Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Об асимптотике вероятностей больших уклонений для отрицательного полиномиального распределения, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 1, 75–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 08:42:49

Об асимптотике вероятностей больших уклонений для отрицательного полиномиального распределения

© 2002 г. А. Н. Тимашёв

Рассматривается полиномиальная схема испытаний, в которой имеется $N+1$ исходов $E_0, E_1, \dots, E_N$ с вероятностями $p_0, p_1, \dots, p_N$ соответственно. Предполагается, что испытания проводятся до r -й реализации исхода E_0 , $r = 1, 2, \dots$. Если $\eta_j(r)$ — число реализаций исхода E_j в момент остановки испытаний, $j = 1, \dots, N$, и $\eta(r) = (\eta_1(r), \dots, \eta_N(r))$, то вектор $\eta(r)$ имеет отрицательное полиномиальное распределение. В предположении, что $N \in \mathbb{N}$ и положительные вероятности $p_0, p_1, \dots, p_N$ фиксированы, и $r \rightarrow \infty$ и $k_1, \dots, k_N \rightarrow \infty$ так, что параметры $\beta_j = k_j/r$ удовлетворяют неравенствам $\beta_j \geq \varepsilon$, где ε — положительная постоянная, $j = 1, \dots, N$, и некоторым дополнительным условиям, найдены асимптотические оценки вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}\{\eta_j(r) \leq k_j, j = 1, \dots, N\}$ и $\mathbf{P}\{\eta_j(r) \geq k_j, j = 1, \dots, N\}$. Для получения нужных асимптотических оценок используется многомерный метод перевала в варианте И. Гуда.

Рассмотрим полиномиальную схему испытаний, в которой имеется $N+1$ исходов $E_0, E_1, \dots, E_N$. Всюду далее $N \in \mathbb{N}$ фиксировано. Пусть p_j — вероятность исхода E_j в каждом испытании, $j = 0, 1, \dots, N$, $p_0 + p_1 + \dots + p_N = 1$. Будем предполагать, что положительные вероятности $p_0, p_1, \dots, p_N$ фиксированы. Если испытания проводятся до r -й реализации исхода E_0 , $r = 1, 2, \dots$ и $\eta(r) = (\eta_1(r), \dots, \eta_N(r))$, где $\eta_j(r)$ — число реализаций исхода E_j в момент остановки испытаний, $j = 1, \dots, N$, то

$$\mathbf{P}\{\eta(r) = k\} = \frac{(k_1 + \dots + k_N + r - 1)!}{(r - 1)! k_1! \dots k_N!} p_0^r \prod_{j=1}^N p_j^{k_j}, \quad (1)$$

где $k = (k_1, \dots, k_N)$ и $k_1, \dots, k_N$ — целые неотрицательные числа.

Формула (1) определяет так называемое отрицательное полиномиальное распределение случайного вектора $\eta(r)$. Это распределение можно рассматривать как многомерный аналог отрицательного биномиального распределения, получаемого из (1) при $N = 1$. Подробную информацию об отрицательном полиномиальном распределении (включая и его асимптотический анализ при $r \rightarrow \infty$) можно найти в [1]. Из

результатов, изложенных в [1], в частности, следует, что

$$\mathbf{E}\eta_j(r) = \frac{rp_j}{p_0}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$\mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^N z_j^{\eta_j(r)} \right) = p_0^r (f(z_1, \dots, z_N))^r, \quad (3)$$

где

$$f(z_1, \dots, z_N) = \left(1 - \sum_{j=1}^N p_j z_j \right)^{-1}. \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) получаем, что в обозначениях (1)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta(r) = k\} &= \mathbf{P}\{\eta_j(r) = k_j; j = 1, \dots, N\} \\ &= \frac{p_0^r}{(2\pi i)^N} \oint \dots \oint \frac{(f(z_1, \dots, z_N))^r}{z_1^{k_1+1} \dots z_N^{k_N+1}} dz_1 \dots dz_N, \end{aligned} \quad (5)$$

где интегрирование осуществляется по пути $A_1 \times \dots \times A_N$ в $\mathbf{C}^N$ и A_j — окружность $|z_j| = R_j > 0$ с центром в нуле, пробегаемая в положительном направлении, $j = 1, \dots, N$, причем

$$\sum_{j=1}^N p_j R_j < 1. \quad (6)$$

В статье, исходя из интегрального представления (5), найдены асимптотические оценки вероятностей больших уклонений

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_j(r) \geq k_j, j = 1, \dots, N\}, \\ \mathbf{P}\{\eta_j(r) \leq k_j, j = 1, \dots, N\} \end{aligned}$$

в предположении, что $r \rightarrow \infty$ and $k_1, \dots, k_N \rightarrow \infty$ так, что

$$\beta_j = \frac{k_j}{r} \geq \varepsilon > 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (7)$$

где ε — постоянная, а также при некоторых дополнительных условиях на параметры $\beta_1, \dots, \beta_N$. При этом используется многомерный метод перевала в варианте И. Гуда (см. [2], с. 136–137). В идейном плане изложение следует статье автора [3], где получены аналогичные оценки вероятностей больших уклонений для полиномиального распределения (хотя в рассматриваемой ситуации соответствующие результаты формулируются несколько сложнее).

Лемма 1. Пусть $r \rightarrow \infty$ и $k_1, \dots, k_N \rightarrow \infty$ так, что справедливо условие (7). Тогда равномерно относительно $\beta_1, \dots, \beta_N$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta(r) = k\} &= \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \dots \beta_N (1 + \beta)}} (2\pi r)^{-N/2} \\ &\times (1 + \beta)^{r(1+\beta)} \exp(-rI(\beta_1, \dots, \beta_N))(1 + O(1/r)), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$I(\beta_1, \dots, \beta_N) = \sum_{j=1}^N \beta_j \ln \frac{\beta_j}{p_j} - \ln p_0 > 0, \quad (9)$$

$$\beta = \sum_{j=1}^N \beta_j. \quad (10)$$

Доказательство. Оценка (8) обосновывается с помощью формулы Стирлинга, если подставить в (1) значения $k_j = r\beta_j$, $j = 1, \dots, N$, и использовать (7), (9) и (10). Лемма 1 доказана.

В частности, если при условиях леммы 1 все числа $p_j/p_0 = \mathbf{E}\eta_j(r)/r$ (см. (2)) рациональны и $\beta_j = p_j/p_0$, $j = 1, \dots, N$, то из (8) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\eta(r) = k\} = \frac{p_0^{(N+1)/2}}{\sqrt{p_1 \dots p_N}} (2\pi r)^{-N/2} (1 + O(1/r)).$$

Последнее равенство является частным случаем локальной нормальной теоремы для случайного вектора $\eta(r) = (\eta_1(r), \dots, \eta_N(r))$ (общий случай см. в [1])

Лемма 2. Если $k_1, \dots, k_N$ — целые неотрицательные числа, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_j(r) \geq k_j, j = 1, \dots, N\} \\ = \frac{p_0^r}{(2\pi i)^N} \oint \dots \oint \frac{(f(z_1, \dots, z_N))^r}{z_1^{k_1+1} \dots z_N^{k_N+1}} \prod_{j=1}^N (1 - z_j^{-1})^{-1} dz_1 \dots dz_N, \end{aligned} \quad (11)$$

где функция $f(z_1, \dots, z_N)$ определяется согласно (4) и интегрирование осуществляется по тому же пути, что и в (5), для которого выполнено условие (6) и неравенства

$$R_j > 1, \quad j = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Доказательство. При выполнении условий леммы 2 и (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_j(r) \geq k_j, j = 1, \dots, N\} &= \sum_{l_1=k_1}^{\infty} \dots \sum_{l_N=k_N}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta_j(r) = l_j, j = 1, \dots, N\} \\ &= \frac{p_0^r}{(2\pi i)^N} \oint \dots \oint \frac{(f(z_1, \dots, z_N))^r}{z_1 \dots z_N} \sum_{l_1=k_1}^{\infty} z_1^{-l_1} \dots \sum_{l_N=k_N}^{\infty} z_N^{-l_N} dz_1 \dots dz_N. \end{aligned}$$

Суммируя геометрические прогрессии под знаком многомерного интеграла и учитывая (12), получаем (11). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $r \rightarrow \infty$ и $k_1, \dots, k_N \rightarrow \infty$ так, что $\beta_j = k_j/r$ — фиксированные положительные числа, для которых

$$\beta_j/(1 + \beta) > p_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_j(r) \geq k_j, j = 1, \dots, N\} = \mathbf{P}\{\eta(r) = k\} \prod_{j=1}^N (1 - p_j(1 + \beta)/\beta_j)^{-1} (1 + O(1/r)), \quad (14)$$

где вероятность $\mathbf{P}\{\eta(r) = k\}$ и величина β определяются согласно (8), (9), (10).

Доказательство. Заметим, что при условиях теоремы 1 выполняются неравенства (7), поэтому согласно лемме 1 справедливо равенство (8). Чтобы получить из (8) оценку (14), используем интегральное представление (11). Для оценки интеграла в (11) применим многомерный метод перевала. Точки перевала подынтегральной функции (без учета фигурирующего в выражении этой функции произведения) определяются из системы уравнений

$$rz_j \frac{\partial d}{\partial dz_j} f(z_1, \dots, z_N) = k_j f(z_1, \dots, z_N), \quad j = 1, \dots, N.$$

Подставляя значение $f(z_1, \dots, z_N)$ из (4) и $k_j = r\beta_j$, $j = 1, \dots, N$, получаем эквивалентную систему

$$pz_j z_j = \beta_j \left(1 - \sum_{i=1}^N p_i z_i\right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Решение системы (15) будем искать в виде $z_j = R_j > 0$, $j = 1, \dots, N$. Такое решение определяется равенствами

$$R_j = \frac{\beta_j}{p_j(1 + \beta)}, \quad j = 1, \dots, N.$$

При условиях теоремы 1 из (10) следует, что $\beta > 0$, поэтому $p_1 R_1 + \dots + p_N R_N = \beta/(1 + \beta) < 1$, то есть выполнено условие (6). Кроме того, из (13) следует (12). Таким образом, при условиях теоремы 1 справедливо интегральное представление (11). При этом

$$f(R_1, \dots, R_N) = 1 + \beta. \quad (16)$$

Согласно [2], с учетом (16) справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_j(r) \geq k_j, j = 1, \dots, N\} \\ &= p_0^r \prod_{j=1}^N (1 - p_j(1 + \beta)/\beta_j)^{-1} \frac{(f(R_1, \dots, R_N))^r}{(2\pi r)^{N/2} R_1^{k_1} \dots R_N^{k_N} \sqrt{\Delta}} (1 + O(1/r)) \\ &= \prod_{j=1}^N (1 - p_j(1 + \beta)/\beta_j)^{-1} (2\pi r)^{-N/2} (1 + \beta)^{r(1+\beta)} \\ & \quad \times \exp(-rI(\beta_1, \dots, \beta_N)) \Delta^{-1/2} (1 + O(1/r)), \end{aligned} \quad (17)$$

где величина $I(\beta_1, \dots, \beta_N)$ определяется в (9) и $\Delta = \det(\Delta_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$, причем при $i \neq j$

$$\Delta_{ij} = z_i \frac{\partial d}{\partial dz_i} \left(z_j \frac{\partial d}{\partial dz_j} (\ln f) \right) (R_1, \dots, R_N) = \beta_i \beta_j$$

и при $i = j$

$$\Delta_{ii} = z_i \frac{\partial d}{\partial dz_i} \left(z_i \frac{\partial d}{\partial dz_i} (\ln f) \right) (R_1, \dots, R_N) = \beta_i (1 + \beta_i).$$

Следовательно,

$$\Delta = \beta_1 \dots \beta_N (1 + \beta) > 0. \quad (18)$$

Из оценок (8), (17) и равенства (18) получаем (14). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Из условий (13), в частности, следует, что

$$\frac{\beta}{1 + \beta} > \sum_{j=1}^N p_j = 1 - p_0,$$

то есть $1 + \beta > 1/p_0$. Поэтому

$$\beta_j > p_j (1 + \beta) > p_j / p_0 = \frac{1}{r} \mathbf{E} \eta_j(r), \quad j = 1, \dots, N. \quad (19)$$

Таким образом, из (13) следуют неравенства (19). При $N = 1$ верно и обратное, однако при $N \geq 2$ это уже не так.

Замечание 2. Множество E всех N -мерных векторов $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ с положительными координатами, удовлетворяющих условиям (13), можно представить в виде

$$E = \bigcup_{c > (1-p_0)/p_0} E(c),$$

где при $c > (1 - p_0)/p_0$

$$E(c) = \{(\beta_1, \dots, \beta_N) : \beta_1 + \dots + \beta_N = c, \beta_j > (1 + c)p_j, j = 1, \dots, N\} \neq \emptyset,$$

так как

$$\sum_{j=1}^N (1 + c)p_j = (1 + c)(1 - p_0) < c.$$

Замечание 3. Утверждение теоремы 1 останется справедливым при отказе от условия, что $\beta, j = 1, \dots, N$, фиксированы, если неравенства (13) усилить, предположив, что

$$(\beta_1, \dots, \beta_N) \in E^*,$$

где E^* — произвольное компактное подмножество E . При этом оценка (14) будет выполняться равномерно относительно $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in E^*$.

Лемма 3. Если $k_1, \dots, k_N$ — целые неотрицательные числа, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_j(r) \leq k_j, j = 1, \dots, N\} &= \frac{p_0^r}{(2\pi i)^N} \oint \dots \oint \frac{(f(z_1, \dots, z_N))^r}{z_1^{k_1+1} \dots z_N^{k_N+1}} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^N ((1 - z_j)^{-1} (1 - z_j^{k_j+1})) dz_1 \dots dz_N, \quad (20) \end{aligned}$$

где интегрирование осуществляется по тому же пути, что и в (5), и выполнены условия (6) и неравенства $R_j \neq 1, j = 1, \dots, N$.

Доказательство. Равенство (20) следует из (5) с учетом соотношений

$$\mathbf{P}\{\eta_j(r) \leq k_j, j = 1, \dots, N\} = \sum_{l_1=0}^{k_1} \dots \sum_{l_N=0}^{k_N} \mathbf{P}\{\eta_j(r) = l_j, j = 1, \dots, N\},$$

если просуммировать геометрические прогрессии под знаком многомерного интеграла. Лемма 3 доказана.

Теорема 2. Пусть $r \rightarrow \infty$ и $k_1, \dots, k_N \rightarrow \infty$ так, что $\beta_j = k_j/r$ — фиксированные положительные числа, для которых

$$\beta_j/(1 + \beta) < p_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_j(r) \leq k_j, j = 1, \dots, N\} = \mathbf{P}\{\eta(r)\} \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{\beta_j}{p_j(1 + \beta)}\right)^{-1} (1 + O(1/r)), \quad (21)$$

где вероятность $\mathbf{P}\{\eta(r) = k\}$ и величина β определяются согласно (8), (9), (10).

Доказательство. При условиях теоремы 2 оценка (8) по-прежнему выполняется, поэтому достаточно оценить многомерный интеграл (20), используя неравенства (21). Из этих неравенств получаем, что

$$|z_j| = R_j < 1, \quad j = 1, \dots, N,$$

и поэтому

$$\prod_{j=1}^N (1 - z_j^{k_j+1}) = 1 + O(1/r)$$

равномерно относительно $z_1, \dots, z_N$.

Следовательно, с учетом (20) можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_j(r) \leq k_j, j = 1, \dots, N\} \\ = \frac{p_0^r}{(2\pi i)^N} \oint \dots \oint \frac{(f(z_1, \dots, z_N))^r}{z_1^{k_1+1} \dots z_N^{k_N+1}} \prod_{j=1}^N (1 - z_j)^{-1} dz_1 \dots dz_N (1 + O(1/r)). \end{aligned} \quad (22)$$

Применяя к оценке интеграла (23) многомерный метод перевала и проводя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 1, получаем (22). Теорема 2 доказана.

Замечание 4. Из условий (21), в частности, следует, что $1 + \beta < 1/p_0$, и поэтому

$$\beta_j < p_j(1 + \beta) < p_j/p_0 = \frac{1}{r} \mathbf{E} \eta_j(r), \quad j = 1, \dots, N. \quad (23)$$

Таким образом, из (21) следуют неравенства (24). При $N = 1$ верно и обратное, однако при $N \geq 2$ это не так.

Замечание 5. Множество F всех N -мерных векторов $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ с положительными координатами, удовлетворяющих условиям (21), может быть представлено в виде

$$F = \bigcup_{0 < c < (1-p_0)/p_0} F(c),$$

где при $c \in (0, (1-p_0)/p_0)$

$$F(c) = \{(\beta_1, \dots, \beta_N) : \beta_1 + \dots + \beta_N = c, \beta_j < (1+c)p_j, j = 1, \dots, N\} \neq \emptyset,$$

поскольку при таких значениях c

$$\sum_{j=1}^N (1+c)p_j = (1+c)(1-p_0) > c.$$

Замечание 6. Утверждение теоремы 2 остается справедливым и при отказе от условия, что $\beta_j, j = 1, \dots, N$, фиксированы, если неравенства (21) усилить, предположив, что

$$(\beta_1, \dots, \beta_N) \in F^*,$$

где F^* — произвольное компактное подмножество F . При этом оценка (22) будет выполняться равномерно относительно $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in F^*$.

Список литературы

1. Ивченко Г. И., Морозова Н. М., Отрицательное полиномиальное распределение. *Дискретная математика* (1993) 5, №2, 138–149.
2. Егорычев Г. П., *Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм*. Наука, Новосибирск, 1977.
3. Тимашев А. Н., Теоремы о больших отклонениях в полиномиальной схеме испытаний. *Дискретная математика* (1993) 5, №2, 83–89.

Статья поступила 25.05.2000.