Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, Клоны, определяемые знакопеременными моноидами, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 2, 3–8

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:44:01

Клоны, определяемые знакопеременными моноидами

© 2002 г. С. С. Марченков

Для любого k , $k \geq 3$, в симметрической полугруппе $\mathcal{T}_k$ всех подстановок на множестве E_k рассматриваются знакопеременные моноиды — моноиды, которые содержат все четные перестановки на E_k . Для каждого моноида T из $\mathcal{T}_k$ определяется множество всех функций из P_k , которые сохраняют графики всех подстановок из T (клон, определяемый моноидом T). Описываются все клоны, определяемые знакопеременными моноидами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 00-01-00351.

Известно [1], что при $k \geq 3$ классификация множества P_k функций k -значной логики, основанная на операции суперпозиции, континуальна. В связи с этим появились различные подходы к построению эффективных классификаций множества P_k , использующие алгебраические, логические и программистские идеи. Одна из таких идей состоит в том, чтобы замкнутые классы определять с использованием групп или полугрупп симметрий (групп автоморфизмов, полугрупп эндоморфизмов).

Для функции f из P_k группа симметрий — это группа автоморфизмов алгебры $\langle E_k, f \rangle$, полугруппа симметрий — полугруппа эндоморфизмов алгебры $\langle E_k, f \rangle$. Возникает вопрос: если задана группа (полугруппа) симметрий, то как выглядит множество всех функций, имеющих данную группу (полугруппу) симметрий?

Удовлетворительный ответ на этот вопрос получен лишь в немногих случаях. Так, довольно хорошо изучен класс однородных функций [2], отвечающий полной симметрической группе перестановок $\mathcal{S}_k$, а также класс четных функций [3, 4], который соответствует знакопеременной подгруппе $\mathcal{A}_k$ группы $\mathcal{S}_k$.

В [5] сформулирована задача об описании клонов (замкнутых классов, содержащих селекторные функции), которые определяются моноидами (полугруппами с единицей), содержащими группу $\mathcal{S}_k$, и сделаны первые шаги в направлении ее решения. Отметим, что практически все полученные в [5] результаты являются следствиями результатов из работ [6–10]. Оказалось, что этот вопрос тесно связан с классификацией однородных функций, которая построена в [6–8]. В настоящей заметке мы рассматриваем более общую задачу, когда вместо группы $\mathcal{S}_k$ берется группа $\mathcal{A}_k$. На основе классификации четных функций, полученной в [3, 4, 11–13], мы даем полное решение этой задачи.

Пусть k — натуральное число, $k \geq 3$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $P_k^{(n)}$ — множество всех n -местных функций, отображающих E_k^n в E_k , $P_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^{(n)}$. Через O_k обозначим

множество всех селекторных функций (проекций) из P_k , то есть функций e_i^n , удовлетворяющих тождествам

$$e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad n = 1, 2, \dots$$

На множестве P_k считаем заданной операцию суперпозиции (см. [14]). Подмножества множества P_k , замкнутые относительно операции суперпозиции, называем замкнутыми классами. Замкнутые классы, содержащие все селекторные функции, носят название клонов.

Через $\mathcal{T}_k$ обозначим симметрическую полугруппу всех отображений из E_k в E_k с операцией композиции (суперпозиции) отображений, через $\mathcal{S}_k$ — симметрическую группу всех перестановок на множестве E_k , а через $\mathcal{A}_k$ — знакопеременную подгруппу группы $\mathcal{S}_k$.

Под m -местным отношением на множестве E_k понимаем произвольное подмножество множества E_k^m . Если f — функция из $P_k^{(1)}$, то графиком функции f называем бинарное отношение $\{(x, f(x)): x \in E_k\}$. График функции f обозначаем через $f^\square$.

Пусть $f \in P_k^{(n)}$, ρ — m -местное отношение на E_k . Говорят, что функция f сохраняет отношение ρ , если для любых n наборов $(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$, принадлежащих отношению ρ , набор $(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn}))$ также принадлежит отношению ρ . Множество всех функций, сохраняющих отношение ρ , обозначим через $\text{Pol}(\rho)$. Хорошо известно (см., например, [15]), что для любого отношения ρ множество $\text{Pol}(\rho)$ является клоном.

Если $f \in P_k^{(n)}$, $s \in \mathcal{T}_k$ и выполняется тождество

$$f(s(x_1), \dots, s(x_n)) = s(f(x_1, \dots, x_n)), \quad (1)$$

то говорят, что s есть эндоморфизм алгебры $\langle E_k, f \rangle$. Условие (1) эквивалентно также тому, что функция f сохраняет отношение $s^\square$. Множество $\text{End}\langle E_k, f \rangle$ всех эндоморфизмов алгебры $\langle E_k, f \rangle$ образует моноид — полугруппу с единицей (тождественным отображением). Аналогичным образом, если $s \in \mathcal{S}_k$ и выполняется тождество (1), то s называют автоморфизмом алгебры $\langle E_k, f \rangle$. Множество $\text{Aut}\langle E_k, f \rangle$ всех автоморфизмов алгебры $\langle E_k, f \rangle$ образует подгруппу симметрической группы $\mathcal{S}_k$.

Если $s \in \mathcal{T}_k$, то для всякой функции f из $\text{Pol}(s^\square)$ моноид $\text{End}\langle E_k, f \rangle$ содержит, очевидно, элемент s . Для любого моноида T , $T \subseteq \mathcal{T}_k$, положим

$$\varphi(T) = \bigcap_{s \in T} \text{Pol}(s^\square).$$

Из определения следует, что для любой функции f из $\varphi(T)$ выполняется соотношение $T \subseteq \text{End}\langle E_k, f \rangle$. Таким образом, $\varphi(T)$ есть множество всех функций из P_k , у которых полугруппа эндоморфизмов $\text{End}\langle E_k, f \rangle$ содержит моноид T .

В [5] сформулирована задача об описании клонов $\varphi(T)$ для случая, когда $\mathcal{S}_k \subseteq T$. Ниже мы полностью решаем более общую задачу, когда моноид T содержит знакопеременную группу $\mathcal{A}_k$. Такие моноиды T мы называем знакопеременными.

Следуя [2], назовем функцию f из P_k однородной, если $\text{Aut}\langle E_k, f \rangle = \mathcal{S}_k$. Множество всех однородных функций из P_k обозначим через S_k . В [3, 4] функция f из P_k названа четной, если $\mathcal{A}_k \subseteq \text{Aut}\langle E_k, f \rangle$. Множество всех четных функций из P_k обозначим через A_k . В [6–8] для любого k , $k \geq 3$, описаны все клоны однородных функций из P_k , а в [3, 4] — все клоны четных функций из P_k при $k \geq 4$ (в случае $k = 3$ число клонов четных функций континуально [16]). Кроме того, в [11–13] описан счетный фрагмент решетки клонов четных функций из P_3 .

Напомним определение некоторых однородных и четных функций. При любом k , $k \geq 3$, следующие функции $d(x, y, z)$ и $l_k(x_1, \dots, x_k)$ из P_k однородны:

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

$$l_k(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} x_1, & \text{если значения } x_1, \dots, x_k \text{ попарно различны,} \\ x_k & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В классе P_3 однородной является функция $2x + 2y \pmod{3}$, а в классе P_4 — функция $x + y + z$, где сложения (из поля Галуа $GF(4)$) определяется таблицей

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

В классе P_3 четными являются функции $x + 1 \pmod{3}$, $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$, где функции α и β определяются таблицами

α	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	2
2	0	2	2

,

β	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	1
2	2	1	2

.

Так же, как в [7, 8], через $S_4^4 L_4$ обозначим клон всех однородных функций из P_4 , линейных над полем $GF(4)$. Через A_3^0 обозначим клон всех четных функций из P_3 , сохраняющих константу 0 (в [11–13] клон A_3^0 имеет обозначение S_1).

Для любого k , $k \geq 3$, обозначим через T_k^a моноид, состоящий из всех перестановок группы $\mathcal{A}_k$ и всех констант, а через T_k^s — моноид, который состоит из всех перестановок группы $\mathcal{S}_k$ и всех констант. Пусть T_4^l обозначает моноид, который состоит из всех перестановок группы $\mathcal{A}_4$, всех констант, а также всех функций $f(x)$, которые удовлетворяют следующему условию: область значений функции f состоит из двух элементов b_1, b_2 , причем

$$|f^{-1}(b_1)| = |f^{-1}(b_2)| = 2,$$

где через $|f^{-1}(b_i)|$ обозначено число элементов множества $f^{-1}(b_i)$.

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{A}_k) &= A_k, & \varphi(T_k^a) &= A_k, & k &\geq 4, \\ \varphi(T_3^a) &= A_3^0, & \varphi(\mathcal{S}_k) &= \varphi(T_k^s) = S_k, & \varphi(T_4^l) &= S_4^4 L_4. \end{aligned}$$

Для всех остальных знакопеременных моноидов T , $T \subseteq \mathcal{T}_k$, выполняется равенство $\varphi(T) = O_k$.

Доказательство. Равенства

$$\varphi(\mathcal{A}_k) = A_k, \quad \varphi(T_3^a) = A_3^0, \quad \varphi(\mathcal{S}_k) = S_k$$

следуют из определения клонов A_k , A_3^0 и S_k . При $k \geq 4$ равенство $\varphi(T_k^a) = A_k$ следует из того, что при $k \geq 4$ любая четная функция из P_k сохраняет любую константу (см. [3, 4]), а равенство $\varphi(T_k^s) = S_k$ — из того, что при $k \geq 3$ любая однородная функция из P_k также сохраняет любую константу (см. [2]). Поскольку каждый знакопеременный моноид, содержащий константу, очевидным образом содержит все константы, мы тем самым рассмотрели все знакопеременные моноиды, которые состоят из перестановок и еще, быть может, констант. Поэтому далее будем рассматривать случаи, когда знакопеременный моноид T , $T \subseteq \mathcal{T}_k$, содержит функцию $f(x)$, отличную от перестановки и константы. В этом случае в множестве E_k найдутся такие попарно различные элементы a_1, a_2, a_3 и неравные элементы b_1, b_2 , что

$$f(a_1) = f(a_2) = b_1, \quad f(a_3) = b_2. \quad (2)$$

Основная часть оставшегося доказательства опирается на следующий факт, который вытекает из результатов работ [3, 4, 6–8, 11–13].

Любой клон четных функций из P_k , отличный от клона O_k , содержит хотя бы одну из следующих функций: $d(x, y, z)$, $l_k(x_1, \dots, x_k)$, $x + y + z$ ($k = 4$, сложение из поля $GF(4)$), $x + 1$, $2x + 2y$, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ (все четыре функции из P_3 , сложение по модулю 3).

Покажем, что ни одна из функций d , l_k , $x + 1$, $2x + 2y$, α , β не сохраняет отношение $f^\square$ для функции f , удовлетворяющей условиям (2). Начнем с функции d . Очевидно, что пары (a_1, b_1) , (a_2, b_1) , (a_3, b_2) принадлежат отношению $f^\square$, пара (a_3, b_1) не принадлежит отношению $f^\square$ и

$$d(a_1, a_2, a_3) = a_3, \quad d(b_1, b_1, b_2) = b_1.$$

Отсюда вытекает, что функция d не сохраняет отношение $f^\square$.

Обратимся к функции l_k . Пусть

$$\{a_4, \dots, a_k\} = E_k \setminus \{a_1, a_2, a_3\}, \quad b_4 = f(a_4), \dots, b_k = f(a_k).$$

Тогда наборы

$$(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_4, b_4), \dots, (a_k, b_k), (a_3, b_2)$$

принадлежат отношению $f^\square$, набор (a_1, b_2) не принадлежит отношению $f^\square$ и

$$l_k(a_1, a_2, a_4, \dots, a_k, a_3) = a_1, \quad l_k(b_1, b_1, b_4, \dots, b_k, b_2) = b_2.$$

Это означает, что функция l_k не сохраняет отношение $f^\square$.

Пусть $k = 3$. Очевидно, что для элементов a_1, a_2 по модулю 3 выполняется одно из соотношений $a_2 = a_1 + 1$ или $a_1 = a_2 + 1$. Так как $f(a_1) = f(a_2)$, отсюда сразу вытекает, что функция $x + 1$ не сохраняет отношение $f^\square$.

Далее, поскольку по модулю 3 справедливы равенства

$$2a_1 + 2a_2 = a_3, \quad 2b_1 + 2b_1 = b_1,$$

а набор (a_3, b_1) не принадлежит отношению $f^\square$, получаем, что функция $2x + 2y$ не сохраняет отношение $f^\square$.

Перейдем к рассмотрению функций $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$. Можно предполагать, что

$$\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\} = \{0, 1\}, \quad a_3 = 2. \quad (3)$$

В самом деле, если, например, $\{a_1, a_2\} \neq \{0, 1\}$, то выберем в группе $\mathcal{A}_3$ такую перестановку f_1 , которая отображает множество $\{0, 1\}$ на множество $\{a_1, a_2\}$. Тогда для функции $f'(x) = f(f_1(x))$, принадлежащей моноиду T , получим, что

$$f'(0) = f'(1) = b_1, \quad f'(2) = b_2.$$

Аналогичным образом поступаем в случае, когда $\{b_1, b_2\} \neq \{0, 1\}$.

Итак, пусть справедливы соотношения (3). Если $b_1 = 0$, то отношению $f^\square$ принадлежат наборы $(0, 0)$, $(2, 1)$ и не принадлежит набор $(0, 1)$. Поскольку $\alpha(0, 2) = 0$ и $\alpha(0, 1) = 1$, получаем, что функция α в данном случае не сохраняет отношение $f^\square$. При условии $b_1 = 1$ следует выбрать наборы $(1, 1)$, $(2, 0)$, принадлежащие отношению $f^\square$, и набор $(2, 1)$, который не принадлежит отношению $f^\square$.

При рассмотрении функции β можно, например, воспользоваться тем, что β двойственна функции α относительно перестановки $s(x) = 2x + 1 \pmod{3}$, то есть

$$\beta(x, y) = s^{-1}(\alpha(s(x), s(y))),$$

а при переходе к двойственным функциям необходимые нам свойства функции f сохраняются, поскольку перестановка $2x + 1$ отображает множество $\{0, 1\}$ на себя.

Итак, если в моноид T входит функция f , которая удовлетворяет условиям (2) для множеств $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2\}$ с попарно различными элементами, то клон $\varphi(T)$ не может содержать ни одну из функций d , l_k , $x + 1$, $2x + 2y$, α , β . Это означает, что в данном случае при $k \neq 4$ справедливо равенство $\varphi(T) = O_k$.

Остается исследовать возможность сохранения отношения $f^\square$ функцией $x + y + z$ (сложение из поля $GF(4)$).

Пусть сначала для элемента a_4 , где $\{a_4\} = E_4 \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$, выполняется неравенство $f(a_4) \neq b_2$. Тогда наборы (a_1, b_1) , (a_2, b_1) , (a_3, b_2) принадлежат отношению $f^\square$, набор (a_4, b_2) не принадлежит отношению $f^\square$ и

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_4, \quad b_1 + b_1 + b_2 = b_2. \quad (4)$$

Следовательно, функция $x + y + z$ в этом случае не сохраняет отношение $f^\square$.

Пусть теперь для указанного элемента a_4 справедливо равенство $f(a_4) = b_2$. Тогда соотношения (4) и аналогичные им соотношения

$$a_1 + a_2 + a_4 = a_3, \quad a_1 + a_3 + a_4 = a_2, \quad a_2 + a_3 + a_4 = a_1, \quad b_1 + b_2 + b_2 = b_1$$

показывают, что функция $x + y + z$ сохраняет отношение $f^\square$. Значит, в этом случае клон $\varphi(T)$ содержит функцию $x + y + z$. Однако функция $x + y + z$ порождает (в смысле операции суперпозиции) клон $S_4^4 L_4$ (см. [7, 8]). Следовательно, $S_4^4 L_4 \subseteq \varphi(T)$. Если моноид $T \subseteq \mathcal{T}_4$ содержит некоторую функцию f такую, что $|f^{-1}(b_1)| = |f^{-1}(b_2)| = 2$, то, как показано в [17, 18], он содержит также все функции этого типа. Кроме того, моноиду T в этом случае принадлежат все константы. Если никакие другие функции (помимо перестановок из $\mathcal{A}_4$) в моноид T не входят, то, очевидно, $\varphi(T) = S_4^4 L_4$. В противном случае, как установлено выше, клону $\varphi(T)$ не принадлежит функция $x + y + z$ и, значит, он совпадает с клоном O_4 . Теорема доказана.

Список литературы

1. Янов Ю. И., Мучник А. А., О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. *Докл. АН СССР* (1959) **127**, №1, 44–46.
2. Marczewski E., Homogeneous algebras and homogeneous operations. *Fund. Math.* (1964) **56**, 81–103.
3. Марченков С. С., О классификации алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов. *Докл. АН СССР* (1982) **265**, №3, 533–536.
4. Марченков С. С., Классификация алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов. *Матем. вопросы киберн.* (1989) **2**, 100–122.
5. Machida H., Miyakawa M., Rosenberg I. G., Relations between clones and full monoids. *Proc. 31 Int. Symp. Multiple-Valued Logic*. Warsaw, 2001, 279–284.
6. Марченков С. С., О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики. *Проблемы киберн.* (1979) **36**, 5–22.
7. Марченков С. С., Об однородных алгебрах. *Докл. АН СССР* (1981) **256**, №4, 787–790.
8. Марченков С. С. Однородные алгебры. *Проблемы киберн.* (1982), **39**, 85–106.
9. Нгуен Ван Хоа, О семействах замкнутых классов k -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами. *Дискретная математика* (1993) **5**, №4, 87–108.
10. Нгуен Ван Хоа, Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами. *Докл. АН Беларуси* (1994) **38**, №3, 16–19.
11. Марченков С. С., Деметрович Я., Ханнак Л., О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 . *Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач* (1980) **34**, 38–73.
12. Demetrovics J., Hannak L., Marchenkov S. S., On closed classes of selfdual functions. *Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai* (1979) **28**, 183–189.
13. Demetrovics J., Hannak L., Marchenkov S. S., Some remarks on the structure of P_3 . *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* (1980) **11**, №4, 215–219.
14. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
15. Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А., Теория Галуа для алгебр Поста. *Кибернетика* (1969), №3, 1–10; №5, 1–9.
16. Марченков С. С., О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики II. *Проблемы киберн.* (1983) **40**, 261–266.
17. Марченков С. С., А-замкнутые классы многозначной логики, содержащие константы. *Дискретная математика* (1998) **10**, №3, 10–26.
18. Марченков С. С., А-классификация функций многозначной логики. *Докл. РАН* (1999) **366**, №4, 455–457.

Статья поступила 07.08.2001.