Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Селезнева, О сложности представления функций
многозначных логик поляризованными полиномами, *Дис-
крет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 2, 48–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:26:58

О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами

© 2002 г. С. Н. Селезнева

Понятие поляризованной полиномиальной формы обобщается на случай функций многозначных логик. Вводятся функции Шеннона веса и длины поляризованных полиномиальных форм функций многозначных логик и доказываются некоторые их оценки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 00-01-00351.

1. Введение

В алгебре логики рассматривается представление функций поляризованными полиномиальными формами, которые также называются обобщенными формами Рида-Маллера, или каноническими поляризованными полиномами [1, 2]. Пусть

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

— набор элементов из множества $E_2 = \{0, 1\}$. Поляризованной полиномиальной формой по вектору поляризации σ называется полином относительно операций суммы по модулю 2 и умножения, в котором каждая переменная x_i встречается как $x_i^{\sigma_i}$, $i = 1, \dots, n$. Длиной поляризованной полиномиальной формы называется число ее слагаемых. Для каждой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ ее представление полиномиальной поляризованной формой по каждому вектору поляризации однозначно. Обозначим его $P^\sigma(f)$. Для исследования сложности представления булевых функций поляризованными полиномиальными формами вводится функция Шеннона. Функция Шеннона длины $L(n)$ определяется как $\max \min l(P^\sigma(f))$, где $l(P^\sigma(f))$ — длина поляризованной полиномиальной формы $P^\sigma(f)$, минимум берется по всем возможным векторам поляризации, максимум — по всем функциям, зависящим от n переменных.

Н. А. Перязевым в [3] получена точная оценка функции Шеннона

$$L(n) = \lceil (2/3)2^n \rceil$$

(выражение $[a]$ обозначает целую часть числа a).

В настоящей работе понятие поляризованной полиномиальной формы обобщается на случай функций многозначных логик и исследуется сложность полученного представления функций многозначных логик.

2. Основные понятия

Пусть k — простое число, $k \geq 3$, P_k — множество всех функций k -значной логики $f^n: E_k^n \rightarrow E_k$, где $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Обозначим S_k множество всех перестановок из P_k , то есть одноместных функций, принимающих все k значений.

Назовем вектором поляризации φ произвольный набор $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ функций из S_k . Поляризованной полиномиальной формой, или поляризованным полиномом по вектору поляризации φ назовем выражение вида

$$\sum_{i=1}^l X_i,$$

в котором каждое слагаемое X_i имеет вид

$$c_i(\varphi_{i_1}(x_{i_1}))^{m_{i_1}} \dots (\varphi_{i_{r_i}}(x_{i_{r_i}}))^{m_{i_{r_i}}}, \quad c_i \in E_k,$$

и называется поляризованным одночленом, сумма и произведение рассматриваются по модулю k . Полагается, что в поляризованных полиномах приведены все подобные слагаемые.

Теорема 1. Для произвольного вектора поляризации φ для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k существует единственная ее поляризованная полиномиальная форма по вектору φ .

Доказательство. Все функции $\varphi_i(x)$ принадлежат множеству S_k , поэтому существуют обратные к ним функции $\varphi_i^{-1}(x)$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим функцию $g(x_1, \dots, x_n) = f(\varphi_1^{-1}(x_1), \dots, \varphi_n^{-1}(x_n))$. Так как k — простое число, каждая функция из P_k представима полиномом по модулю k [4]. Пусть

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^l c_i x_{i_1}^{m_{i_1}} \dots x_{i_{r_i}}^{m_{i_{r_i}}}.$$

Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^l c_i (\varphi_{i_1}(x_{i_1}))^{m_{i_1}} \dots (\varphi_{i_{r_i}}(x_{i_{r_i}}))^{m_{i_{r_i}}}.$$

Единственность представления следует из единственности представления функции k -значной логики полиномом по модулю k .

Теорема доказана.

Поляризованный полином по вектору поляризации φ функции $f(x_1, \dots, x_n)$ будем обозначать $P^\varphi(f)$.

Введем понятия сложности поляризованных полиномов. Типом выражения

$$c_i(\varphi_{i_1}(x_{i_1}))^{m_{i_1}} \dots (\varphi_{i_{r_i}}(x_{i_{r_i}}))^{m_{i_{r_i}}}$$

назовем множество $\{\varphi_{i_1}(x_{i_1}), \dots, \varphi_{i_{r_i}}(x_{i_{r_i}})\}$. Весом поляризованного полинома P назовем число попарно различных типов его слагаемых и обозначим его $w(P)$. Длиной поляризованного полинома P назовем число его слагаемых и обозначим его $l(P)$. Заметим, что $w(P) \leq l(P)$ для произвольного поляризованного полинома P . В случае двузначной логики понятия веса и длины поляризованных полиномов совпадают.

Пусть $A \subseteq S_k$. Рассмотрим функции Шеннона сложностей представления функций k -значной логики полиномами, поляризованными функциями из множества A . Функцию Шеннона веса поляризованных полиномов $W_A(n)$ определим следующим образом: пусть

$$W_A(f) = \min w(P^\varphi(f)),$$

где минимум берется по всевозможным векторам поляризации φ , составленным из функций множества A , тогда

$$W_A(n) = \max W_A(f),$$

где максимум берется по всем функциям f , зависящим от n аргументов.

Аналогично для функции Шеннона длины поляризованных полиномов $L_A(n)$:

$$L_A(f) = \min l(P^\varphi(f)),$$

где минимум берется по всевозможным векторам поляризации φ , составленным из функций множества A , и

$$L_A(n) = \max w_A(f),$$

где максимум берется по всем функциям f , зависящим от n аргументов.

3. Некоторые оценки функций Шеннона

Теорема 2. Для любого множества A , $A \subseteq S_k$, $A \neq \emptyset$, справедливо равенство $W_A(n) = 2^n$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(x) = x^{k-1} + 1. \quad (1)$$

Докажем от противного, что $W_A(g) = 2$. Предположим, что найдется такая функция $\varphi(x)$ в множестве A , что

$$g(x) = c_{k-1}(\varphi(x))^{k-1} + c_{k-2}(\varphi(x))^{k-2} + \dots + c_1\varphi(x), \quad (2)$$

где $c_{k-1}, c_{k-2}, \dots, c_1 \in E_k$. Так как $\varphi(x) \in S_k$, найдется такой элемент a из E_k , что $\varphi(a) = 0$. Из представления (2) следует, что $g(a) = 0$ и из представления (1) следует, что $g(a) = 2$ (или $g(a) = 1$, если $a = 0$). Получаем противоречие при $k \geq 3$. Следовательно, в любом поляризованном полиноме функции $g(x)$ присутствует ненулевой свободный член. С другой стороны, функция $g(x)$ не является константой, поэтому любой ее поляризованный полином содержит еще хотя бы одно слагаемое. Таким образом, $W_A(g) = 2$.

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1^{k-1} + 1)(x_2^{k-1} + 1) \dots (x_n^{k-1} + 1).$$

Из доказанного выше следует, что $W_A(f) = 2^n$. Всего же существует 2^n типов слагаемых поляризованных полиномов функций, зависящих от n аргументов. Следовательно, $W_A(n) = 2^n$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого множества A , $A \subseteq S_k$, $A \neq \emptyset$, справедливо неравенство $L_A(n) \geq 2^n$.

Теорема 3. Для множества A , $A = \{x, x + 1, x + 2, \dots, x + (k - 1)\}$, справедливо неравенство

$$L_A(n) < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу n . Некоторые идеи индуктивного перехода почерпнуты из [3].

В качестве базиса индукции возьмем случай $n = 1$. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$. Пусть ее полином по модулю k имеет вид

$$c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0,$$

где $c_{k-1}, \dots, c_1, c_0 \in E_k$. Если $c_{k-1} = 0$, то в качестве поляризованного полинома функции $f(x)$ оставим ее полином по модулю k . Его длина не больше $k - 1$. В противном случае выполним следующие преобразования: вынося за скобку множитель c_{k-1} , получаем выражение

$$f(x) = c_{k-1} \left(x^{k-1} + \frac{c_{k-2}}{c_{k-1}} x^{k-2} + \dots + \frac{c_1}{c_{k-1}} x + \frac{c_0}{c_{k-1}} \right);$$

в выражении, оставшемся в скобках, выделим слагаемые, образующие разложение выражения $(x + d)^{k-1}$, где элемент d выбирается так, чтобы поглотить слагаемое $c_{k-2}x^{k-2}$, в результате получаем выражение

$$\begin{aligned} f(x) &= c_{k-1} \left(x^{k-1} + (k-1) \frac{c_{k-2}}{c_{k-1}(k-1)} x^{k-2} + \dots \right) \\ &= c_{k-1} (x + d)^{k-1} + c'_{k-3} x^{k-3} + \dots + c'_1 x + c'_0, \end{aligned}$$

где

$$d = \frac{c_{k-2}}{c_{k-1}(k-1)}.$$

Представим функцию $f(x)$ полиномом, поляризованным по вектору $\varphi = (x + d)$. Его длина будет не больше $k - 1$.

Утверждение теоремы в этом случае справедливо, так как

$$l(P^\varphi(f)) = k - 1 < \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k = \frac{(k(k-1)+1)-1}{k(k-1)+1} k = k - \frac{k}{k(k-1)+1}.$$

Проведем индуктивный переход. Предположим, что теорема верна при некотором значении n . Докажем, что в таком случае теорема также верна и при значении $n + 1$.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. Запишем ее полином по модулю k в виде

$$x_{n+1}^{k-1} g_{k-1}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^{k-2} g_{k-2}(x_1, \dots, x_n) + \dots + x_{n+1} g_1(x_1, \dots, x_n) + g_0(x_1, \dots, x_n).$$

По предположению индукции существует поляризованный полином функции $g_{k-1}(x_1, \dots, x_n)$, длина которого меньше $k^n(k(k-1))/(k(k-1)+1)$. Пусть $\varphi = (x + d_1, \dots, x + d_n)$ — его вектор поляризации.

Запишем каждую из функций

$$g_{k-1}(x_1, \dots, x_n), g_{k-2}(x_1, \dots, x_n), \dots, g_1(x_1, \dots, x_n), g_0(x_1, \dots, x_n)$$

полиномом, поляризованным по вектору φ . В результате получим полином функции $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, поляризованный по вектору $\psi = (x + d_1, \dots, x + d_n, x)$.

Представим его в виде

$$\sum_X X f_X(x_{n+1}),$$

где X пробегает все возможные одночлены, составленные из переменных $x_1, \dots, x_n$ и поляризованные по вектору φ . Для каждого полинома $f_X(x_{n+1})$ выполним преобразования, описанные в базисе индукции. А именно, пусть полином $f_X(x_{n+1})$ имеет вид $c_{k-1}x_{n+1}^{k-1} + \dots + c_1x_{n+1} + c_0$, где $c_{k-1}, \dots, c_1, c_0 \in E_k$. Если $c_{k-1} = 0$, то оставляем его без изменений. В противном случае приведем его к виду

$$c_{k-1}(x_{n+1} + d)^{k-1} + c'_{k-3}x_{n+1}^{k-3} + \dots + c'_1 \dots x_{n+1} + c'_0,$$

где

$$d = \frac{c_{k-2}}{c_{k-1}(k-1)}.$$

В зависимости от значения коэффициента c_{k-1} полином $f_X(x_{n+1})$ перепишем либо в виде

$$c_{k-1}(x_{n+1} + d)^{k-1} + f'_X(x_{n+1}),$$

либо оставим без изменения в виде $c_{k-2}x_{n+1}^{k-2} + f''_X(x_{n+1})$ или $f'''_X(x_{n+1})$. Заметим, что в полиномах $f'_X(x_{n+1})$, $f''_X(x_{n+1})$ и $f'''_X(x_{n+1})$ не встречаются слагаемые степени выше, чем $k-3$.

Таким образом, поляризованный полином функции $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ можно записать как

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{k-1} g_{k-1}^{(0)}(x_1, \dots, x_n) + (x_{n+1} + 1)^{k-1} g_{k-1}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \dots \\ + (x_{n+1} + (k-1))^{k-1} g_{k-1}^{(k-1)}(x_1, \dots, x_n) \\ + x_{n+1}^{k-2} g_{k-2}(x_1, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), \end{aligned} \quad (3)$$

где в полиноме $h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ переменная x_{n+1} имеет степени не выше, чем $k-3$. Заметим, что

$$g_{k-1}(x_1, \dots, x_n) = g_{k-1}^{(0)}(x_1, \dots, x_n) + g_{k-1}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \dots + g_{k-1}^{(k-1)}(x_1, \dots, x_n).$$

Важно также отметить, что любые два из поляризованных полиномов

$$g_{k-1}^{(0)}(x_1, \dots, x_n), g_{k-1}^{(1)}(x_1, \dots, x_n), \dots, g_{k-1}^{(k-1)}(x_1, \dots, x_n), g_{k-2}(x_1, \dots, x_n)$$

не содержат совпадающих слагаемых.

Выберем такой элемент i , что длина поляризованного полинома

$$\sum_{s \neq i} g_{k-1}^{(s)}(x_1, \dots, x_n)$$

меньше

$$\frac{k-1}{k} \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n.$$

Такой элемент i всегда найдется. Построим полином функции $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, поляризованный по вектору $\xi = (x + d_1, \dots, x + d_n, x + i)$, для чего каждую скобку вида $(x + d)^{k-1}$ в выражении (3) запишем как

$$((x + i) + (d - i))^{k-1}$$

и раскроем по формуле бинома Ньютона. Тогда функцию $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ можно представить в виде

$$(x_{n+1} + i)^{k-1} I_1 + (x_{n+1} + i)^{k-2} I_2 + I_3 + (x_{n+1} + i)^{k-3} J_{k-3} + \dots + J_0,$$

где

$$I_1 = g_{k-1}(x_1, \dots, x_n), \quad I_2 = \sum_{s \neq i} c_s g_{k-1}^{(s)}(x_1, \dots, x_n), \quad I_3 = g_{k-2}(x_1, \dots, x_n),$$

$$J_{k-3} = h_{k-3}(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad J_1 = h_1(x_1, \dots, x_n), \quad J_0 = h_0(x_1, \dots, x_n),$$

c_s — некоторые коэффициенты, $s \neq i$. Оценим длину представления. Ясно, что сумма длин частей I_1 и I_3 не больше k^n , длина части I_2 меньше

$$\frac{k-1}{k} \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n$$

в силу выбора элемента i , длина каждой части $J_0, J_1, \dots, J_{k-3}$ не больше k^n .

Таким образом,

$$\begin{aligned} l(P^q(f)) &< \frac{k-1}{k} \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n + (k-1)k^n = (k-1)k^n \left(\frac{k-1}{k(k-1)+1} + 1 \right) \\ &= (k-1)k^n \frac{k-1+k^2-k+1}{k(k-1)+1} = \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^{n+1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Sasao T., Besslich P., On the complexity of mod-2 sum PLA's. *IEEE Trans. Comput.* (1990) **39**, №2, 262–266.
2. Супрун В. П., Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов. *Дискретная математика* (1993) **5**, №2, 111–115.
3. Перязев Н. А., Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм. *Алгебра и логика* (1995) **34**, №3, 323–326.
4. Яблонский С. В., Функциональные построения в k -значной логике. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР* (1958) **51**, 5–142.

Статья поступила 05.06.2001.