Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Солодовников, Бент-функции из конечной абелевой группы в конечную абелеву группу, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 1, 99–113

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:38:45

УДК 519.7

Бент-функции из конечной абелевой группы в конечную абелеву группу

© 2002 г. В. И. Солодовников

Вводятся понятия абсолютно негомоморфной функции, минимальной (минимально близкой к гомоморфизмам) функции и бент-функции. Доказывается совпадение класса бент-функций с классом абсолютно негомоморфных функций, однозначность определения функции ее расстояниями до гомоморфизмов со сдвигами, абсолютная минимальность бент-функций для примарного случая.

1. Введение

В работе приняты следующие обозначения и терминология. Будем обозначать X, Y произвольные аддитивные конечные абелевы группы (за исключением теоремы 1), на которые по ходу рассуждений накладываются дополнительные ограничения, а Y^X — множество всех отображений $f: X \rightarrow Y$ из множества X в множество Y (термины отображение и функция считаем синонимами). Через $\psi\varphi$ обозначается композиция отображений, при которой φ действует первым. Пусть $\text{Hom}(G, H)$ — множество всех гомоморфизмов группы G в группу H , $\text{Aut}(G)$ — группа всех автоморфизмов группы G , $\mathbf{Z}, \mathbf{C}$ — соответственно кольцо целых и поле комплексных чисел, а

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_x \varphi_1(x) \bar{\varphi}_2(x)$$

— скалярное произведение комплекснозначных функций φ_1 и φ_2 .

Пусть $\mathbf{P}$ обозначает равномерное вероятностное распределение на X , то есть

$$\mathbf{P}(A) = |A||X|^{-1}$$

для любого $A \subseteq X$.

Расстояние ρ между функциями и близость δ функций $f_1, f_2 \in Y^X$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \rho(f_1, f_2) &= \mathbf{P}(f_1 \neq f_2), \\ \delta(f_1, f_2) &= \left(|Y|^{-1} \sum_{y \in Y} (\mathbf{P}(f_1 - f_2 = y) - |Y|^{-1})^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

а расстояние между классами и близость классов функций $K_1, K_2 \subseteq Y^X$ определим равенствами

$$\rho(K_1, K_2) = \min_{f_1 \in K_1, f_2 \in K_2} \rho(f_1, f_2),$$

$$\delta(K_1, K_2) = \max_{f_1 \in K_1, f_2 \in K_2} \delta(f_1, f_2).$$

Функцию называют сбалансированной, если мощности всех прообразов одинаковы.

Введенная формулой (1) близость δ обладает следующими очевидными свойствами:

$$\delta(f_1, f_2) = \delta(f_2, f_1), \quad (2)$$

$$\{\delta(f_1, f_2) = 0\} \iff \{f_1 - f_2 - \text{сбалансированная функция}\}, \quad (3)$$

$$\delta(y_1 + g_2 f_1 + f, y_2 + g_2 f_2 g_1 + f) = \delta(f_1, f_2) \quad (4)$$

для любых $f_1, f_2, f \in Y^X$, подстановки g_1 множества X , $g_2 \in \text{Aut}(Y)$, $y_1, y_2 \in Y$. Столь же очевидно следующее свойство сбалансированности. Если $f: X \rightarrow Y$ — сбалансированная функция и $h: Y \rightarrow Y'$, то hf — сбалансированная функция тогда и только тогда, когда h — сбалансированная функция.

Для любого $a \in X$ подстановку $x \rightarrow a + x$ множества X будем для простоты обозначать также через a (из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь, о подстановке a или об элементе a). Все такие подстановки называют сдвигами группы X , и они образуют изоморфную группе X группу подстановок, называемую группой сдвигов (или группой Кэли) группы X (в теории представлений групп такое представление группы X называют регулярным).

Введем теперь понятие абсолютной негомоморфности, к которому можно прийти следующими рассуждениями. Гомоморфизмы $h \in \text{Hom}(X, Y)$ по определению таковы, что $h - ha$ есть постоянная для всех $a \in X \setminus \{0\}$. Тогда функцию такую, что $f - fa$ является сбалансированной функцией для всех $a \in X \setminus \{0\}$, естественно назвать абсолютно негомоморфной, и мы приходим к следующему определению.

Определение 1. Функцию $f: X \rightarrow Y$ назовем абсолютно негомоморфной, если для любого $a \in X \setminus \{0\}$ функция $f - fa$ является сбалансированной, то есть (в силу (3))

$$\delta(f_1, f_2 a) = 0. \quad (5)$$

Множество всех абсолютно негомоморфных функций из Y^X обозначим $B(X, Y)$.

К понятию абсолютной негомоморфности можно подойти и с другой стороны. А именно, пусть G — некоторая группа подстановок множества X , $fG = \{fg \mid g \in G\}$ — класс функций, порожденных функцией $f \in Y^X$ и группой G . Тогда величины $\delta(fg_1, fg_2)$, $g_1 g_2 \in G$, характеризуют степень изменения функции f подстановками из G : чем ближе эти величины к нулю, тем сильнее подстановки из G изменяют функцию f . Поскольку в силу (4)

$$\delta(fg_1, fg_2) = \delta(f, fg_2 g_1^{-1}),$$

достаточно рассматривать только величину $\delta(f, fg)$, $g \in G$. В частности, когда G — группа сдвигов группы X , получаем, что абсолютно негомоморфные функции — это функции, которые максимально изменяются сдвигами.

Более полной характеристикой схожести функций, чем близость δ , является соответствующее распределение. В связи с этим найдем среднее значение величины $\mathbf{P}(f_1 - f_2g = y) - |Y|^{-1}$ при случайном равновероятном выборе g из G (в этой теореме X — произвольное множество, Y — произвольная группа с аддитивной записью операции).

Теорема 1. Пусть $f_1, f_2 \in Y^X$, Y — аддитивная группа, G — группа подстановок множества X , $\text{Orb}(G)$ — множество всех орбит группы G . Тогда для любого $y \in Y$

$$\begin{aligned} & |G|^{-1} \sum_{g \in G} (\mathbf{P}(f_1 - f_2g = y) - |Y|^{-1}) \\ &= |X|^{-1} \sum_{T \in \text{Orb}(G)} |T| \sum_{y' \in Y} (\mathbf{P}(f_1 = y + y' \mid T) - |Y|^{-1})(\mathbf{P}(f_2 = y' \mid T) - |Y|^{-1}). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть Δ — символ Кронекера. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \mathbf{P}(f_1 - f_2g = y) &= \sum_{g \in G} \sum_{y' \in Y} \mathbf{P}(f_1 = y + y', f_2g = y') \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{y' \in Y} |X|^{-1} \sum_{x \in X} \Delta(f_1(x), y + y') \Delta(f_2g(x), y') \\ &= |X|^{-1} \sum_{T \in \text{Orb}(G)} \sum_{x \in T} \sum_{y' \in Y} \sum_{g \in G} \Delta(f_1(x), y + y') \Delta(f_2g(x), y') \\ &= |X|^{-1} \sum_{T \in \text{Orb}(G)} \sum_{y' \in Y} \sum_{x \in T} \Delta(f_1(x), y + y') \sum_{g \in G} \Delta(f_2g(x), y') \\ &= |X|^{-1} \sum_{T \in \text{Orb}(G)} \sum_{y' \in Y} \sum_{x \in T} \Delta(f_1(x), y + y') |G| |T|^{-1} \sum_{x \in T} \Delta(f_2(x), y') \\ &= |G| |X|^{-1} \sum_{T \in \text{Orb}(G)} \sum_{y' \in Y} \sum_{x \in T} \Delta(f_1(x), y + y') \mathbf{P}(f_2 = y' / T) \\ &= |G| |X|^{-1} \sum_{T \in \text{Orb}(G)} \sum_{y' \in Y} |T| \mathbf{P}(f_1 = y + y' \mid T) \mathbf{P}(f_2 = y' / T), \end{aligned}$$

то есть

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} \mathbf{P}(f_1 - f_2g = y) = |X|^{-1} \sum_{T \in \text{Orb}(G)} |T| \sum_{y' \in Y} \mathbf{P}(f_1 = y + y' \mid T) \mathbf{P}(f_2 = y' \mid T).$$

Далее доказательство очевидно. Теорема доказана.

Следствие 1. Если при условиях теоремы 2 группа G транзитивна, то

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} (\mathbf{P}(f = fg) - |Y|^{-1}) = |Y| \delta^2(f, 0).$$

Приведем некоторые свойства абсолютно негомоморфных функций.

Предложение 1. Если $a \in X$, $b \in Y$, $g_1 \in \text{Aut}(X)$, $g_2 \in \text{Aut}(Y)$, $h \in \text{Hom}(X, Y)$ и $f \in B(X, Y)$, то $b + h + g_2f(a + g_1) \in B(X, Y)$.

Утверждение следует из (4) и определения 1.

Предложение 2. Если $f \in B(X, Y)$, $h: Y \rightarrow Y'$ — эпиморфизм (то есть сюръективный гомоморфизм групп), то $hf \in B(X, Y')$.

Утверждение следует из определения 1 и сбалансированности h .

Предложение 3. Если $f \in B(X, Y)$, $h \in \text{Hom}(X, Y)$, то

$$\delta^2(f, h) = \frac{|Y| - 1}{|X||Y|^2}.$$

Утверждение следует из предложения 1 и следствия 1.

Кстати, отсюда следует, что абсолютно негомоморфные функции не являются сбалансированными при $|Y| > 1$.

Предложение 4. Пусть $X = X_1 \times X_2$, где X_1, X_2 — аддитивные группы,

$$f_i: X_i \rightarrow Y, \quad i = 1, 2, \quad f = f_1 + f_2.$$

Тогда если одна из функций f_1, f_2 является сбалансированной, то f — сбалансированная функция и

$$f \in B(X, Y) \Leftrightarrow f_i \in B(X_i, Y), \quad i = 1, 2.$$

Доказательство очевидно.

Свойство абсолютной негомоморфности имеет следующую матричную интерпретацию.

Определение 2. Матрицу $(y_{a,x})_{a,x \in X}$ размера $|X| \times |X|$ с элементами из множества Y , строки и столбцы которой занумерованы элементами группы X , назовем X -матрицей над Y , если $y_{a,x} = y_{a',x'}$ для любых $a, x, a', x' \in X$ таких, что $a + x = a' + x'$. Множество всех X -матриц над Y обозначим через $M(X, Y)$.

Обозначим $K(X) = (a + x \mid a, x \in X)$ таблицу Кэли группы X . Очевидно, что отображение $Y^X \rightarrow M(X, Y)$, где

$$f \rightarrow f(K(X)) \tag{6}$$

является биекцией.

Определение 3. Назовем X -матрицу над Y бент-матрицей, если в разности любых двух ее строк с различными номерами все элементы из Y встречаются одинаковое число раз. Множество всех бент-матриц обозначим через $BM(X, Y)$.

Очевидно следующее утверждение.

Предложение 5. Соотношение (6) задает взаимно однозначное соответствие между множествами $B(X, Y)$ и $BM(X, Y)$.

В дальнейшем нам потребуется определение минимальной функции, которое уместно дать уже сейчас.

Определение 4. Функцию $f: X \rightarrow Y$ назовем минимальной, если она минимально близка ко всем гомоморфизмам, то есть

$$\delta(f, \text{Hom}(X, Y)) = \max_{f' \in Y^X} \delta(f', \text{Hom}(X, Y)).$$

Заметим, что из предложения 3 следует, что абсолютно негомоморфные функции одинаково близки к любому гомоморфизму, а предложение 2 означает, что свойство абсолютной негомоморфности инвариантно относительно любых эпиморфизмов группы Y . Последнее наводит нас на следующее определение.

Определение 5. Функцию $f: X \rightarrow Y$ назовем абсолютно минимальной, если для любого эпиморфизма $h: Y \rightarrow Y'$ функция $hf: X \rightarrow Y'$ минимальна.

Заметим, что минимальные функции существуют всегда, в отличие от абсолютно минимальных или абсолютно негомоморфных функций. В дальнейшем (теорема 8) мы покажем, что для примарного случая класс $B(X, Y)$ содержится в классе всех абсолютно минимальных функций, а для двоичного случая эти классы совпадают.

Далее нам потребуются следующие хорошо известные сведения об абелевых группах.

Всякая конечная аддитивная абелева группа X представляется в виде

$$X \cong \prod \mathbf{Z}/(m_i). \quad (7)$$

Поэтому всюду далее будем считать, что

$$X = \prod_{i=1}^k \mathbf{Z}/(m_i), \quad Y = \prod_{j=1}^t \mathbf{Z}/(n_j),$$

где $k, t, m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_t$ — произвольные натуральные числа.

Для каждого $\alpha = (\alpha_1 + (m_1), \dots, \alpha_k + (m_k)) \in X$ определим комплекснозначную функцию $\chi_\alpha: X \rightarrow \mathbf{C}$ равенством

$$\chi_{\alpha(x)} = \prod_{i=1}^k \exp\{(2\pi i/m_i)\alpha_i x_i\} = \exp\left\{2\pi i \sum_{i=1}^k \frac{1}{m_i} \alpha_i x_i\right\} \quad (8)$$

для всех $x = (x_1 + (m_1), \dots, x_k + (m_k)) \in X$. Эти функции обладают следующими свойствами: для любых $\alpha, \alpha' \in X$

χ_α — гомоморфизм (относительно умножения в $\mathbf{C}$);

$\chi_\alpha \neq \chi_{\alpha'}$ при $\alpha \neq \alpha'$;

$\chi_\alpha(\alpha') = \chi_{\alpha'}(\alpha)$;

$\chi_0 \equiv 1$.

Для $i = 1, \dots, k$ положим

$$e_i = ((m_1), \dots, (m_{i-1}), 1 + (m_i), (m_{i+1}), \dots, (m_k)).$$

Очевидно, что для любых $\alpha, x, x' \in X$

$$\begin{aligned} \chi_\alpha(x) &= \prod_{i=1}^k (\chi_{e_i}(x))^{\alpha_i}, \\ \{\chi_{e_i}(x) &= \chi_{e_i}(x'), i = 1, \dots, k\} \iff \{x = x'\}. \end{aligned}$$

Следовательно, отображение $X \rightarrow \mathbb{C}^k$, где

$$x \rightarrow (\chi_{e_1}(x), \dots, \chi_{e_k}(x)) \quad (9)$$

есть инъективный гомоморфизм. Отсюда следует, что с помощью соответствия (9) всегда можно занумеровать элементы произвольной абелевой группы комплекснозначными векторами, причем такая нумерация будет гомоморфной.

Из теории представлений групп следует, что $\{\chi_\alpha \mid \alpha \in X\}$ — множество всех неприводимых характеров абелевой группы X , причем относительно умножения оно является группой, изоморфной группе X . Следовательно, выполняются известные соотношения ортогональности

$$|X|^{-1}(\chi_\alpha, \chi_{\alpha'}) = \Delta(\alpha, \alpha') \quad (10)$$

для любых $\alpha, \alpha' \in X$, что равносильно условию

$$|X|^{-1} \sum_{\alpha \in X} \chi_\alpha(x) = \Delta(x, 0) \quad (11)$$

для любого $x \in X$.

Свойство (10) означает, что множество $\{\chi_\alpha \mid \alpha \in X\}$ является ортонормированным относительно скалярного произведения $|X|^{-1}(\cdot, \cdot)$ базисом векторного пространства $\mathbb{C}^X$ и, следовательно, любая функция $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$ однозначно представляется в виде

$$\varphi = \sum_{\alpha \in X} C_\alpha^\varphi \chi_\alpha, \quad (12)$$

где $C_\alpha^\varphi \in \mathbb{C}$ и

$$C_\alpha^\varphi = |X|^{-1}(\varphi, \chi_\alpha) \quad (13)$$

для всех $\alpha \in X$. Равенство (12) называют разложением Фурье функции φ , а C_α^φ , $\alpha \in X$, — коэффициентами Фурье функции φ . Они однозначно определяют функцию φ и обладают следующими свойствами:

$$|C_\alpha^\varphi| \leq \max_{x \in X} |\varphi(x)|, \quad (14)$$

$$C_0^\varphi = \mathbf{M}\varphi, \quad (15)$$

$$\sum_{\alpha \in X} |C_\alpha^\varphi|^2 = \mathbf{M}|\varphi|^2, \quad (16)$$

где $\mathbf{M}$ означает среднее значение. Равенство (16) называют равенством Парсеваля.

Разложение Фурье имеет следующую матричную интерпретацию. Матрицей характеров абелевой группы X называют матрицу $H = (\chi_\alpha(x))_{\alpha, x \in X}$. Она обладает следующими свойствами:

$\chi_\alpha(x) \in \sqrt[m]{1}$, где m — наименьшее общее кратное чисел $m_1, \dots, m_k$,

H — симметричная матрица,

$H, \bar{H} = |X|E$, где E — единичная матрица,

$$\chi_0(x) = \chi_\alpha(0) = 1 \text{ для всех } \alpha, x \in X,$$

$$\chi_\alpha(x)\chi_{\alpha'}(x) = \chi_{\alpha+\alpha'}(x) \text{ для всех } \alpha, \alpha', x \in X,$$

$$H = H_1 \otimes \dots \otimes H_k, \text{ где } H_i \text{ — матрица характеров группы } \mathbf{Z}/(m_i), i = 1, \dots, k,$$

преобразование $\varphi \rightarrow C^\varphi$, где $C^\varphi: \alpha \rightarrow C_\alpha^\varphi$, множества $\mathbf{C}^X$ является автоморфизмом векторного пространства $\mathbf{C}^X$, матрица которого относительно стандартного базиса есть $|X|^{-1}H$ (это преобразование называют преобразованием Фурье).

Определение 6. Матрицей Адамара порядка n степени m называют $n \times n$ матрицу $A = (a_{ij})$ над множеством $\sqrt[m]{1} \in \mathbf{C}$, обладающую свойством

$$A\bar{A}^T = nE.$$

Если $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$, то A называют нормализованной матрицей Адамара.

Таким образом, матрица характеров конечной абелевой группы есть симметричная матрица Адамара, множество строк которой замкнуто относительно умножения. Наоборот, всякая симметричная матрица Адамара с замкнутым относительно умножения множеством строк есть матрица характеров группы строк этой матрицы.

Для гомоморфизма $h \in \text{Hom}(X, Y)$ определим $k \times t$ матрицу $A_h = (a_{i,j} + (n_j))$ гомоморфизма h равенствами

$$h(e_i) = (a_{i,1} + (n_1), \dots, a_{i,t} + (n_t)), \quad i = 1, \dots, k.$$

Она обладает следующими свойствами:

$$n_j/[m_i, n_j] \mid a_{i,j} \quad (17)$$

для любых $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, t$ (здесь и далее $[r_1, \dots, r_s]$ — наибольший общий делитель чисел $r_1, \dots, r_s$ и $a \mid b$ означает, что a делит b),

$$h((x_1 + (m_1), \dots, x_k + (m_k))) = (x_1, \dots, x_k)A_h \quad (18)$$

для любых $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{Z}$ и, следовательно, матрица A_h однозначно определяет гомоморфизм h . Наоборот, если $A = (a_{i,j} + (n_j))$ — произвольная $k \times t$ матрица, обладающая свойством (17), то соответствие $h_A: X \rightarrow Y$, определяемое равенством

$$h_A((x_1 + (m_1), \dots, x_k + (m_k))) = (x_1, \dots, x_k)A,$$

является гомоморфизмом групп. Таким образом, между $\text{Hom}(X, Y)$ и всеми матрицами со свойством (17) существует взаимно однозначное соответствие и, следовательно,

$$|\text{Hom}(X, Y)| = \prod_{i=1, \dots, k, j=1, \dots, t} [m_i, n_j].$$

Пусть теперь $\{\eta_\beta \mid \beta \in Y\}$ — множество всех неприводимых характеров группы Y , определяемое в соответствии с равенством (8) для Y . Тогда для любых $\beta \in Y$, $h \in \text{Hom}(X, Y)$ композиция $\eta_\beta h$ — гомоморфизм и, следовательно,

$$\eta_\beta h = \chi_\alpha \quad (19)$$

для некоторого $\alpha \in X$. Пусть $\beta = (\beta_1 + (n_1), \dots, \beta_t + (n_t))$ и $A_h = (a_{i,j} + (n_j))$ — матрица размера $k \times t$. Тогда непосредственно из определений получаем, что равенство (19) выполняется для $\alpha = (\alpha_1 + (m_1), \dots, \alpha_k + (m_k))$, где

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^t \frac{m_i a_{i,j}}{n_j} \beta_j, \quad i = 1, \dots, k. \quad (20)$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Следующие утверждения равносильны:*

- (1) $\{\eta_\beta h \mid \beta \in Y, h \in \text{Hom}(X, Y)\} = \{\chi_\alpha \mid \alpha \in X\}$,
- (2) $\{\eta_e h \mid h \in \text{Hom}(X, Y)\} = \{\chi_\alpha \mid \alpha \in X\}$, где $e = (1 + (n_1), \dots, 1 + (n_t))$,
- (3) $[m_i / [m_i, n_1], \dots, m_i / [m_i, n_t]] = 1$ для любого $i = 1, \dots, k$,
- (4) наименьшее общее кратное чисел $m_1, \dots, m_k$ делит наименьшее общее кратное чисел $n_1, \dots, n_t$.

Доказательство. Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (3). Пусть

$$[m_i / [m_i, n_1], \dots, m_i / [m_i, n_t]] = d_i > 1.$$

Тогда в силу (20) и (17)

$$\alpha_i + (m_i) = \sum_{j=1}^t (m_i / [m_i, n_j]) (a_{i,j} / (n_j / [m_i, n_j])) \beta_j + (m_i) \neq 1 + (m_i)$$

для любых $\beta \in Y$ и $h \in \text{Hom}(X, Y)$, что противоречит утверждению (1) леммы.

Докажем теперь, что (3) $\Rightarrow$ (2). Из (3) следует, что для любого $i = 1, \dots, k$ найдутся числа $a'_{i,1}, \dots, a'_{i,t} \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$1 = \sum_{j=1}^t \frac{m_i}{[m_i, n_j]} a'_{i,j}.$$

Тогда для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^t \frac{m_i a_{i,j}}{n_j}, \quad a_{i,j} = (\alpha_i a'_{i,j}) \frac{n_j}{[m_i, n_j]},$$

и в силу (17) и (20) условие (2) выполнено.

Наконец, то, что (2) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Leftrightarrow$ (4), очевидно. Лемма доказана.

Пусть всюду далее $\{\chi_\alpha \mid \alpha \in X\}$ и $\{\eta_\beta \mid \beta \in Y\}$ — множества всех неприводимых характеров абелевых групп X и Y , определяемые в соответствии с формулой (8). Кроме того, пусть $\{\eta_\beta^{[j]} \mid \beta \in \mathbb{Z}/(n_j)\}$ — множество всех неприводимых характеров группы $\mathbb{Z}/(n_j)$. Очевидно, что

$$\eta_\beta = \prod_{j=1}^t \eta_{\beta_j}^{[j]} \quad (21)$$

для любого $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t) \in Y$.

Для любой функции $f: X \rightarrow Y$ через $f^{(1)}, \dots, f^{(t)}$ будем обозначать координатные функции отображения f , то есть $f^{(j)}: X \rightarrow \mathbf{Z}/(n_j)$ и $f(x) = (f^{(1)}(x), \dots, f^{(t)}(x))$ для всех $x \in X$.

Определение 7. Характерами отображения $f: X \rightarrow Y$ будем называть отображения $\eta_\beta f: X \rightarrow \mathbf{C}$ для всех $\beta \in Y$. При

$$\beta = e_j = ((n_1), \dots, (n_{j-1}), 1 + (n_j), (n_{j+1}), \dots, (n_t)), \quad j = 1, \dots, t$$

назовем их базисными.

В силу (9) базисные характеры однозначно определяют функцию f , причем

$$\eta_\beta f = \prod_{j=1}^t (\eta_{e_j} f)^{\beta_j} \quad (22)$$

для любого $\beta = (\beta_1 + (n_1), \dots, \beta_t + (n_t)) \in Y$, а также

$$\eta_{e_j} f = \eta_{1+(n_j)}^{[j]} f^{(j)} \quad (23)$$

для любого $j = 1, \dots, t$, так что базисные характеры являются базисными характерами координатных функций.

Определение 8. Производящей функцией отображения $f: X \rightarrow Y$ называется (см. [1]) функция $\varphi_f: Y \rightarrow \mathbf{C}$, определяемая равенством

$$\varphi_f(\beta) = \mathbf{M} \eta_\beta f = |X|^{-1} \sum_{x \in X} \eta_\beta(f(x)).$$

Очевидно, что

$$\varphi_f = \sum_{y \in Y} \mathbf{P}(f = y) \eta_y, \quad (24)$$

и в силу (13)

$$\mathbf{P}(f = y) = |Y|^{-1} (\varphi_f, \eta_y) \quad (25)$$

для любого $y \in Y$. Следовательно, по производящей функции φ_f однозначно определяется распределение случайной величины f и, в частности,

$$\{f \text{ — сбалансированная функция}\} \iff \{\varphi_f(\beta) = 0 \text{ для любого } \beta \neq 0\}. \quad (26)$$

В силу (12) и (13) разложение Фурье характера отображения f имеет вид

$$\eta_\beta f = \sum_{\alpha \in X} C_\alpha^{\eta_\beta f} \chi_\alpha, \quad (27)$$

где

$$C_\alpha^{\eta_\beta f} = |X|^{-1} (\eta_\beta f, \chi_\alpha).$$

Отсюда следует, что коэффициенты Фурье базисных характеров функции f

$$C_{\alpha}^{\eta_{\epsilon_j} f}, \quad j = 1, \dots, t, \quad \alpha \in X$$

однозначно определяют функцию f (количество этих чисел равно $t|X|$). Из (14)–(16) получаем, что

$$|C_{\alpha}^{\eta_{\epsilon_j} f}| \leq 1, \quad (28)$$

$$C_0^{\eta_{\beta} f} = \varphi_f(\beta), \quad (29)$$

$$\sum_{\alpha \in X} |C_{\alpha}^{\eta_{\beta} f}|^2 = 1. \quad (30)$$

(последнее равенство есть равенство Парсеваля).

Кроме того, очевидны равенства

$$\varphi_{f_1 - f_2}(\beta) = \sum_{\alpha \in X} C_{\alpha}^{\eta_{\beta} f_1} \bar{C}_{\alpha}^{\eta_{\beta} f_2}, \quad (31)$$

$$\delta^2(f_1, f_2) = |Y|^{-2} \sum_{0 \neq \beta \in Y} |\varphi_{f_1 - f_2}(\beta)|^2, \quad (32)$$

$$C_{\alpha}^{\eta_{\beta}(b+fa)} = \eta_{\beta}(b) \chi_{\alpha}(a) C_{\alpha}^{\eta_{\beta} f} \quad (33)$$

для любых $a \in X$ и $b \in Y$, а также

$$\varphi_{f_{a_1} - f_{a_2}}(\beta) = \sum_{\alpha \in X} |C_{\alpha}^{\eta_{\beta} f}|^2 \chi_{\alpha}(a_1 - a_2) \quad (34)$$

для любых $a_1, a_2 \in X$.

Из (34) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Для любых $f_1: X \rightarrow Y$ и $f_2: X \rightarrow Y$ следующие утверждения равносильны:

$\mathbf{P}(f_1 - f_1 a = y) = \mathbf{P}(f_2 - f_2 a = y)$ для любых $a \in X$, $y \in Y$,

$|C_{\alpha}^{\eta_{\beta} f_1}| = |C_{\alpha}^{\eta_{\beta} f_2}|$ для любых $\alpha \in X$, $\beta \in Y$.

Из (30) вытекает следующее утверждение.

Предложение 6. Для любых $f: X \rightarrow Y$ и $\beta \in Y$

$$\max_{\alpha \in X} |C_{\alpha}^{\eta_{\beta} f}| \geq |X|^{-1/2},$$

причем следующие утверждения равносильны:

$$\max_{\alpha \in X} |C_{\alpha}^{\eta_{\beta} f}| = |X|^{-1/2},$$

$$|C_{\alpha'}^{\eta_{\beta} f}| = |X|^{-1/2} \text{ для всех } \alpha \in X,$$

$$|C_{\alpha}^{\eta_{\beta} f}| = |C_{\alpha'}^{\eta_{\beta} f}| \text{ для любых } \alpha, \alpha' \in X.$$

Это предложение приводит нас к следующему определению.

Определение 9. Функцию $f: X \rightarrow Y$ назовем бент-функцией, если для любых $\alpha, \alpha' \in X, \beta \in Y \setminus \{0\}$

$$|C_{\alpha}^{\eta_{\beta}f}| = |C_{\alpha'}^{\eta_{\beta}f}|.$$

Это определение обобщает определения работ [4] (для булевых функций), [1] (для $X = GF(q)^n, Y = GF(q)$) и может быть сведено к определению работы [2], где бент-функции определяются как комплекснозначные функции на конечной абелевой группе с единичными модулями всех значений и условием равномодульности всех коэффициентов Фурье.

Следующая теорема обобщает соответствующие результаты работ [4], [1] и следует из свойства (26) и результатов работы [2].

Теорема 3. Для любой функции $f: X \rightarrow Y$ следующие свойства равносильны:

- (1) f — абсолютно негомоморфная функция,
- (2) f — бент-функция,
- (3) $\{\eta_{\beta}f_a \mid a \in X\}$ — ортонормированный относительно $|X|^{-1}(\cdot, \cdot)$ базис пространства C^X для любого $\beta \in Y \setminus \{0\}$.

Доказательство. В силу определения 1 и свойства (26) условие (1) равносильно условию

$$\varphi_{f-f_a}(\beta) = 0$$

для всех $a \in X \setminus \{0\}, \beta \in Y \setminus \{0\}$, которое в силу определения 8 и теоремы 1 работы [2] равносильно условию

$$|C_{\alpha}^{\eta_{\beta}f}|^2 = |X|^{-1}$$

для всех $\beta \in Y \setminus \{0\}, \alpha \in X$, и в силу предложения 6 равносильность (1) и (2) доказана. Равносильность (2) и (3) следует из теоремы 2 работы [2]. Теорема доказана.

Заметим, что свойство (3) теоремы 3 приводит к следующей интерпретации бент-функций из $B(X, Y)$ матрицами Адамара. Для каждого $f: X \rightarrow Y$ и $\beta \in Y$ рассмотрим матрицу

$$A_{\beta, f} = (\eta_{\beta}f(a + x))_{a, x \in X}$$

размера $|X| \times |X|$, строки и столбцы которой занумерованы элементами множества X . Эта матрица является X -матрицей (определение 2), так как

$$A_{\beta, f} = \eta_{\beta}f(K(X)),$$

где $K(X)$ — таблица Кэли группы X . Если $\beta \neq 0$ и $f \in B(X, Y)$, то по теореме 3 матрица $A_{\beta, f}$ — матрица Адамара (определение 2). Обозначим через $AM(X, \sqrt[n]{1})$ множество всех X -матриц над $\sqrt[n]{1}$, являющихся матрицами Адамара степени n . Тогда из (23), (6) и теоремы 3 следует, что соответствие

$$B(X, Y) \rightarrow AM(X, \sqrt[n]{1}) \times \dots \times AM(X, \sqrt[n]{1}),$$

где

$$f \rightarrow (\eta_{e_1}f(K(X)), \dots, \eta_{e_t}f(K(X))),$$

является инъективным отображением.

Следующая теорема распространяет известный результат работы [3] для булевых функций на случай абелевых групп. Она утверждает, что набор расстояний от функции f до всех функций вида $y + h$, где $y \in Y$, $h \in \text{Hom}(X, Y)$, однозначно определяет функцию f .

Теорема 4. Пусть m_i делит n_j при любых $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, t$. Тогда для любой $f: X \rightarrow Y$ набор чисел

$$\{\mathbf{P}(f = y + h) \mid y \in Y, h \in \text{Hom}(X, Y)\}$$

однозначно определяет функцию f .

Доказательство. Покажем, что по указанному набору вероятностей однозначно определяются координатные функции $f^{(1)}, \dots, f^{(t)}$. Пусть $1 \leq j \leq t$. Для любого $h' \in \text{Hom}(X, \mathbf{Z}/(n_j))$ существует $h \in \text{Hom}(X, Y)$ такой, что $h^{(j)} = h'$ и, следовательно, мы можем определить числа

$$\mathbf{P}(f^{(j)} = y' + h') = \sum_{y=(y_1, \dots, y_t) \in Y, y_j=y'} \mathbf{P}(f = y + h)$$

для всех $y' \in \mathbf{Z}/(n_j)$, $h' \in \text{Hom}(X, \mathbf{Z}/(n_j))$, то есть производящую функцию $\varphi_{f^{(j)} - h'}$. Из того, что m_i делит n_j при всех $i = 1, \dots, k$, следует, что условие (4) леммы 1 для X и $\mathbf{Z}/(n_j)$ выполнено и, следовательно, для любого $\alpha \in X$ существует гомоморфизм $h' \in \text{Hom}(X, \mathbf{Z}/(n_j))$ такой, что

$$\chi_\alpha = \eta_{1+(n_j)}^{[j]} h',$$

и в силу (30)

$$\varphi_{f^{(j)} - h'}(1 + (n_j)) = C_\alpha^{\eta_{1+(n_j)}^{[j]} f^{(j)}}.$$

Тем самым, базисный характер функции $f^{(j)}$ определяется однозначно, а следовательно, и $f^{(j)}$ определяется однозначно. Теорема доказана.

Пусть всюду далее $X = (\mathbf{Z}/(m))^k$, $Y = (\mathbf{Z}/(m))^t$. Заметим, что этот случай включает рассмотренный в [1] случай $X = GF(q)^{k'}$, $Y = GF(q)^{t'}$, так как здесь имеют место изоморфизмы абелевых групп $X \cong (\mathbf{Z}/(p))^{rk'}$, $Y \cong (\mathbf{Z}/(p))^{rt'}$. Заметим также, что при $r \geq 2$ гомоморфизмов абелевых групп $X \rightarrow Y$ больше, чем линейных отображений $GF(q)$ -пространств $X \rightarrow Y$, так как $|\text{Hom}(X, Y)| = p^{r^2 k' t'}$, а число линейных отображений равно $p^{rk' t'}$.

Прежде всего опишем $\text{Hom}(X, Y)$. В соответствии с (18) любой гомоморфизм $h \in \text{Hom}(X, Y)$ однозначно представляется в виде

$$h((x_1 + (m), \dots, x_k + (m))) = (x_1, \dots, x_k) A_h,$$

где $k \times t$ матрица $A_h = (a_{i,j} + (m))$ и числа $a_{i,j}$ могут быть любыми, так что $|\text{Hom}(X, Y)| = m^{kt}$. В силу (20) для любых $h \in \text{Hom}(X, Y)$, $\beta \in Y$

$$\eta_\beta h = \chi_{\beta A_h^T}, \quad (35)$$

и в силу (34) и (32)

$$\varphi_{f-h}(\beta) = C_{\beta A_h^T}^{\eta_{\beta} f}, \quad (36)$$

$$\delta^2(f, h) = |Y|^{-2} \sum_{0 \neq \beta \in Y} |C_{\beta A_h^T}^{\eta_{\beta} f}|^2 \quad (37)$$

для любой $f: X \rightarrow Y$.

Следующие две теоремы сводят многомерный случай к одномерному и обобщают теорему 3 из [1].

Теорема 5. Для любой функции $f: X \rightarrow Y$ следующие свойства равносильны:

- (1) f — сбалансированная функция,
- (2) hf — сбалансированная функция для любого эпиморфизма $h: Y \rightarrow \mathbf{Z}/(m)$.

Доказательство. Очевидно, что (1) $\Rightarrow$ (2), так как гомоморфизмы сбалансированы.

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть

$$0 \neq \beta = (\beta_1 + (m), \dots, \beta_t + (m)) \in Y, \quad d = (\beta_1, \dots, \beta_t), \quad b = \frac{1}{d}\beta,$$

и $h_b: Y \rightarrow \mathbf{Z}/(m)$ — гомоморфизм с матрицей b^T . Тогда $h_b(Y) \ni 1 + (m)$, так что h_b сюръективен, причем $\eta'_{d+(m)} h_b = \eta_{db} = \eta_{\beta}$. Поскольку $h_b f$ — сбалансированная функция и $d \neq 0$, в силу (26) и (29)

$$0 = C_0^{\eta'_{d+(m)}(h_b f)} = C_0^{\eta_{\beta} f}.$$

Поскольку β — произвольный ненулевой элемент, снова в силу (26) и (29) f — сбалансированная функция. Теорема доказана.

Из этой теоремы, определения 1 и теоремы 3 сразу получаем следующую теорему.

Теорема 6. Для любой функции $f: X \rightarrow Y$ следующие свойства равносильны:

- (1) f — бент-функция,
- (2) hf — бент-функция для любого эпиморфизма $h: Y \rightarrow \mathbf{Z}/(m)$.

Заметим, что утверждение (2) теоремы 5 (теорема 6) означает, что для любого $c = (c_1, \dots, c_t) \in Y$, $c \neq 0$,

$$\sum_{j=1}^t c_j f^{(j)}$$

— сбалансированная функция (бент-функция).

Рассмотрим теперь вопрос о том, как связаны понятия бент-функции и минимальной функции (определение 4). Для краткости обозначим

$$\delta_0(X, Y) = \min_{f \in Y^X} \delta(f, \text{Hom}(X, Y))$$

минимальную близость функции к гомоморфизмам. Дальнейшие рассуждения удастся провести лишь для случая простого модуля m .

Лемма 2. Если m — простое число, то для любых $f: X \rightarrow Y$, $\beta \in Y \setminus \{0\}$

$$|\text{Hom}(X, Y)|^{-1} \sum_{h \in \text{Hom}(X, Y)} |\varphi_{f-h}(\beta)|^2 = |X|^{-1}, \quad (38)$$

$$|\text{Hom}(X, Y)|^{-1} \sum_{h \in \text{Hom}(X, Y)} \delta^2(f, h) = \frac{|Y| - 1}{|X||Y|^2}, \quad (39)$$

$$\delta_0(X, Y) \geq \left(\frac{|Y| - 1}{|X||Y|^2} \right)^{1/2}. \quad (40)$$

Доказательство. В силу (36)

$$m^{-kt} \sum_h |\varphi_{f-h}(\beta)|^2 = m^{-kt} \sum_{A'} |C_{\beta A'}^{\eta_{\beta} f}|^2.$$

Отображение $A' \rightarrow \beta A'$ является гомоморфизмом аддитивной абелевой группы всех $t \times k$ матриц над $\mathbb{Z}/(m)$ в группу X . Поскольку $\beta \neq 0$ и m — простое число, этот гомоморфизм сюръективен. Следовательно, в силу (30) это равенство можно продолжить следующим образом:

$$m^{-kt} \sum_{A'} |C_{\beta A'}^{\eta_{\beta} f}|^2 = m^{-kt} \sum_{\alpha \in X} m^{kt} |X|^{-1} |C_{\alpha}^{\eta_{\beta} f}|^2 = |X|^{-1},$$

и равенство (38) доказано.

В силу (37) и доказанного равенства

$$\begin{aligned} m^{-kt} \sum_h \delta^2(f, h) &= m^{-kt} \sum_h |Y|^{-2} \sum_{\beta \neq 0} |\varphi_{f-h}(\beta)|^2 \\ &= |Y|^{-2} \sum_{\beta \neq 0} m^{-kt} \sum_h |\varphi_{f-h}(\beta)|^2 = \frac{|Y| - 1}{|X||Y|^2} \end{aligned}$$

и равенство (39) доказано.

В силу равенства (39), неравенство (40) очевидно. Лемма доказана.

Теорема 7. Если m — простое число, то для любой функции $f: X \rightarrow Y$ следующие свойства равносильны:

- (1) f — минимальная функция $\delta_0(X, Y) = ((|Y| - 1)/(|X||Y|^2))^{1/2}$,
- (2) $\delta(f, h) = \delta(f, h')$ для любых $h, h' \in \text{Hom}(X, Y)$,
- (3) $\delta(f, h) = ((|Y| - 1)/(|X||Y|^2))^{1/2}$ для любого $h \in \text{Hom}(X, Y)$.

Доказательство. Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (3). По определению минимальности

$$\max_{h \in \text{Hom}(X, Y)} \delta^2(f, h) = \frac{|Y| - 1}{|X||Y|^2},$$

и свойство (3) выполнено в силу равенства (39) леммы 2.

Соотношение (3) $\Rightarrow$ (2) очевидно.

Наконец, докажем, что $(2) \Rightarrow (1)$. Из равенства (39) следует, что

$$\delta(f, \text{Hom}(X, Y)) = \left(\frac{|Y| - 1}{|X||Y|^2} \right)^{1/2},$$

и по определению

$$\delta_0(X, Y) \leq \left(\frac{|Y| - 1}{|X||Y|^2} \right)^{1/2}.$$

Тогда в силу (40), свойство (1) выполняется. Теорема доказана.

Теорема 8. Если m — простое число и $B(X, Y) \neq \emptyset$, то любая бент-функция является абсолютно минимальной и

$$\delta_0(X, Y) = \left(\frac{|Y| - 1}{|X||Y|^2} \right)^{1/2}.$$

Если $m = 2$ и $B(X, Y) \neq \emptyset$, то в Y^X класс всех бент-функций совпадает с классом всех абсолютно минимальных функций.

Доказательство. Первое утверждение теоремы является очевидным следствием предложения 3, утверждения (3) из теоремы 7 и предложения 2.

Докажем второе утверждение. Пусть функция $f: X \rightarrow Y$ абсолютно минимальна и $h: Y \rightarrow \mathbf{Z}/(m)$ — произвольный эпиморфизм. Тогда hf минимальна, и в силу предложения 3, теоремы 7 и (37)

$$|X|^{-1} 2^{-2} = \delta^2(hf, h') = 2^{-2} |C_\alpha^{\eta_\beta hf}|^2$$

для любого гомоморфизма $h: X \rightarrow \mathbf{Z}/(m)$, где $\beta = 1 + (2)$, $\alpha = A_h^T \in X$. Тогда hf — бент-функция. Поскольку h — произвольный эпиморфизм, по теореме 6 f — бент-функция. Теорема доказана.

Наконец, отметим, что в [1] доказано, что при простом m , если $2t$ делит k или t делит k при $m \neq 2$, то $B(X, Y) \neq \emptyset$.

Список литературы

1. Амбросимов А. С., Свойства бент-функций q -значной логики над конечными полями. *Дискретная математика* (1994) 6, №3, 216–226.
2. Логачев О. С., Сальников А. А., Ященко В. В., Бент-функции на конечной абелевой группе. *Дискретная математика* (1997) 9, №4, 3–20.
3. Golomb S. W., On the classification of Boolean functions. *IRE Trans. Circuit Theory* (1959) 1, №6, 10–27.
4. Rothaus O. S., On “bent” functions. *J. Comb. Theory. Ser. A* (1976) 20, №3, 300–305.

Статья поступила 18.02.2000.

Переработанный вариант поступил 13.02.2001.