, 6]). В работах С. М. Буравлева (см. [1, 2]) рассматривались случаи $H = S(A)$ и H — латинский прямоугольник.

В данной работе исследуется случай произвольной группы подстановок H . Близкой к описанной задаче является задача о числе H -эквивалентных отрезков в двух различных последовательностях, рассмотренная в [7].

Введем обозначения. Пусть $\nu_m(B)$ — множество всех бесповторных m -выборок элементов множества B . Для всех $m = 1, \dots, v$ обозначим через $\text{Orb}(m)$ множество классов H -эквивалентных элементов $\nu_m(A)$.

Пусть $\Pi_\lambda(x)$ — функция распределения закона Пуассона с параметром λ , $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, и пусть $F_{\xi_k}(x)$ — функция распределения случайной величины ξ_k . Кроме того, обозначим через $d(F, G)$ расстояние по вариации между функциями распределения F и G (см. [9]).

Положим

$$\begin{aligned}\delta &= \delta(n) = \frac{1}{v^{kn}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m) \sum_{f \in \text{Orb}(m)} |f|^k, \\ \Delta &= \Delta(n) = \frac{|H|}{v^n}, \\ \lambda_1 &= \lambda_1(H, n, N) = \binom{N}{k} \delta, \\ \lambda_2 &= \lambda_2(H, n, N) = \binom{N}{k} \Delta^{k-1},\end{aligned}$$

где $\sigma(n, m)$ — числа Стирлинга второго рода.

Теорема 1. Если $n/v \geq \ln v + 1$, то

$$\begin{aligned}d(F_{\xi_k}, \Pi_{\lambda_1}) &\leq (\Psi + \lambda_1(3\psi + (2n)^k(N\Delta)^{k-1}) + 12\lambda_2/v) \\ &\quad \times \left(\left(\frac{1 - e^{\lambda_1}}{\lambda_1} \right) + \min\{1, (\min\{\lambda_1, |\lambda_1 - \psi|\})^{-2}\} \psi \right),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\psi &= (2n)^{k-1} N \Delta \exp(N\Delta/n), \\ \Psi &= (4n)^{2k-1} N \Delta \exp(N\Delta),\end{aligned}$$

при этом $\lambda_1 < \lambda_2$.

Следствие 1. Пусть $N, n, v \rightarrow \infty$ так, что $n/v - \ln v \rightarrow \infty$, тогда $\lambda_1 = \lambda_2(1 + o(1))$. Если, кроме того, выполнено условие

$$\varphi = (4n)^{2k-1} N \Delta \rightarrow 0, \quad (3)$$

то

$$d(F(\xi_k), \Pi(\lambda_1)) = O(\max(\varphi, \lambda_2/v));$$

если $0 < \lambda_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_1$, то для выполнения (3) достаточно, чтобы

$$\phi = \lambda_2 k (4n)^{2k-1} \Delta^{1/k} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть $N, n, v \rightarrow \infty$ так, что $n/v - \ln v \rightarrow \infty$, существует предел $\lambda_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_1$, $0 < \lambda_0 \leq \infty$, и выполнено условие (3) следствия 1.

Тогда при $\lambda_0 < \infty$

$$P(\xi_k = r) \rightarrow \frac{\lambda_0^r}{r!} e^{-\lambda_0}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

при $\lambda_0 = \infty$, $\lambda_2/v \rightarrow 0$

$$P((\xi_k - \lambda_1)/\sqrt{\lambda_1} < x) \rightarrow \Phi(x),$$

если $\lambda_2/v \rightarrow 0$, то условие (3) выполнено при $k = o(\sqrt{n \ln v / \ln n})$, в частности, при фиксированном k .

Замечание 1. Для ряда случаев выбора множества H , например, когда $H = \{e\}$ (см. [6]) или H — латинский прямоугольник (см. [2]), условие типа $n/v - \ln v \rightarrow \infty$ теоремы 2 является необходимым для сходимости функции распределения случайной величины ξ_k к функции распределения Пуассона. Однако, видимо, для больших по мощности групп H условие подобного рода не является необходимым.

Замечание 2. Условия сходимости распределения случайной величины ξ_k к сложному распределению Пуассона (случай фиксированного v) установлены в теореме 3 (см. ниже).

Доказательство теоремы 1. Далее предполагаем, что $n/v \geq \ln v + 1$. С помощью несложных комбинаторных рассуждений нетрудно убедиться, что в случае, когда $|i_s - i_r| \geq n$ для всех $s \neq r$, выполнено равенство $E\eta_k(i_1, \dots, i_k) = \delta$. Кроме того, для всех $m = 1, \dots, v$ имеет место неравенство $|f| \leq |H|$ при $f \in \text{Orb}(m)$ и $|f| = |H|$ при $f \in \text{Orb}(v)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{v^{kn}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m) \sum_{f \in \text{Orb}(m)} |f|^k \leq \frac{|H|^{k-1}}{v^{kn}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m) \sum_{f \in \text{Orb}(m)} |f| \\ &= \frac{|H|^{k-1}}{v^{kn}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)(v)_m < \left(\frac{|H|}{v^n} \right)^{k-1} = \Delta^{k-1}, \\ \delta &= \frac{1}{v^{kn}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m) \sum_{f \in \text{Orb}(m)} |f|^k > \frac{1}{v^{kn}} \sigma(n, v) \sum_{f \in \text{Orb}(v)} |f|^k \\ &= \left(\frac{|H|}{v^n} \right)^{k-1} \frac{\sigma(n, v)v!}{v^n} = \Delta^{k-1} \frac{\sigma(n, v)v!}{v^n}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda_1 < \lambda_2$, кроме того, при $n/v - \ln(v) \rightarrow \infty$ согласно [5]

$$\sigma(n, v) = \frac{v^n}{v!} (1 + o(1))$$

и, следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2(1 + o(1))$.

Далее при доказательстве мы будем использовать метод Чена–Стейна оценки точности пуассоновской аппроксимации (см. [10]) и придерживаться в ряде случаев схем рассуждений, изложенных в [1] и [6]. Для краткости случайную величину $\eta(i_1, \dots, i_k; n, N)$ будем обозначать через $\eta(\vec{i})$, где $\vec{i} = (i_1, \dots, i_k)$.

Пусть $J = \{\bar{i}: \bar{i} = (i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N\}$, $\lambda = E\xi_k(n, N)$, и для любого $\bar{i} \in J$ пусть $J(\bar{i})$ — множество таких наборов $\bar{j} \in J$, $\bar{j} \neq \bar{i}$, что хотя бы один из отрезков $[i_1, i_1 + n - 1], \dots, [i_k, i_k + n - 1]$ пересекается хотя бы с одним из отрезков $[j_1, j_1 + n - 1], \dots, [j_k, j_k + n - 1]$. Тогда согласно теореме 10.А работы [10]

$$d(F_{\xi_k}, \Pi_\lambda) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \Lambda,$$

где

$$\Lambda = \sum_{\bar{i} \in J} E\eta(\bar{i})(E\eta(\bar{i}) + \sum_{\bar{j} \in J(\bar{i})} E\eta(\bar{j})) + \sum_{\bar{i} \in J} \sum_{\bar{j} \in J(\bar{i})} E(\eta(\bar{j})\eta(\bar{i})).$$

Для любого $\bar{i} \in J$ определим события

$$B(\bar{i}) = \{\eta(\bar{i}) = 1\}$$

и множества

$$U(\bar{i}) = \bigcup_{t=1}^k [i_t, i_t + n - 1],$$

кроме того, для любого $\bar{j} \in J$, $\bar{j} \neq \bar{i}$, пусть

$$U(\bar{i}, \bar{j}) = U(\bar{i}) \cup U(\bar{j}).$$

Обозначим через $A(\bar{i}, \bar{j})$ и $A(\bar{i})$ число связных компонент (отрезков) множеств $U(\bar{i}, \bar{j})$ и $U(\bar{i})$ соответственно. Обозначим $J(\bar{i}, a)$ множество $\bar{j} \in J$, $\bar{j} \neq \bar{i}$, таких, что существует ровно a компонент множества $U(\bar{i}, \bar{j})$, не пересекающихся с $U(\bar{i})$. Обозначим $J(a)$ множество $\bar{i} \in J$ таких, что множество $U(\bar{i})$ состоит ровно из a связных компонент. Очевидно,

$$J = \bigcup_{a=1}^k J(a).$$

Лемма 1. Пусть $\bar{i} \in J(a)$. Если $1 \leq a < k$, то

$$\mathbf{P}\{B(\bar{i})\} \leq \Delta^a, \quad (5)$$

если $a = k$, то

$$\mathbf{P}\{B(\bar{i})\} = \delta. \quad (6)$$

Пусть $(\bar{i}, \bar{j}) \in J(\bar{i}, a)$. Если $0 \leq a < k$, то

$$\mathbf{P}\{B(\bar{i}) \mid B(\bar{j})\} \leq \Delta^a, \quad (7)$$

если $a = k$, то

$$\mathbf{P}\{B(\bar{i}) \mid B(\bar{j})\} = \delta. \quad (8)$$

Доказательство. Утверждения (6) и (8) доказаны выше. Для доказательства (7) заметим, что, так как $a < k$, существует отрезок $[i_m, i_m + n - 1]$, $m = 1, \dots, k$, пересекающийся либо с другим из отрезков $\{[i_1, i_1 + n - 1], \dots, [i_k, i_k + n - 1]\}$, либо

с множеством $U(\bar{j})$. Пусть $[i_{m_1}, i_{m_1} + n - 1], \dots, [i_{m_a}, i_{m_a} + n - 1]$ — отрезки, содержащиеся в различных компонентах связности $U(\bar{i})$, не пересекающихся с $U(\bar{j})$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{B(\bar{i}) \mid B(\bar{j})\} &\leq \mathbf{P}\{Y(i_m)HY(i_{m_s}), s = 1, \dots, a \mid B(\bar{j})\} \\ &= \sum_{(y_1, \dots, y_n) \in A^n} \mathbf{P}\{Y(j_m) = (y_1, \dots, y_n) \mid B(\bar{j})\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{Y(j_m)HY(j_{m_s}), s = 1, \dots, a \mid B(\bar{j}), Y(j_m) = (y_1, \dots, y_n)\} \\ &= \sum_{(y_1, \dots, y_n) \in A^n} \mathbf{P}\{Y(j_m) = (y_1, \dots, y_n) \mid B(\bar{j})\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{Y(j_m)HY(j_{m_s}), s = 1, \dots, a \mid Y(j_m) = (y_1, \dots, y_n)\} \leq \Delta^a. \end{aligned}$$

Доказательство (5) аналогично.

Применяя лемму 1, получаем, что

$$\sum_{\bar{i} \in J} (\mathbf{E}\eta(\bar{i}))^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{\bar{i} \in J(a)} (\mathbf{E}\eta(\bar{i}))^2 \leq \sum_{a=1}^{k-1} |J(a)| \Delta^{2a} + \binom{N}{k} \delta^2.$$

В [6] показано, что

$$|J(a)| \leq \binom{N}{a} \binom{k-1}{a-1} n^{k-a}.$$

Поэтому

$$\sum_{\bar{i} \in J} (\mathbf{E}\eta(\bar{i}))^2 \leq \sum_{a=1}^{k-1} \binom{N}{a} \binom{k-1}{a-1} n^{k-a} \Delta^{2a} + \binom{N}{k} \delta^2.$$

Оценим величину

$$\sum_{a=1}^k \binom{N}{a} \binom{k-1}{a-1} n^{k-a} D^a$$

при $D < 1$. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{k-1} \binom{N}{a} \binom{k-1}{a-1} n^{k-a} D^a &\leq (2n)^{k-1} \sum_{a=1}^{k-1} \frac{N^a}{a!} n^{1-a} D^a \\ &\leq (2n)^{k-1} ND \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{(a-1)!} \left(\frac{ND}{n}\right)^{a-1} \\ &= (2n)^{k-1} ND \exp\left(\frac{ND}{n}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{\bar{i} \in J} (\mathbf{E}\eta(\bar{i}))^2 \leq (2n)^{k-1} N \Delta^2 \exp\left(\frac{N \Delta^2}{n}\right) + \lambda_1 \delta \leq \psi \Delta + \lambda_1 \delta.$$

Аналогичными рассуждениями получаем неравенство $|\lambda_1 - \lambda| \leq \psi$.

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{i} \in J} \mathbf{E} \eta(\bar{i}) \sum_{\bar{j} \in J(\bar{i})} \mathbf{E} \eta(\bar{j}) &\leq 2 \sum_{a=1}^k \sum_{\bar{i} \in J(a)} \mathbf{E} \eta(\bar{i}) \sum_{b=1}^{k-1} \sum_{\bar{j} \in J(b)} \mathbf{E} \eta(\bar{j}) \\ &\quad + \sum_{\bar{i} \in J(k)} \mathbf{E} \eta(\bar{i}) \sum_{c=0}^{k-1} \sum_{\bar{j} \in J(k) \cap J(\bar{i}, c)} \mathbf{E} \eta(\bar{j}) \\ &\leq 2 \left(\sum_{a=1}^{k-1} |J(a)| \Delta^a + \binom{N}{k} \delta \right) \sum_{a=1}^{k-1} |J(a)| \Delta^a \\ &\quad + \delta^2 \left(\sum_{\bar{i} \in J(k)} \sum_{c=0}^{k-1} \sum_{\bar{j} \in J(k) \cap J(\bar{i}, c)} 1 \right). \end{aligned}$$

Замечая, что при $\bar{i} \in J(k)$ имеет место неравенство

$$|J(k) \cap J(\bar{i}, c)| \leq \binom{k}{c} (2n-1)^{k-c} \binom{N}{c},$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{i} \in J} \mathbf{E} \eta(\bar{i}) \sum_{\bar{j} \in J(\bar{i})} \mathbf{E} \eta(\bar{j}) &\leq 2(\psi + \lambda_1) \psi + \delta^2 \binom{N}{k} \sum_{a=0}^{k-1} \binom{k}{a} (2n-1)^{k-a} \binom{N}{a} \\ &\leq 2(\psi + \lambda_1) \psi + \lambda_1 \Delta^{k-1} N^{k-1} \sum_{a=0}^{k-1} \binom{k}{a} (2n-1)^{k-a} \\ &\leq 2\psi^2 + \lambda_1 (2\psi + ((2n)^k - 1)(N\Delta)^{k-1}). \end{aligned}$$

Пусть $I = \{(\bar{i}, \bar{j}) : \bar{i} \in J, \bar{j} \in J(\bar{i})\}$. Оценим

$$\sum_{(\bar{i}, \bar{j}) \in I} \mathbf{E} \eta(\bar{j}) \eta(\bar{i}).$$

Введем следующие обозначения. Набор $(\bar{i}, \bar{j})$ назовем симметричным, если для всех $s = 1, \dots, k$ отрезки с началами i_s и j_s и только они принадлежат одной компоненте связности $U(\bar{i}, \bar{j})$, $i_s - j_s = i_q - j_q$, $s, q = 1, \dots, k$. Обозначим множество симметричных наборов через I_s , кроме того, пусть $I_{ns} = I \setminus I_s$ и

$$\Psi' = (4n)^{2k-1} (\exp(N\Delta) - 1).$$

Лемма 2. В условиях теоремы 1

$$\sum_{(\bar{i}, \bar{j}) \in I_{ns}} \mathbf{E} \eta(\bar{j}) \eta(\bar{i}) \leq \lambda_1 \psi + \Psi'.$$

Доказательство. Разложим I_{ns} на сумму непересекающихся множеств $L(a, a_1, a_2)$, положив

$$\begin{aligned} L(a, a_1, a_2) &= \{(\bar{i}, \bar{j}) \in I_{ns}, (i_1, \dots, i_k) \in J(a_1), (j_1, \dots, j_k) \in J(a_2), \\ &\quad \text{и имеется ровно } a \text{ связных компонент множества } U(\bar{i}, \bar{j})\}. \end{aligned}$$

Пользуясь леммой 1, получаем, что для $(\bar{i}, \bar{j}) \in L(a, a_1, a_2)$

$$\mathbf{P}\{B(\bar{i}) \cap B(\bar{j})\} < \begin{cases} \Delta^{a_1} \delta, & a_1 < a = a_1 + k, \\ \Delta^a, & a_1 < a < a_1 + k, \ a \neq a_2 + k, \text{ или } a \leq a_1 < k. \end{cases}$$

Так как можно полагать $a_1 \leq a_2$, осталось рассмотреть случай $a \leq a_1 = a_2 = k$. Если $a < k$, то в силу леммы 1

$$\mathbf{P}\{B(\bar{i}) \cap B(\bar{j})\} < \Delta^{k-1} \leq \Delta^a.$$

Если $a = a_1 = a_2 = k$ и существует связная компонента множества $U(\bar{i}, \bar{j})$, не содержащая ни одной из точек $i_1, \dots, i_k$ (или $j_1, \dots, j_k$), то в силу леммы 1

$$\mathbf{P}\{(\bar{i}, \bar{j})\} < \Delta \delta \leq \Delta^k.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $a = a_1 = a_2 = k$ и в каждой компоненте $U(\bar{i}, \bar{j})$ присутствуют точки i_s и j_q . Не ограничивая общности, можно считать, что $s = q$. По условию леммы 2 случай, когда $i_s - j_s = i_q - j_q$, $s, q = 1, \dots, k$, невозможен, так как в этом случае $(\bar{i}, \bar{j}) \notin I_{ns}$. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что $i_1 - j_1 \neq i_2 - j_2$. По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{B(\bar{i}) \cap B(\bar{j})\} &= \mathbf{P}\{\eta(i_1, i_2) = 1, \eta(j_1, j_2) = 1\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{B(\bar{i}) \cap B(\bar{j}) / \eta(i_1, i_2) = 1, \eta(j_1, j_2) = 1\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{\eta(i_1, i_2)\eta(j_1, j_2) = 0, B(\bar{i}) \cap B(\bar{j})\}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое, очевидно, равно нулю. Второй сомножитель, очевидно, не превосходит Δ^{k-2} . Покажем, что первый сомножитель не превосходит Δ^2 . Будем придерживаться схемы доказательства леммы 3 работы [1].

Необходимым и достаточным условием выполнения события

$$\{\eta(i_1, i_2) = 1, \eta(j_1, j_2) = 1\}$$

является выполнение равенств

$$X_{i_1+t} = g(X_{i_2+t}), \quad X_{j_1+t} = h(X_{j_2+t}), \quad g, h \in H, \quad t = 0, \dots, n-1. \quad (9)$$

Обозначим через w число различных неизвестных, участвующих в системе (9). Если число свободных неизвестных в (9) равно w' , то остальные однозначно определяются ими и подстановками g и h , которых существует не более $|H|^2$. Поэтому справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{\eta(i_1, i_2) = 1, \eta(j_1, j_2) = 1\} \leq v^{w'-w} |H|^2.$$

Доказательство, что свободные переменные можно выбрать так, что $w' - w \geq 2n$, совпадает с доказательством леммы 3 работы [1] (случай $r = 2$, $a = 2$). Таким образом,

$$\mathbf{P}\{\eta(i_1, i_2) = 1, \eta(j_1, j_2) = 1\} \leq \Delta^2.$$

Справедлива оценка

$$\mathbf{P}\{B(\bar{i}) \cap B(\bar{j})\} \leq \Delta^k.$$

Поэтому при $(\bar{i}, \bar{j}) \in L(a, a_1, a_2)$, $a_1 \leq a_2$,

$$\mathbf{P}\{B(\bar{i}) \cap B(\bar{j})\} < \begin{cases} \delta \Delta^{a_1}, & a_1 < a = a_1 + k, \\ \Delta^a & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10)$$

В первом случае очевидно, $a_2 = k$. В силу неравенства (10) и определения множеств $L(a, a_1, a_2)$

$$\begin{aligned} \sum_{L(a_1+k, a_1, k)} \mathbf{P}\{B(\bar{i}) \cap B(\bar{j})\} &\leq \sum_{J(a_1)} \Delta^{a_1} \sum_J \delta = \lambda_1 |J(a_1)| \Delta^{a_1} \\ &\leq \lambda_1 \binom{N}{a_1} \binom{k-1}{a_1-1} n^{k-a_1} \Delta^{a_1}. \end{aligned}$$

Пусть

$$L(a) = \bigcup_{a_1=1}^k \bigcup_{a_2=1}^k L(a, a_1, a_2).$$

В [8] показано, что

$$|L(a)| \leq \frac{(2k)!}{(k!)^2} \binom{N}{a} \binom{2k-1}{a-1} n^{2k-1} \leq \binom{N}{a} (4n)^{2k-1},$$

где последнее неравенство опирается на легко проверяемую оценку

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} \leq 2^{2k-1}.$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{(\bar{i}, \bar{j}) \in I_{n,s}} \mathbf{E}(\eta(\bar{j})\eta(\bar{i})) &\leq \lambda_1 \sum_{a=1}^{k-1} \binom{N}{a} \binom{k-1}{a-1} n^{k-a} \Delta^a + \sum_{a=1}^{2k-1} \binom{N}{a} (4n)^{2k-1} \Delta^a \\ &\leq \lambda_1 \psi + (4n)^{2k-1} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{(N\Delta)^{a+1}}{(a+1)!}. \end{aligned}$$

Лемма 3. Если $n/v \geq \ln v + 1$, то

$$\sum_{(\bar{i}, \bar{j}) \in I_s} \mathbf{E}(\eta(\bar{j}), \eta(\bar{i})) \leq \frac{12\lambda_2}{v}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $i_1 < j_1$, $j_1 - i_1 = d$, графически этот случай выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} & \overbrace{\quad n \quad} & & \overbrace{\quad n-d \quad} & & \overbrace{\quad d \quad} & \\ X_{i_1} & \dots & X_{j_1} & \dots & X_{i_1+n-1} & \dots & X_{j_1+n-1} \\ & \downarrow h_1 & & \downarrow h_1, g_1 & & \downarrow g_1 & \\ X_{i_2} & \dots & X_{j_2} & \dots & X_{i_2+n-1} & \dots & X_{j_2+n-1} \\ & \downarrow h_2 & & \downarrow h_2, g_2 & & \downarrow g_2 & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow h_{k-1} & & \downarrow h_{k-1}, g_{k-1} & & \downarrow g_{k-1} & \\ X_{i_k} & \dots & X_{j_k} & \dots & X_{i_k+n-1} & \dots & X_{j_k+n-1} \end{array}$$

На диаграмме стрелками показана подстановочная связь знаков отрезков. Например, знаки отрезков

$$Y_{j_1}(n-d) = (X_{j_1}, \dots, X_{j_1+n-1}), \quad Y_{j_2}(n-d) = (X_{j_2}, \dots, X_{j_2+n-1})$$

связаны подстановками h_1 и g_1 , то есть

$$X_{j_2+t} = h_1(X_{j_1+t}), \quad X_{j_2+t} = g_1(X_{j_1+t}), \quad t = 0, \dots, n-1.$$

Обозначим через $P((\bar{i}, \bar{j}), d)$, $(\bar{i}, \bar{j}) \in I_s$, вероятность

$$P(B(\bar{i}) \cap B(\bar{j}))$$

при $i_1 - j_1 = \dots = i_k - j_k = d$ и оценим ее.

Пусть $Y_{j_1}(n-d)$ содержит m различных элементов $a_1, a_2, \dots, a_m$ множества A . Таких $n-d$ выборов ровно $\sigma(n-d, m)$. Далее, пусть $Y_{i_1}(d)$ и $Y_{i_1+n-1}(d)$ содержат m_1 и m_2 различных элементов, соответственно, причем ровно s_1 и s_2 из них совпадают (без учета кратности) с элементами выборки $Y_{j_1}(n-d)$. Пусть остальные $m_1 - s_1$ и $m_2 - s_2$ элементов — это $b_1, \dots, b_{m_1-s_1}$ и $c_1, \dots, c_{m_2-s_2}$. Обозначим через r минимум чисел $m_1 - s_1$ и $m_2 - s_2$. Тогда нетрудно убедиться в справедливости формулы

$$\begin{aligned} P\{(\bar{i}, \bar{j}), d\} &\leq \frac{1}{v^{k(n+d)}} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, m) \\ &\times \sum_{(a_1, \dots, a_m) \in \nu_m(A)} \sum_{m_1=1}^{\min(d, v)} \sigma(d, m_1) \sum_{m_2=1}^{\min(d, v)} \sigma(d, m_2) \\ &\times \sum_{s_1=0}^{\min(m, m_1)} (m)_{s_1} \binom{m_1}{s_1} \sum_{s_2=0}^{\min(m, m_2)} (m)_{s_2} \binom{m_2}{s_2} \\ &\times \sum_{(b_1, \dots, b_{m_1-s_1}) \in \nu_{m_1-s_1}(A \setminus \{a_1, \dots, a_m\})} \\ &\times \sum_{(c_1, \dots, c_{m_2-s_2}) \in \nu_{m_2-s_2}(A \setminus \{a_1, \dots, a_m\})} |H|^{k-1} ((v-m)_r)^{k-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай $d = 1$, в этом случае

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = P\{(\bar{i}, \bar{j}), 1\} &\leq \binom{N}{k} \frac{|H|^{k-1}}{v^{k(n+1)}} \sum_{m=1}^v \sigma(n-1, m) (v)_m \\ &\times \sum_{s_1=0}^1 \sum_{s_2=0}^1 (m)_{s_1} (m)_{s_2} (v-m)_{1-s_1} (v-m)_{1-s_2} (v-m)_{1-\max(s_1, s_2)}^{k-1} = \sum_{m=1}^v \Sigma_{1,m}, \end{aligned}$$

где при $m = 1, \dots, m$

$$\Sigma_{1,m} = \lambda_2 \frac{1}{v^k v^n} \sigma(n-1, m) (v)_m (m^2 + 2m(v-m) + (v-m)^{k+1}).$$

Заметим, что

$$\Sigma_{1,v} \leq \lambda_2 \frac{1}{v^k v^n} \frac{v^{n-1}}{v!} (v!) v^2 \leq \lambda_2 \frac{1}{v^{k-1}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Sigma_1^1 &= \frac{\lambda_2}{v^k v^n} \sum_{m=1}^{v-1} \sigma(n-1, m)(v_m) 2mv \\ &\leq \frac{\lambda_2}{v^k v^n} \sum_{m=1}^{v-1} \frac{m^{n-1}}{m!} (v)_m 2mv \leq \frac{2\lambda_2}{v^{k-2}} \frac{v!}{v^n} \sum_{m=1}^{v-1} \frac{m^{n-1}}{m!}, \\ \Sigma_1^2 &= \frac{\lambda_2}{v^k v^n} \sum_{m=1}^{v-1} \sigma(n-1, m)(v)_m (v-m)^{k+1} \leq \lambda_2 \frac{v!}{v^n} \sum_{m=1}^{v-1} \frac{m^{n-1}}{m!}.\end{aligned}$$

В лемме 5 работы [1] показано, что если $n/v \geq \ln v + 1$, то для всех $m = 1, \dots, v-1$ справедливо неравенство

$$\frac{m^{n-1}}{m!} \leq \exp\{(1/v - 1)(v - m - 1)\} \frac{(v-1)^{n-1}}{(v-1)!}.$$

Поэтому, учитывая, что $1 - 1/v < \exp\{-1/v\}$, получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{v!}{v^n} \sum_{m=1}^{v-1} \frac{m^{n-1}}{m!} &\leq \frac{v!}{v^n} \sum_{m=1}^{v-1} \exp\{(1/v - 1)(v - m - 1)\} \frac{(v-1)^{n-1}}{(v-1)!} \\ &\leq (1 - 1/v)^{n-1} \sum_{m=1}^{v-1} \exp\{(1/v - 1)(v - m - 1)\} \\ &\leq (1 - 1/v)^{v \ln v + v - 1} \frac{1}{1 - e^{1/v-1}} \\ &\leq 3 \exp\{-(1/v)v \ln v\} = 3/v.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Sigma_1 \leq \lambda_2 \frac{1}{v^{k-1}} + \lambda_2 \frac{2}{v^{k-2}} \frac{3}{v} + \lambda_2 \frac{3}{v} \leq 10\lambda_2 \frac{1}{v}.$$

Кроме того, для любого $2 \leq d \leq n-1$

$$\begin{aligned}P((\bar{i}, \bar{j}), d) &\leq \Delta^{k-1} \frac{1}{v^n v^{kd}} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, m)(v)_m (v-m)! (v-m)^{d(k-2)} v^{2d} \\ &\leq \Delta^{k-1} \frac{v!}{v^n} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, m).\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\sum_{(\bar{i}, \bar{j}) \in I_s} \mathbf{E} \eta(\bar{j}) \eta(\bar{i}) &= \Sigma_1 + \binom{N}{k} \sum_{d=2}^{n-1} P((\bar{i}, \bar{j}), d) \\ &= \frac{10\lambda_2}{v} + \lambda_2 \frac{v!}{v^n} \sum_{d=2}^{n-1} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, m).\end{aligned}$$

Для оценки последнего слагаемого воспользуемся рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 4 в [1].

Пусть $2 \leq d \leq n - \ln v$. Тогда $v \ln v \leq n - d \leq n - 2$. Учитывая неравенства

$$n/v \geq \ln v + 1, \quad (1 - 1/v) < \exp\{-1/v\},$$

получим, что

$$\begin{aligned} \frac{m^{n-d}}{m!} \frac{(m+1)!}{(m+1)^{n-d}} &\leq (m+1) \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{n-d} \\ &\leq v \left(1 - \frac{1}{v}\right)^{n-d} < v \exp\{-(1/v)v \ln v\} = 1. \end{aligned}$$

Откуда,

$$\begin{aligned} \frac{v!}{v^n} \sum_{d=2}^{n-1} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, m) &< \frac{v!}{v^n} \sum_{d=2}^{n-1} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \frac{v^{n-d}}{v!} \\ &\leq \sum_{d=2}^{n-1} \frac{1}{v^{d-1}} \leq \frac{1}{v-1} \leq \frac{2}{v}. \end{aligned}$$

Продолжим доказательство теоремы 1. В силу лемм 2 и 3

$$\begin{aligned} \Lambda &\leq \psi\Delta + \lambda_1\delta + 2\psi^2 + \lambda_1(2\psi + ((2n)^k - 1)(N\Delta)^{k-1}) + \lambda_1\psi + \Psi' + 12\lambda_2\frac{1}{v} \\ &\leq (\psi\Delta + 2\psi^2 + \Psi') + \lambda_1(\delta + 3\psi + ((2n)^k - 1)(N\Delta)^{k-1}) + \frac{12\lambda_2}{v}. \end{aligned}$$

Замечая, что $\delta < \Delta^{k-1}$ и $\psi\Delta + 2\psi + \Psi' \leq \Psi$, находим, что

$$\Lambda \leq \Psi + \lambda_1(3\psi + (2n)^k(N\Delta)^{k-1}) + \frac{12\lambda_2}{v}.$$

Далее, по свойствам расстояния по вариации

$$\begin{aligned} d(F_{\xi_k}, \Pi_{\lambda_1}) &\leq d(F_{\xi_k}, \Pi_\lambda) + d(\Pi_{\lambda_1}, \Pi_\lambda) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \Lambda + |\lambda_1 - \lambda| \\ &\leq \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1}}{\lambda_1} + \left| \frac{1 - e^{-\lambda_1}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \right| \right) \Lambda + \psi. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $f(x) = (1 - e^{-x})/x$ дифференцируема на любом отрезке $[x_1, x_2]$, $0 < x_1, x_2 < \infty$, и

$$f'(x) = -\frac{1 - e^{-x} - xe^{-x}}{x^2}.$$

Применяя на отрезке $[\min(\lambda_1, \lambda), \max(\lambda_1, \lambda)]$ к $f(x)$ теорему Лагранжа о промежуточном значении, получаем, что

$$\left| \frac{1 - e^{-\lambda_1}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \right| = |\lambda_1 - \lambda| \left| \frac{1 - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta}}{\theta^2} \right| \leq \psi \left| \frac{1 - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta}}{\theta^2} \right|$$

при некотором $\theta \in [\min(\lambda_1, \lambda), \max(\lambda_1, \lambda)]$. Заметим, что при любом $0 < x < \infty$ справедливы оценки $|f'(x)| < 1$ и $|f'(x)| < 1/x^2$ и, значит, $|f'(\theta)| < 1$ и $|f'(\theta)| < 1/\theta^2$.

Кроме того, функция $|f'(x)|$ при $x \geq 1$ убывает и $1/x^2 > 1$ на интервале $(0, 1)$. Тогда в силу неравенства

$$\lambda \geq \min\{\lambda_1, |\lambda_1 - \psi|\}$$

справедливы оценки

$$\begin{aligned} |f'(v)| &< \min\{1, 1/v^2\} \leq \min\{1, (\min(\lambda_1, \lambda))^{-2}\} \\ &\leq \min\{1, (\min\{\lambda_1, |\lambda_1 - \psi|\})^2\}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Первое утверждение следствия нетрудно получить непосредственно из теоремы 1. Докажем второе утверждение.

Согласно условию, найдется константа c и натуральное число N_0 такие, что для всех N больших N_0

$$\begin{aligned} 0 < c < \lambda_2 &= \binom{N}{k} \Delta^{k-1} \leq \frac{N^k}{k!} \Delta^{k-1} \leq \frac{N^k}{(k/3)^k} v^{(v-n)(k-1)} \\ &\leq \left(\frac{3N}{k}\right)^k v^{-v \ln v \cdot (k-1)} \leq \left(\frac{3N}{k}\right)^k v^{-\ln v \cdot k} \leq \left(\frac{3N}{kv \ln v}\right)^k. \end{aligned}$$

Значит $k = o(N)$ и

$$N \geq (\lambda_2(1/\Delta)^{k-1})^{1/k}.$$

Поэтому для достаточно больших N

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \binom{N}{k} \Delta^{k-1} \geq \frac{N^k}{k!} \Delta^{k-1} \frac{(N-1)^{k-1}}{N^{k-1}} \\ &\geq N \frac{N^{k-1}}{k^{k-1}} \Delta^{k-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{k-1} \geq \left(\frac{N\Delta}{k} (1 - k/N)(1/\Delta)^{1/k}\right)^{k-1} \lambda_2^{1/k}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_2 &\geq \frac{N}{k} (1 - k/N) \Delta^{(k-1)/k} = \frac{N}{k} \Delta^{(k-1)/k} (1 + o(1)), \\ N &\geq \lambda_2 k \Delta^{(k-1)/k}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi &= (4n)^{2k-1} N \Delta \leq (4n)^{2k-1} \Delta \lambda_2 k \Delta^{(1-k)/k} \\ &\leq \lambda_2 k (4n)^{(2k-1)} \Delta^{1/k}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2. Первые два утверждения теоремы вытекают из следствия 1. Докажем третье утверждение.

Если $k = o(\sqrt{n \ln v / \ln n})$, то с учетом того, что $\lambda_2/v \rightarrow 0$, получаем оценки

$$\begin{aligned} \ln(\lambda_2 k (4n)^{2k-1} \Delta^{1/k}) &\leq \ln(vk(4n)^{2k-1} \Delta^{1/k}) \\ &\leq \ln v + \ln k + (2k-1) \ln(4n) - (n-v)/k \ln v \\ &\leq (k \ln v \ln k + k(2k-1) \ln(4n) - (n-v-k) \ln v)/k, \end{aligned}$$

и правая часть стремится к минус бесконечности.

Теоремы 1 и 2 позволяют описать предельное распределение с.в.

$$\tau_k = \tau_k(n, H) = \min\{N: \xi_k(n, N) > 0\},$$

равной длине последовательности X до появления первого набора из k H -эквивалентных отрезков длины n , и с.в.

$$\mu_k = \mu_k(N, H) = \max\{n: \xi_k > 0\},$$

равной максимальной длине наборов из k H -эквивалентных отрезков в последовательности X . Приведем соответствующие результаты без доказательства.

Следствие 2. Пусть $N, n, v \rightarrow \infty$ и $n/v - \ln v \rightarrow \infty$. Тогда при $x > c > 0$, если $k \geq 2$ фиксировано и $x = o(v^{1/k})$, то

$$\mathbf{P}\{\tau_k \Delta^{(k-1)/k} \leq x\} = 1 - \exp\{-x^k/k!\}(1 + o(1)),$$

если $k \rightarrow \infty$, $k = o(\sqrt{n \ln v / \ln n})$, $x = o(\ln v)$ и $x = o(k)$, то

$$\mathbf{P}\{\tau_k e \Delta^{(k-1)/k} - k - \ln \sqrt{2\pi k} \leq x\} = (1 - \exp\{-e^{-x}\})(1 + o(1)).$$

Следствие 3. Пусть $N, v \rightarrow \infty$,

$$\binom{N}{k} |H|^{k-1} \geq v^{(k-1)v(\omega(v) + \ln(v))},$$

где $\omega(v) \rightarrow \infty$ и выполнено условие $k = o(\sqrt{v \ln v})$. Тогда, если

$$\left| \frac{\ln\left(\binom{N}{k} |H|^{k-1}\right)}{\ln(v^{k-1})} - \left\langle \frac{\ln\left(\binom{N}{k} |H|^{k-1}\right)}{\ln(v^{k-1})} \right\rangle \right| (k-1) \ln(v) \rightarrow \infty,$$

где $\langle x \rangle$ — ближайшее к x целое, то

$$\mathbf{P}\left(\mu(S_v, N) = \left\lceil \frac{\ln\left(\binom{N}{k} |H|^{k-1}\right)}{\ln(v^{k-1})} \right\rceil\right) \rightarrow 1,$$

если

$$\left(\frac{\ln\left(\binom{N}{k} |H|^{k-1}\right)}{\ln(v^{k-1})} - \left\langle \frac{\ln\left(\binom{N}{k} |H|^{k-1}\right)}{\ln(v^{k-1})} \right\rangle \right) (k-1) \ln(v) \rightarrow \ln(\lambda),$$

где $0 < \lambda < \infty$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\mu_k = \left\langle \frac{\ln\left(\binom{N}{k} |H|^{k-1}\right)}{\ln(v^{k-1})} \right\rangle - 1\right) &\rightarrow e^{-\lambda}, \\ \mathbf{P}\left(\mu_k = \left\langle \frac{\ln\left(\binom{N}{k} |H|^{k-1}\right)}{\ln(v^{k-1})} \right\rangle\right) &\rightarrow 1 - e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае, когда мощность v алфавита A не стремится к бесконечности, теорема 1 не дает возможности описать предельное распределение случайной величины ξ_k . Это обусловлено тем, что при фиксированном v в качестве предельного распределения для ξ_k выступает сложное распределение Пуассона. Условия сходимости функции распределения ξ_k к сложному распределению Пуассона описывается следующей теоремой.

Пусть

$$\lambda_3 = \lambda_3(H, n, N) = (1 - 1/v^{k-1}) \binom{N}{k} \Delta^{k-1}.$$

Теорема 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$, v фиксировано, $k = o(\sqrt{n/\ln n})$ и существует предел $\lambda'_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_3$, $0 < \lambda'_0 < \infty$. Тогда

$$\mathbf{E} z^{\xi_k} \rightarrow \exp(\lambda'_0(z-1)/(1-z/v^{k-1}))$$

при фиксированном k и

$$\mathbf{E} z^{\xi_k} \rightarrow \exp(\lambda'_0(z-1))$$

при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Будем использовать метод Стейна для доказательства сложной пуассоновской аппроксимации (см. [11]) и придерживаться в ряде случаев схем рассуждений, изложенных в [6] и других работах А. М. Зубкова и В. Г. Михайлова, посвященных повторениям и совпадениям s -цепочек.

Пусть $J = \{\bar{i}: \bar{i} = (i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N\}$ и для любого $\bar{i} \in J$ пусть $J'(\bar{i})$ — множество таких наборов $\bar{j} \in J$, $\bar{j} \neq \bar{i}$, что хотя бы один из отрезков $[i_1, i_1 + 3n - 1], \dots, [i_k, i_k + 3n - 1]$ пересекается хотя бы с одним из отрезков $[j_1, j_1 + 3n - 1], \dots, [j_k, j_k + 3n - 1]$. Пусть

$$U(\bar{i}) = \{\bar{j} \in J: \bar{j} \neq \bar{i}, -n < i_1 - j_1 = \dots = i_k - j_k < n, \\ |i_r - i_s| > 3n - 1, r, s = 1, \dots, k\},$$

$$V(\bar{i}) = J'(\bar{i}) \setminus U(\bar{i}),$$

$$\lambda(m) = \frac{1}{m} \sum_{\bar{i} \in J} \mathbf{E} \left(\eta(\bar{i}) I \left(\eta(\bar{i}) + \sum_{\bar{j} \in U(\bar{i})} \eta(\bar{j}) = m \right) \right), \quad m = 1, \dots, 2n - 1.$$

Тогда согласно теореме в [11], если $m\lambda(m) \downarrow 0$ при $m \uparrow \infty$, то

$$d(F_{\xi_k}, CP(\Lambda')) \leq C(\Lambda') \left(\sum_{\bar{i} \in J} \left(\mathbf{E} \eta(\bar{i}) \left(\mathbf{E} \eta(\bar{i}) + \sum_{\bar{j} \in J(\bar{i})} \mathbf{E} \eta(\bar{j}) \right) \right) + \sum_{\bar{i} \in J} \sum_{\bar{j} \in V(\bar{i})} \mathbf{E} \eta(\bar{j}) \eta(\bar{i}) \right), \quad (11)$$

где

$$\Lambda' = \sum_{m=1}^{2n-1} \lambda(m) d(m),$$

где $d(m)$ — мера, сосредоточенная в точке m ,

$$C(\Lambda') = \min \left\{ 1, \frac{1}{\lambda(1) - 2\lambda(2)} \left(\frac{1}{4(\lambda(1) - 2\lambda(2))} + (\ln 2(\lambda(1) - 2\lambda(2))) \right) \right\}.$$

Далее будем предполагать, что $n/v \geq \ln(v) + 1$. Сумма, стоящая в правой части равенства (11), оценивается аналогично теореме 1 (несимметричный случай):

$$d(F(\xi_k), CP(\Lambda')) \leq C(\Lambda')(\Psi' + \lambda_2(3\psi' + (6n)^k(N\Delta)^{k-1})),$$

где

$$\psi' = (6n)^{k-1}N\Delta \exp(N\Delta/6n),$$

$$\Psi' = (12n)^{2k-1}N\Delta \exp(N\Delta).$$

Найдем величины $\lambda(i)$. Рассмотрим событие

$$V(q, m) = \{(X_q, \dots, X_{q+m-1}) \text{ содержит все символы алфавита } A\}.$$

Из теоремы 1 работы [4] с использованием неравенства Маркова следует, что

$$\mathbf{P}(V(q, m)) \geq 1 - v \exp(-m/v). \quad (12)$$

Рассмотрим набор из k непересекающихся векторов $(X_{i_s}, \dots, X_{i_s+2n-L-1})$, $s = 1, \dots, k$ длины $2n - L$, $1 \leq L \leq n - 1$ и оценим вероятность события

$$D(L) = \{\forall r, s = 1, \dots, k: (X_{i_s}, \dots, X_{i_s+n-1})H(X_{i_r}, \dots, X_{i_r+n-1}) \\ \text{и } (X_{i_s+n-L}, \dots, X_{i_s+2n-L-1})H(X_{i_r+n-L}, \dots, X_{i_r+2n-L-1})\}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}(D(L) \cap V(i_s + n - L, L)) = |H|^{k-1}/v^{(2n-L)(k-1)}.$$

Тогда из неравенства (12) следует, что

$$|\mathbf{P}(D(L)) - |H|^{k-1}/v^{(2n-L)(k-1)}| = \mathbf{P}(D(L) \setminus V(i_s + n - L, L)) \\ \leq v \exp(-L/v)|H|^{2(k-1)}/v^{(2n-L)(k-1)}.$$

Кроме того, пусть $F(L)$ — событие, заключающееся в том, что найдутся натуральное $1 \leq j \leq n - L - 1$ и пара $r, s \in 1, \dots, k$ такие, что векторы

$$(X_{i_s+j}, \dots, X_{i_s+j+n-1}), \quad (X_{i_r+j}, \dots, X_{i_r+j+n-1})$$

не H -эквивалентны. Тогда

$$D(L \cap F(L)) = (D(L) \cap F(L)) \\ \setminus (V(n - L - \lfloor (n - L)/2 \rfloor + 1, \lfloor (n - L)/2 \rfloor) \cap V(n + 1, \lfloor (n - L)/2 \rfloor)) \\ = (D(L) \cap F(L)) \setminus V(n - L + 1, L)$$

и

$$\mathbf{P}(D(L) \cap F(L)) \leq v \exp(-L/v)|H|^{2(k-1)}/v^{(2n-L)(k-1)}, \\ \mathbf{P}(D(L) \cap F(L)) \leq 2v \exp(-\lfloor (n - L)/2 \rfloor /v)|H|^{2(k-1)}/v^{(2n-L)(k-1)}.$$

Таким образом, если $1 \leq m \leq n-1$, то

$$\begin{aligned} & |\lambda(m) - (1 - 1/v^{k-1})^2 \binom{N}{k} |H|^{k-1}/v^{(n+m-1)(k-1)}| \\ &= |\lambda(m) - \lambda_3(1 - 1/v^{k-1})/v^{(m-1)(k-1)}| \\ &\leq 2 \binom{N}{k} n^2 v \exp(-n/3v) |H|^{2(k-1)}/v^{(n+m-1)(k-1)} \\ &\leq 2\lambda_3 n^2 v \exp(-n/3v) |H|^{(k-1)}/v^{(m-1)(k-1)}. \end{aligned}$$

Для $n \leq m \leq 2n-2$

$$\begin{aligned} & |\lambda(m) - (\lambda_3/m)(1 - 1/v^{k-1})(2n - m + 2/v^{k-1})/v^{(m-1)(k-1)}| \\ &\leq \lambda_3 n^2 v \exp(-n/3v) (1 - 1/v^{k-1})^{-1} |H|^{k-1}/v^{(m-1)(k-1)}, \\ & |\lambda(2n-1) - \lambda_3(1 - 1/v^{k-1})^{-1}(2n-1)/v^{(2n-2)(k-1)}| \\ &\leq \lambda_3 v \exp(-n/3v) (1 - 1/v^{k-1})^{-1} (|H|^{k-1} + 1)/v^{(2n-2)(k-1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сложное распределение Пуассона $CP(\Theta)$, где

$$\Theta = \sum_{m=1}^{\infty} \theta(m) d(m), \quad \theta(m) = \lambda_3(1 - 1/v^{k-1})/v^{(m-1)(k-1)}.$$

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} d(F(\xi_k), CP(\Theta)) &\leq d(F(\xi_k), CP(\Lambda')) + d(CP(\Lambda'), CP(\Theta)) \\ &\leq C(\Lambda')(\Psi' + \lambda_2(3\psi' + (6n)^k(N\Delta)^{k-1})) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{2n-1} |\lambda(m) - \theta(m)| + \sum_{m=2n}^{\infty} \theta(m) \\ &\leq (\Psi' + \lambda_2(3\psi' + (6n)^k(N\Delta)^{k-1})) \\ &\quad + 2\lambda_3 n^2 \exp(-n/3v) |H|^{k-1} v(v^{k-1}/(v^{k-1} - 1))^2 \\ &\leq \Psi' + \lambda_3(6\psi' + 2(6n)^k(N\Delta)^{k-1} + 16vn^2 \exp(-n/3v) |H|^{k-1}), \end{aligned}$$

где правая часть стремится к нулю.

Теорема доказана.

Заметим, что в ходе доказательства была получена явная оценка расстояния по вариации между распределением с.в. ξ_k и сложным распределением Пуассона $CP(\Theta)$.

Автор благодарен В. Г. Михайлову за обсуждение результатов данной работы и ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановки в последовательности независимых испытаний. *Дискретная математика* (1999) 11, №1, 53–75.
2. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановок, образующих латинский прямоугольник. *Дискретная математика* (2000) 12, №1, 24–46.
3. Зубков А. М., Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанные с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) 19, №1, 173–181.
4. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
5. Медведев Ю. И., Ивченко Г. И., Асимптотическое представление конечных разностей от степенной функции в произвольной точке. *Теория вероятностей и ее применения* (1965) 10, №1, 45–61.
6. Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с многократными длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) 19, №1, 182–187.
7. Михайлов В. Г., Предельная теорема Пуассона для числа H -совпадений цепочек. *Обзорное прикладной и промышленной математики* (2000) 7, №1, 123–124.
8. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
9. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. т. 2, Мир, Москва, 1984.
10. Barbour A. D., Holst L., Janson S., *Poisson approximation*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1992.
11. Roos M., Stein method for compound Poisson approximation: the local approach. *Ann. Appl. Probab.* (1994) 4, 1177–1187.

Статья поступила 02.07.2001.