Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Ларин, Транзитивные полиномиальные преобразования колец вычетов, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 2, 20–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:26:52

Транзитивные полиномиальные преобразования колец вычетов

© 2002 г. М. В. Ларин

Дается полное описание полиномов $f(x)$ с целочисленными коэффициентами, для которых рекуррентная последовательность $u_{i+1} \equiv f(u_i) \pmod{m}$ имеет период, равный m .

1. Введение

1.1. Одна из центральных проблем, связанных с генераторами псевдослучайных последовательностей вида

$$u_{i+1} \equiv f(u_i) \pmod{m}, \quad (1)$$

где $u_i \in \mathbb{Z}$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, состоит в описании всех полиномов $f(x)$, для которых период последовательности (1) максимален, то есть равен m .

В настоящей статье будут непосредственно использованы следующие результаты, которые можно найти, например, в [1].

Предложение 1. Пусть $f(x) = ax + c$, тогда последовательность (1) имеет период, равный m , тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- $(c, m) = 1$;
- $a \equiv 1 \pmod{p}$ для любого простого делителя p числа m ;
- $a \equiv 1 \pmod{4}$, если m кратно 4.

Предложение 2. Пусть $f(x) = dx^2 + ax + c$, тогда последовательность (1) имеет период, равный m , тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- $(c, m) = 1$;
- $d \equiv 0 \pmod{p}$ и $a \equiv 1 \pmod{p}$ для любого простого нечетного делителя p числа m ;
- если m кратно 4, то $d \equiv 0 \pmod{2}$ и $d \equiv a - 1 \pmod{4}$;
- если m кратно 2, то $d \equiv a - 1 \pmod{2}$;
- если m кратно 9, то либо $d \equiv 0 \pmod{9}$, либо $cd \equiv 6 \pmod{9}$.

Предложение 3. Пусть $m = 2^e$, тогда последовательность (1) имеет период, равный $m = 2^e$, если для полинома $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$$f(0) \equiv 1 \pmod{2},$$

и для любого $z \in \mathbb{Z}$

$$f'(z) \equiv 1 \pmod{4},$$

$$f''(z) \equiv 1 \pmod{4},$$

$$f(z+1) \equiv f(z) + 1 \pmod{4}.$$

1.2. По поводу последнего результата необходимо отметить, что условия предложения 3 не являются необходимыми, так как, например, для полинома

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

и $m = 2^e$ последовательность (1) имеет период, равный $m = 2^e$, но

$$f'(z) = 12z^2 + 4z + 3 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Таким образом, предложения 1, 2 и 3 дают лишь частичное решение рассматриваемой задачи. В настоящей статье предлагается ее полное решение.

2. Определения и обозначения

2.1. Всякий полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ индуцирует корректно определенное преобразование кольца $\mathbb{Z}/m$ вычетов по модулю m

$$[a]_m \rightarrow [f(a)]_m; \tag{2}$$

здесь $[a]_m$ — класс вычетов по модулю m , содержащий $a \in \mathbb{Z}$.

Преобразование (2) будем обозначать символом $\langle f(x); m \rangle$.

Отношение $a \equiv b \pmod{m}$ будем записывать также в виде

$$a \equiv_m b.$$

Определение 1. Полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ называется

- тождеством по модулю m , если $f(a) \equiv 0 \pmod{m}$, для любого $a \in \mathbb{Z}$;
- биективным по модулю m , если преобразование $\langle f(x); m \rangle$ является подстановкой на $\mathbb{Z}/m$;
- транзитивным по модулю m , если подстановка $\langle f(x); m \rangle$ является полным циклом.

Если $f(x)$ и $g(x)$ — полиномы над $\mathbb{Z}$ от переменной x , то выражение

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$$

означает, что $f(a) \equiv g(a) \pmod{m}$ для любого $a \in \mathbb{Z}$, то есть полином $f(x) - g(x)$ есть тождество по модулю m .

Преобразование $\psi: \mathbf{Z}/m \rightarrow \mathbf{Z}/m$ будем называть полиномиальным по модулю m , если $\psi = \langle f(x); m \rangle$ для подходящего $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$.

Очевидно, что все полиномиальные по модулю m подстановки образуют группу, которую будем обозначать $G(m)$.

Множество всех полных циклов из $G(m)$ обозначим $H(m)$.

Очевидно, что последовательность (1) имеет период m тогда и только тогда, когда полином $f(x)$ транзитивен по модулю m , что, в свою очередь, равносильно включению $\langle f(x); m \rangle \in H(m)$.

2.2. Пусть $m = p^i q^j r^k \dots$, где $p, q, r, \dots$ — различные простые числа. Тогда

$$\mathbf{Z}/m = \mathbf{Z}/p^i \oplus \mathbf{Z}/q^j \oplus \mathbf{Z}/r^k \oplus \dots,$$

где $\oplus$ — символ прямой суммы колец. Поэтому полином $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ является тождеством, биективным или транзитивным по модулю m тогда и только тогда, когда $f(x)$, соответственно, есть тождество, биективен или транзитивен по каждому из модулей $p^i, q^j, r^k, \dots$. Сказанное означает, что, в частности,

$$\begin{aligned} |G(m)| &= |G(p^i)| |G(q^j)| |G(r^k)| \dots, \\ |H(m)| &= |H(p^i)| |H(q^j)| |H(r^k)| \dots \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемая задача описания транзитивных по модулю m полиномов сводится к случаю примарного m , то есть к случаю, когда $m = p^n$, где p — простое число.

3. Предварительные результаты

Пользуясь формулой Тейлора, несложно получить, что для любых $a \in \mathbf{Z}$ и $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ справедливы соотношения

$$f(x + ap^{n-1}) \equiv f(x) + ap^{n-1} f'(x) \pmod{p^n}, \quad n \geq 2, \quad (3)$$

$$f(x + ap^{n-1}) \equiv f(x) + ap^{n-1} f'(x) \pmod{p^{n+1}}, \quad n \geq 3, \quad (4)$$

$$f(x + ap) \equiv f(x) + apf'(x) + a^2 p^2 f''(x)/2 \pmod{p^3}. \quad (5)$$

Предложение 4 ([2]). Пусть $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Следующие утверждения равносильны:

- $f(x)$ биективен по модулю p^n для любого натурального n ;
- $f(x)$ биективен по модулю p^2 ;
- $f(x)$ биективен по модулю p и $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$ для любого $a \in \mathbf{Z}$.

Предложение 5. Пусть $t(x)$ — тождество по модулю p^2 . Тогда $t'(x)$ — тождество по модулю p .

Доказательство. Для любого $c \in \mathbf{Z}$ полином $h(x) = x + ct(x)$ биективен по модулю p^2 , так как $\langle h(x); p^2 \rangle = \langle x; p^2 \rangle$. По предложению 4 $h'(a) = 1 + ct'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$ для любых $a, c \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $t'(a) \equiv 0 \pmod{p}$ для любого $a \in \mathbf{Z}$, то есть $t'(x)$ — тождество по модулю p .

Для $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $k \geq 0$ положим $h^{(0)}(x) = x$ и $h^{(k)}(x) = h(h^{(k-1)}(x))$. Нетрудно видеть, что

$$(h^{(k)}(x))' = \prod_{i=0}^{k-1} h'(h^{(i)}(x)). \quad (6)$$

Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $a \in \mathbb{Z}$. Положим $a_i = f^{(i)}(a)$, $i \geq 0$. Легко видеть, что полином $f(x)$ транзитивен по модулю p^n тогда и только тогда, когда последовательность $(a_i : i \geq 0)$ содержит полную систему вычетов по модулю p^n . Отсюда очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Предложение 6. Если полином транзитивен по модулю p^n , то он транзитивен по модулю p^{n-1} .

Предложение 7. Пусть полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ транзитивен по модулю p^2 и $g(x) = f^{(p^s)}(x)$, где $s \geq 1$. Тогда $g'(x) \equiv 1 \pmod{p}$ и если $p \neq 2$, то

$$\sum_{i=0}^{p-1} (g'(x))^i \equiv p \pmod{p^2}.$$

Доказательство. Так как $f(x)$ транзитивен по модулю p^2 и $s \geq 1$, то

$$g^{(p)}(x) - x = f^{(p^{s+1})}(x) - x$$

есть тождество по модулю p^2 , откуда по предложению 5 $(g^{(p)}(x))' \equiv 1 \pmod{p}$. По предложению 6 $g(x) \equiv x \pmod{p}$ и согласно (6) $(g^{(p)}(x))' \equiv (g'(x))^p \pmod{p}$, то есть $(g'(x))^p \equiv 1 \pmod{p}$ и тем самым $g'(x) \equiv 1 \pmod{p}$.

Таким образом, $g'(x) = 1 + p\alpha(x)$ для подходящей функции $\alpha(x)$, откуда получаем, что $(g'(x))^i \equiv 1 + i p \alpha(x) \pmod{p^2}$ и

$$\sum_{i=0}^{p-1} (g'(x))^i \equiv p + p^2(p-1)/2\alpha(x) \pmod{p^2}.$$

Если $p \neq 2$, то, очевидно, получаем требуемое утверждение.

4. Критерии транзитивности

Предложение 8. Полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ транзитивен по модулю p^n тогда и только тогда, когда для подходящего $a \in \mathbb{Z}$ справедлива система соотношений

$$\begin{aligned} f^{(p^n)}(a) &\equiv a \pmod{p^n}, \\ f^{(p^{n-1})}(a) &\not\equiv a \pmod{p^n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство. Необходимость условия (7) очевидна. Докажем достаточность. Из первого соотношения системы (7) следует, что точка a (точнее, класс вычетов по модулю p^n , содержащий a) лежит на цикле преобразования $\langle f(x); p^n \rangle$, длина r которого делит p^n . Из второго соотношения системы (7) следует, что p^{n-1} не делит r . Поэтому $r = p^n$.

Как показывает пример полинома $x^p + 1$, утверждение, обратное предложению 6, неверно. Однако справедливо следующее утверждение.

Предложение 9. Если полином транзитивен по модулю p^3 , то он транзитивен по модулю p^n для любого натурального n .

Доказательство. Пусть $n \geq 3$ и $f(x)$ транзитивен по модулю p^n . Очевидно, что достаточно доказать транзитивность $f(x)$ по модулю p^{n+1} .

Положим $g(x) = f^{(p^{n-1})}(x)$. По предложению 6 получаем, что $g(x) = x + t(x)$, где $t(x)$ — тождество по модулю p^{n-1} , не являющееся тождеством по модулю p^n , то есть $t(a) = p^{n-1}b$ для подходящих $a, b \in \mathbb{Z}$, причем $b \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Так как $n \geq 3$, из (4) индукцией по k легко находим, что

$$g^{(k)}(a) \equiv_{(p^{n+1})} a + p^{n-1}b \sum_{i=0}^{k-1} (g'(a))^i.$$

Согласно предложению 9 при $k = p \neq 2$

$$g^{(p)}(a) \equiv a + p^n b \pmod{p^{n+1}}. \quad (8)$$

Пусть $p = 2$. Так как $f(x)$ транзитивен по модулю 4, из формулы (4) получаем, что

$$g'(a) \equiv_4 (f'(0)f'(1)f'(2)f'(3))^{2^{n-3}}.$$

Из (3) получаем, что для любых $d, e \in \mathbb{Z}$

$$f'(d + 2e) \equiv f'(d) + 2ef''(d) \pmod{4},$$

и так как все коэффициенты полинома $f''(x)$ четны, справедливо сравнение

$$f'(d + 2e) \equiv f'(d) \pmod{4}.$$

Поэтому

$$f'(0)f'(1)f'(2)f'(3) \equiv (f'(0)f'(1))^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Отсюда, $g'(a) \equiv 1 \pmod{4}$ и $g'(a + 1) \equiv 2 \pmod{4}$. Таким образом, (8) верно для любого простого p .

Так как $b \not\equiv 0 \pmod{p}$, то

$$g^{(p)}(a \not\equiv a \pmod{p^{n+1}}). \quad (9)$$

Так как $g'(x) \equiv 1 \pmod{p}$ (см. доказательство предложения 7), используя (3) и (8), индукцией по k легко находим, что

$$g^{(kp)}(a) \equiv a + kbp^n \pmod{p^{n+1}},$$

откуда при $k = p$ получаем, что

$$g^{(p^2)}(a) \equiv a \pmod{p^{n+1}}. \quad (10)$$

На основании определения полинома $g(x)$ и предложения 8 система соотношений (10) и (9) равносильна транзитивности полинома $f(x)$ по модулю p^{n+1} .

Нетрудно убедиться, что полином $2x^3 + 3x + 5$ транзитивен по модулю 4, но не является транзитивным по модулю 8, а полином

$$x + 1 - x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 6)(x - 7)$$

транзитивен по модулю 9, но не является транзитивным по модулю 27. Следовательно, если $p \in \{2, 3\}$, то результат предложения 9 усилить нельзя. Однако справедливо следующее утверждение.

Предложение 10. Если $p \notin \{2, 3\}$, то полином, транзитивный по модулю p^2 , транзитивен по модулю p^n для любого натурального n .

Доказательство. На основании предложения 9 достаточно доказать, что полином транзитивен по модулю p^3 .

Положим $g(x) = f^{(p)}(x)$. По предложению 7 $g'(x) \equiv 1 \pmod{p}$, а в силу предложения 6 $g(x) = x + p\beta(x)$, где $\beta(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$ для подходящего $a \in \mathbb{Z}$.

Пользуясь формулой (5), индукцией по k легко доказать, что

$$g^{(k)}(x) \equiv_{p^3} x + p\beta(x) \sum_{j=0}^{k-1} g^{(j)}(x) + p^2\beta(x)^2(g''(x)/2) \sum_{j=0}^{k-1} j^2. \quad (11)$$

Так как $p \notin \{2, 3\}$, то

$$\sum_{j=0}^{p-1} j^2 = (p-1)p(2p-1)/6 \equiv 0 \pmod{p},$$

откуда, полагая в (11) $k = p$ и $x = a$, по предложению 7 получаем, что

$$g^{(p)}(a) \equiv a + p^2\beta(a) \pmod{p^3}.$$

Так как $\beta(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$, то

$$g^{(p)}(a) \not\equiv a \pmod{p^3}. \quad (12)$$

Так как $g'(x) \equiv 1 \pmod{p}$ и $(g^{(p)}(x))' \equiv 1 \pmod{p}$ (см. предложение 7 и его доказательство), индукцией по k легко находим, что

$$g^{(kp)}(a) \equiv a + kp^2\beta(a) \pmod{p^3},$$

откуда при $k = p$ получаем, что

$$g^{(p^2)}(a) \equiv a \pmod{p^3}. \quad (13)$$

На основании определения полинома $g(x)$ и предложения 8 система соотношений (13) и (12) равносильна транзитивности полинома $f(x)$ по модулю p^3 .

Результат предложения 10 усилить нельзя: $f(x) = 1 + 2x - x^p$ транзитивен по модулю p , а при $p \neq 2$ даже биактивен по модулю p^2 , но так как $f'(x) \equiv 2 \pmod{p}$, для $g(x) = f^{(p)}(x)$ справедливо соотношение

$$g'(x) = \prod_{j=0}^{p-1} f'(f^{(j)}(x)) \equiv 2^p \equiv 2 \pmod{p},$$

откуда по предложению 7 $f(x)$ не является транзитивным по модулю p^2 .

5. Число полноцикловых подстановок в группах $G(p^n)$

Пусть $\pi_0(x) = 1$, $\pi_1(x) = x$ и $\pi_k(x) = x(x-1)\dots(x-k+1)$ для $k \geq 2$. В соответствии с интерполяционной формулой Ньютона любой полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ однозначно представляется в виде конечной суммы

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} c_k \pi_k(x), \quad (14)$$

где все $c_k \in \mathbb{Z}$.

5.1. Найдем число полных циклов в группе $G(p^2)$.

Предложение 11 ([3]). *Полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ является тождеством по модулю t тогда и только тогда, когда в представлении (14) коэффициент c_k делится на $t/(k!, t)$ для любого $k \geq 0$.*

Для простого p и натурального s положим

$$\nu_p(s) = \max(v \geq 0: p^v \text{ делит } s),$$

и пусть

$$\kappa(p, n) = \min(k \geq 0: \nu_p(k!) \geq n).$$

Предложение 12 ([4]). *Порядок группы $G(p^n)$ равен $p!$, если $n = 1$, $p!(p-1)^p p^p$, если $n = 2$, и*

$$p!(p-1)^p p^{p+\kappa(p,3)+\dots+\kappa(p,n)},$$

если $n \geq 3$.

Как показано в [4], при $n \geq 2$ отображение

$$G(p^n) \rightarrow G(p^{n-1}),$$

действующее по правилу

$$\langle f(x), p^n \rangle \rightarrow \langle f(x), p^{n-1} \rangle,$$

определено корректно и является эпиморфизмом групп.

Ядро указанного эпиморфизма обозначим $K(p^n)$. Согласно предложению 12 порядок $K(p^n)$ равен

$$\begin{aligned} & (p-1)^p p^p, \text{ если } n = 2, \\ & p^{\varepsilon(p,n)}, \text{ если } n \geq 3. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $H(p^2)$ — множество всех полных циклов из $G(p^2)$. Если

$$\sigma = \langle f(x), p^2 \rangle \in H(p^2),$$

то по предложению 6 $\langle f(x), p \rangle \in H(p)$, и поэтому

$$H(p^2) \subset \bigcup_{\sigma} \sigma K(p^2). \quad (16)$$

где объединение смежных классов $\sigma K(p^2)$ берется по всем подстановкам $\sigma \in H(p^2)$.

Так как $G(p)$ есть симметрическая группа степени p , все полные циклы из $G(p)$ сопряжены в ней. Поэтому для любых подстановок $\sigma_1, \sigma_2 \in H(p^2)$ смежные классы $\sigma_1 K(p^2)$ и $\sigma_2 K(p^2)$ сопряжены в $G(p^2)$ и, следовательно, содержат одинаковое число полных циклов.

Определим отображение

$$\delta: G(p^2) \rightarrow (\mathbb{Z}/p)^*$$

группы $G(p^2)$ в мультипликативную группу $(\mathbb{Z}/p)^*$ поля $\mathbb{Z}/p$ следующим образом. Пусть $\sigma = \langle f(x), p^2 \rangle$ и $\sigma' = \langle f'(x), p^2 \rangle$. Тогда

$$\delta(\sigma) = \prod_z \sigma'(z), \quad (17)$$

где z пробегает поле $\mathbb{Z}/p$.

Из предложений 4, 5 и правила дифференцирования сложной функции получаем, что отображение (17) определено корректно и является гомоморфизмом групп.

Если $s \not\equiv 0 \pmod{p}$, то для $f(x) = (1-s)^p x^p + sx$ подстановка $\langle f(x), p^2 \rangle$ принадлежит $K(p^2)$ и $f'(x) \equiv s \pmod{p}$. Отсюда, учитывая сравнение $s^p \equiv s \pmod{p}$, получаем, что гомоморфизм δ является эпиморфизмом $K(p^2)$ на $(\mathbb{Z}/p)^*$.

Таким образом, для каждого $z \in (\mathbb{Z}/p)^*$ в любом смежном классе $\sigma K(p^2)$ имеется точно $|K(p^2)|/(p-1)$ подстановок τ , для которых $\delta(\tau) = z$.

По предложению 7 для $\sigma \in H(p^2)$ значения $\delta(\sigma)$ одинаковы и равны единице группы $(\mathbb{Z}/p)^*$. Поэтому в силу (16) справедливо неравенство

$$|H(p^2)| \leq (p-2)! |K(p^2)| = |G(p^2)|/(p(p-1)), \quad (18)$$

причем для $p = 2$ неравенство (18) строгое, в чем легко убедиться на примере полинома $1-x$, который не транзитивен по модулю 4, однако подстановка $\langle 1-x, 4 \rangle$ лежит в смежном классе $\sigma K(4)$, где $\sigma = \langle x+1, 4 \rangle$.

Полный цикл коммутирует в любой содержащей его группе подстановок только со своими степенями, поэтому

$$|H(p^2)| = r |G(p^2)|/p^2, \quad (19)$$

где r — число классов попарно сопряженных в $G(p^2)$ полных циклов. Из (18) и (19) получаем, что

$$r \leq p/(p-1). \quad (20)$$

Если $p \geq 3$, то из (20) следует, что $r = 1$. Если $p = 2$, то неравенство (20) строгое (ибо, как отмечено выше, строгим является неравенство (18)), откуда снова $r = 1$, то есть все полные циклы сопряжены в $G(p^2)$.

Таким образом, учитывая предложение 12, получаем следующее утверждение.

Предложение 13. Все полные циклы из группы $G(p^2)$ сопряжены в ней, и число их равно

$$(p-2)!(p-1)^{p+1} p^{p-1}.$$

Теперь найдем число полных циклов в группах $G(p^3)$ для случаев, когда $p \in \{2, 3\}$.

5.2. Рассмотрим случай $p = 2$. Легко видеть, что подстановка $\langle 2x^3 + 3x + 4, 4 \rangle$ лежит в $K(8)$ и является транспозицией, то есть нечетной подстановкой. Следовательно, для любого $\sigma \in G(8)$ ровно половина подстановок из смежного класса $\sigma K(8)$ нечетны. В силу (15) $|K(8)| = 16$, и по предложению 13 $|H(4)| = 2$, поэтому $|H(8)| \leq 16$. По предложению 12 $|G(8)| = 2^7$, и, так как класс попарно сопряженных в $G(8)$ полных циклов содержит $|G(8)|/8 = 16$ подстановок, то $|H(8)| \geq 16$. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Предложение 14. Все полные циклы из группы $G(8)$ сопряжены в ней, и число их равно 16.

5.3. Рассмотрим случай $p = 3$. Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in H(27)$, где $\sigma_1 = \langle f_1(x), 27 \rangle$ и $\sigma_2 = \langle f_2(x), 27 \rangle$. По предложению 13 подстановки $\langle f_1(x), 9 \rangle$ и $\langle f_2(x), 9 \rangle$ сопряжены в $G(9)$. Поэтому смежные классы $\sigma_1 K(27)$ и $\sigma_2 K(27)$ сопряжены в $G(27)$ и, следовательно, содержат одинаковое число полных циклов. Таким образом, достаточно найти число полных циклов в смежном классе $\sigma K(27)$ для $\sigma = \langle x + 1, 27 \rangle$.

Полный прообраз (при эпиморфизме $G(27) \rightarrow G(9)$) циклической подгруппы, порожденной подстановкой $\langle x + 1, 9 \rangle$, является (на основании (15)) 3-группой. Поэтому любой элемент из $\sigma K(27)$ является 3-элементом. Значит, полином $f(x)$ является транзитивным по модулю 27 тогда и только тогда, когда $f^{(9)}(x) \not\equiv x \pmod{27}$ (поскольку первое из соотношений (7) заведомо выполняется).

Любой элемент из $\sigma K(27)$ индуцируется полиномом вида

$$f(x) = x + t(x), \quad (21)$$

где $t(x)$ — тождество по модулю 9, причем, по предложению 5

$$f'(x) \equiv 1 \pmod{3}.$$

На основании (3), (5) и предложения 5 легко получаем, что

$$f^{(9)}(x) \equiv_{27} x + 9(1 + t''(x) + t''(x + 1) + t''(x + 2)). \quad (22)$$

По предложению 11 любое полиномиальное по модулю 27 преобразование индуцируется полиномом вида (14), степень которого не превосходит 8. Поэтому в (21) достаточно положить

$$t(x) = \sum_{k=0}^8 c_k (9/(k!, 9)) \pi_k(x), \quad (23)$$

откуда прямыми вычислениями несложно получить, что

$$t''(x) + t''(x + 1) + t''(x + 2) \equiv c_8 \pmod{3},$$

то есть

$$f^{(9)}(x) \equiv x + 9(1 + c_8) \pmod{27}.$$

Так как в (23) все полиномы $(9/(k!, 9)) \pi_k(x)$ суть тождества по модулю 9, коэффициенты c_k достаточно выбирать из множества $\{0, 1, 2\}$ (что, как легко видеть, гарантирует однозначность представления преобразования $\langle t(x), 27 \rangle$).

Таким образом, полином (21) транзитивен по модулю 27 тогда и только тогда, когда в представлении (23) (где все коэффициенты $c_k \in \{0, 1, 2\}$) $c_8 \neq 2$.

Поэтому смежный класс $\sigma K(27)$, где $\sigma = \langle x + 1, 27 \rangle$, содержит $2 \cdot 3^8$ полных циклов. Учитывая, что порядок централизатора полного цикла из $H(27)$ равен 27, а также, что по предложению 13 $|H(9)| = 2^4 \cdot 3^2$, получаем следующее утверждение.

Предложение 15. Число полноцикловых подстановок в группе $G(27)$ равно $2^5 \cdot 3^{10}$.

5.4. Положим для простого p

$$\mu = \mu(p) = \begin{cases} 2, & \text{если } p \notin \{2, 3\}, \\ 3, & \text{если } p \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Тогда по предложениям 9, 10 получаем, что при $n \geq \mu$ из того, что $\langle f(x), p^n \rangle \in H(p^n)$, следует, что $\sigma = \langle f(x), p^{n+1} \rangle \in H(p^{n+1})$ и смежный класс $\sigma K(p^{n+1})$ состоит только из полноцикловых подстановок. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Предложение 16. Число полноцикловых подстановок в группе $G(p^n)$ всех полиномиальных подстановок кольца $\mathbf{Z}/p^n$ равно $(p-1)!$, если $n = 1$, $(p-2)!(p-1)^{p+1}p^{p-1}$, если $n = 2$, $(p-2)!(p-1)^{p+1}p^{p-1+\varepsilon(p,3)+\dots+\varepsilon(p,n)}$, если $n \geq 3$ и $p \notin \{2, 3\}$, равно 16, если $p^n = 8$, $2^5 \cdot 3^{10}$, если $p^n = 27$, $2^{4+\varepsilon(2,4)+\dots+\varepsilon(2,n)}$, если $n \geq 4$ и $p = 2$, и $2^5 \cdot 3^{10+\varepsilon(3,4)+\dots+\varepsilon(3,n)}$, если $n \geq 4$ и $p = 3$.

6. Описание транзитивных полиномов

6.1. Пусть $\sigma \in H(p^2)$ и $C(\sigma)$ — централизатор σ в $G(p^2)$. Так как $C(\sigma)$ — циклическая подгруппа, порожденная σ , а σ — полный цикл, ясно, что для любых $z, w \in \mathbf{Z}/p^2$ в $C(\sigma)$ существует единственная подстановка τ такая, что $\tau(z) = w$. Отсюда следует, что для любой подстановки $\omega \in G(p^2)$ в смежном классе $\omega C(\sigma)$ существует единственная подстановка ψ такая, что $\psi(0) = 0$ (здесь 0 — нуль кольца $\mathbf{Z}/p^2$).

Обозначим через $G_0(p^2)$ подгруппу $\{\psi \in G(p^2) : \psi(0) = 0\}$ группы $G(p^2)$. По предложению 13 в совокупности

$$\{\psi^{-1}\sigma\psi : \psi \in G_0(p^2)\} \quad (24)$$

встречается каждый полный цикл из $G(p^2)$, причем точно по одному разу.

6.2. Пусть A — полная система вычетов по модулю p , причем $A \subset \{0, 1, \dots, p^2 - 1\}$, $\alpha : \mathbf{Z}/p \rightarrow A$ — сюръекция, $\beta : \mathbf{Z}/p \rightarrow (\mathbf{Z}/p)^*$.

Каждый элемент $z \in \mathbf{Z}/p^2$ однозначно представляется в виде $z = u + pv$, где $0 \leq u, v \leq p-1$. Определим преобразование γ кольца $\mathbf{Z}/p$, положив

$$\gamma(u + pv) = \alpha(u) + p v \beta(u). \quad (25)$$

Очевидно, что множество A можно выбрать p^p различными способами, для каждого A существует $p!$ различных сюръекций α , существует $(p-1)^p$ различных отображений β , отображение γ биективно на $\mathbf{Z}/p^2$.

Таким образом, существует точно

$$p!(p-1)^p p^p \quad (26)$$

различных биективных на $\mathbf{Z}/p^2$ отображений вида (25).

Пусть $f(x)$ — биективный по модулю p^2 полином из $\mathbf{Z}[x]$. Обозначим через α сужение на $\mathbf{Z}/p$, а через β отображение $\langle f(x), p \rangle$. Тогда по формуле (3) находим, что $\gamma = \langle f(x), p^2 \rangle$.

Таким образом, любое полиномиальное преобразование, биективное по модулю p^2 , имеет вид (25). Так как величина (26) совпадает с порядком группы $G(p^2)$, справедливо следующее утверждение.

Предложение 17. Любое преобразование кольца $\mathbb{Z}/p^2$, имеющее вид (25), полиномиально.

На основании сказанного сразу получаем следующее описание множества $H(p^2)$.

Предложение 18. Пусть $\sigma = \langle x + 1, p^2 \rangle$ и $G_0(p^2)$ — группа всех подстановок γ из $G(p^2)$ вида (25) с условием $\gamma(0) = 0$. Тогда

$$H(p^2) = \{\gamma^{-1}\sigma\gamma : \gamma \in G_0(p^2)\}.$$

Пусть $R(p^2)$ — множество, состоящее из $|H(p^2)|$ полиномов $f(x)$, индуцирующих все подстановки из $H(p^2)$. Множество $R(p^2)$ можно найти, решив относительно коэффициентов c_k треугольную систему уравнений, которая получается из (14), при этом ясно, что достаточно брать $k \leq 2p - 1$.

6.3. При доказательстве предложения 15 были найдены (см. (21), (23)) полиномиальные представления множества

$$H_1(27) = (\langle x + 1, 27 \rangle K(27)) \cap H(27)$$

всех полных циклов $\langle f(x), 27 \rangle$ таких, что $\langle f(x), 9 \rangle = \langle x + 1, 9 \rangle$.

Теперь для получения множества $R(27)$, состоящего из $|H(27)|$ полиномов, индуцирующих все подстановки из $H(27)$, можно действовать следующим образом:

- по известным полиномиальным представлениям найти все подстановки из $H_1(27)$;
- по известным (см. (25)) подстановкам из $G_0(9)$ найти (см. раздел 6.2) множество $\{f_i(x) : 1 \leq i \leq 144\}$ индуцирующих эти подстановки полиномов (заметим, что $|G_0(9)| = |H(9)| = 2^4 3^2 = 144$);
- найти подстановки $\sigma = \langle f_i(x), 27 \rangle$, где $1 \leq i \leq 144$;
- тогда на основании предложения 13

$$H(27) = \sum_{j=1}^{144} \sigma_j^{-1} H_1(27) \sigma_j;$$

- по подстановкам из $H(27)$ найти $|H(27)|$ индуцирующих эти подстановки полиномов (см. раздел 6.2).

6.4. Легко проверить, что для $H(8)$ соответствующее множество $R(8)$ состоит из следующих 16 полиномов:

$$\begin{array}{cccc} x + 1, & 5x + 1, & 2x^2 + 3x + 1, & 2x^2 + 7x + 1, \\ x + 3, & 5x + 3, & 2x^2 + 3x + 3, & 2x^2 + 7x + 3, \\ x + 5, & 5x + 5, & 2x^2 + 3x + 5, & 2x^2 + 7x + 5, \\ x + 7, & 5x + 7, & 2x^2 + 3x + 7, & 2x^2 + 7x + 7. \end{array} \quad (27)$$

6.5. На основании предложений 9–11, а также результатов разделов 6.1–6.4 и 5.4 сформируем окончательный результат.

Предложение 19. *Полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ транзитивен по модулю p^n для любого натурального n тогда и только тогда, когда $f(x)$ представляется в виде*

$$f(x) = r(x) + t(x),$$

где $r(x) \in R(p^\mu)$, a $t(x)$ — тождество по модулю p^μ (здесь $\mu = 2$ при $p \notin \{2, 3\}$ и $\mu = 3$ при $p \in \{2, 3\}$).

7. О транзитивных полиномах по модулю 2^n

Для $p = 2$ можно получить необходимые и достаточные условия транзитивности по модулю 2^n полинома в виде системы линейных соотношений между его коэффициентами.

Предложение 20. *Полином $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$ транзитивен по модулю 8 тогда и только тогда, когда выполнена следующая система соотношений:*

$$\begin{aligned} a &\equiv 0 \pmod{4}, \\ b &\equiv 0 \pmod{2}, \\ b + c &\equiv 1 \pmod{4}, \\ d &\equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Доказательство. На основании результатов раздела 6.4 среди полиномов (27) существует такой полином $g(x)$, что полином $t(x) = f(x) - g(x)$ является тождеством по модулю 8. Так как $\deg g(t) \leq 2$, старшие коэффициенты полиномов $t(x)$ и $f(x)$ совпадают, и поскольку $\deg f(x) \leq 3$, из предложения 11 для $m = 8$ следует, что $a \equiv 0 \pmod{4}$. В силу очевидного соотношения $4x^3 \equiv 4x \pmod{8}$

$$f(x) \equiv h(x) = bx^2 + (a + c)x + d \pmod{8}.$$

По предложению 2 полином $h(x)$ транзитивен по модулю 8 тогда и только тогда, когда выполнена система соотношений

$$\begin{aligned} b &\equiv 0 \pmod{2}, \\ a + b + c &\equiv 1 \pmod{4}, \\ d &\equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned} \tag{29}$$

Так как $a \equiv 0 \pmod{4}$, из (29) получаем (28).

Если верно (28), то $a \equiv 0 \pmod{4}$ и тогда верно (29), откуда по предложению 2 полином $h(x)$ транзитивен по модулю 8. Поскольку $4x^3 \equiv 4x \pmod{8}$, справедливо сравнение $h(x) \equiv f(x) \pmod{8}$, откуда $f(x)$ транзитивен по модулю 8.

Пусть

$$f(x) = \sum_{k \leq 0} a_k x^k.$$

Нетрудно видеть, что при $k \geq 2$

$$\begin{aligned}x^{2k+1} &\equiv x^3 \pmod{8}, \\x^{2k} &\equiv x^4 \pmod{8}, \\x^4 &\equiv 6x^3 + 5x^2 + 6x \pmod{8}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$f(x) \equiv_8 (A - 2B)x^3 + (a_2 - 3B)x^2 + (a_1 - 2B)x + a_0, \quad (30)$$

где $A = a_3 + a_5 + a_7 + \dots$ и $B = a_4 + a_6 + a_8 + \dots$. Отсюда после очевидных преобразований на основании предложения 20 получаем следующее утверждение.

Предложение 21. *Полином*

$$\sum_{k \geq 0} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$$

транзитивен по модулю 2^n для всех $n \geq 1$ тогда и только тогда, когда выполнена система соотношений

$$\begin{aligned}a_3 + a_5 + a_7 + \dots &\equiv 2a_2 \pmod{4}, \\a_4 + a_6 + a_8 + \dots &\equiv a_1 + a_2 - 1 \pmod{4}, \\a_1 &\equiv 1 \pmod{2}, \\a_0 &\equiv 1 \pmod{2}.\end{aligned}$$

8. Заключение

Результаты настоящей статьи изложены в соответствии с ситуацией, имевшей место на момент их получения. С тех пор прошло почти 17 лет, в течение которых был получен ряд новых результатов по полиномиальной транзитивности над кольцами, наиболее серьезные из которых, в том числе обобщающие предлагаемые здесь, принадлежат В. С. Анашину (см., например, его обзорную статью [5]), коему автор признателен за полезные замечания, сделанные при подготовке данной статьи к печати.

Список литературы

1. Knuth D. E., *The art of computer programming. Seminumerical algorithms*. V. 2. Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
2. Nobauer W., Zur Theorie der Polinomtransformationen und Permutationspolynome. *Math. Ann.* (1964) **157**, №4, 332–342.
3. Singmaster D., On polynomial functions $\pmod{m}$. *J. Number Theory* (1974) **6**, №5, 345–352.
4. Keller G., Olson F. R., Counting polynomials functions $\pmod{p^n}$. *Duke Math. J.* (1968) **35**, №4, 835–838.
5. Anashin V. S., Uniformly distributed sequences in computer algebra, or how to construct program generators of random numbers. *J. Math. Sci.* (1998) **89**, №4, 1355–1390.

Статья поступила 27.04.2000.

Переработанный вариант поступил 14.06.2001.