Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Фещук, К вопросу анализа нечетких информационных графов, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 2, 65–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 10:40:03

К вопросу анализа нечетких информационных графов

© 2002 г. А. А. Фещук

Предлагается математическая модель для описания информационного поиска с нечеткой логикой. Приводятся простейшие свойства модели такие, как критерий допустимости информационного графа и критерий полноты базового множества. Описывается некоторый метод перехода от четкой задачи поиска к нечеткой и приводятся условия, при которых решение четкой задачи будет решением соответствующей нечеткой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00748.

1. Введение

В работе предлагается математическая модель, предназначенная для описания информационного поиска с нечеткой логикой. Модель вводится как обобщение информационно-графовой модели данных [1]. Полученные простейшие свойства предлагаемой модели такие, как критерий допустимости нечетких информационных графов и критерий полноты базового множества, полностью аналогичны соответствующим свойствам информационно-графовой модели.

Описывается способ перехода от четкой задачи информационного поиска к нечеткой путем размывания отношения поиска и базовых предикатных функций. Размывание этих объектов осуществляется с помощью специальных пикообразных функций, образующих основание перехода. Получен критерий того, когда основание перехода обеспечивает такой переход, при котором произвольный информационный граф, решающий четкую задачу поиска, переходит в нечеткий информационный граф, решающий соответствующую нечеткую задачу.

Автор выражает глубокую благодарность Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

В соответствии с [1] введем понятие задачи информационного поиска. Пусть X — множество запросов; Y — множество записей (объектов поиска); ρ — бинарное отношение на $X \times Y$, называемое отношением поиска; тройку $S = \langle X, Y, \rho \rangle$ будем называть типом; тройку $I = \langle X, V, \rho \rangle$, где V — некоторое конечное подмножество множества Y , будем называть задачей информационного поиска (ЗИП) типа S и будем считать, что ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$

содержательно состоит в перечислении для произвольно взятого запроса $x \in X$ всех тех и только тех записей $y \in V$, для которых $x \rho y$.

По аналогии с этим определением введем понятие задачи нечеткого поиска. Как и ранее, пусть X — множество запросов, Y — множество записей. Пусть задано отображение $\eta(x, y): X \times Y \rightarrow [0, 1]$, которое будем называть отношением нечеткого поиска. Тройку $S = \langle X, Y, \eta \rangle$ будем называть типом нечеткого поиска; тройку $I = \langle X, V, \eta \rangle$, где V — некоторое конечное подмножество множества Y , будем называть задачей нечеткого поиска (ЗНП) типа S и будем считать, что ЗНП $I = \langle X, V, \eta \rangle$ содержательно состоит в том, чтобы для произвольного числа $c \in (0, 1]$ и произвольного запроса $x \in X$ перечислить все те и только те записи $y \in V$, для которых $\eta(x, y) \geq c$.

Введем несколько упрощенное по сравнению с [1] понятие информационного графа.

Пусть F — множество символов одноместных предикатов, определенных на множестве X , называемое базовым множеством.

Понятие информационного графа (ИГ) над базовым множеством F определяется следующим образом. Берется конечная многополюсная ориентированная сеть. В ней выбирается некоторый полюс, который называется корнем. Остальные полюсы называются листьями, и им приписываются записи из Y , причем разным листьям могут быть приписаны одинаковые записи. Ребрам приписываются предикаты из множества F . Таким образом нагруженную многополюсную ориентированную сеть называем ИГ над базовым множеством F .

Функционирование ИГ определяется следующим образом. Скажем, что ребро проводит запрос $x \in X$, если предикат, приписанный этому ребру, принимает значение 1 на запросе x ; ориентированная цепочка ребер проводит запрос $x \in X$, если каждое ребро цепочки проводит запрос x ; запрос $x \in X$ проходит в вершину β ИГ, если существует ориентированная цепочка, ведущая из корня в вершину β , которая проводит запрос x ; запись y , приписанная листу α , попадает в ответ ИГ на запрос $x \in X$, если запрос x проходит в лист α . Ответом ИГ U на запрос x назовем множество записей, попавших в ответ ИГ на запрос x , и обозначим его $\mathcal{F}_U(x)$. Эту функцию $\mathcal{F}_U(x)$ будем считать результатом функционирования ИГ U .

Пусть дана ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$. Скажем, что ИГ U допустим для ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$, если $\mathcal{F}_U(x) = \{y \in V: x \rho y\}$.

Множество ИГ над базовым множеством F , допустимых для ЗИП I , обозначим $\mathcal{U}(I, F)$.

Аналогично введем понятие нечеткого информационного графа.

Пусть $\mathcal{F} = \{f_a \mid f_a: X \rightarrow [0, 1], a \in A\}$ — базовое множество нечетких функций на X , где A — некоторое множество индексов.

Понятие нечеткого информационного графа (НИГ) над базовым множеством $\mathcal{F}$, определяется следующим образом. Берется конечная многополюсная ориентированная сеть. В ней выбирается некоторый полюс, который называется корнем. Остальные полюсы называются листьями, и им приписываются записи из Y , причем разным листьям могут быть приписаны одинаковые записи. Ребрам приписываются функции из множества $\mathcal{F}$. Таким образом нагруженную многополюсную ориентированную сеть называем НИГ над базовым множеством $\mathcal{F}$.

Функционирование НИГ определяется следующим образом. Проводимостью ребра НИГ назовем функцию, равную функции, приписанной этому ребру; проводимостью ориентированной цепочки ребер НИГ назовем функцию, равную минимуму проводимостей ребер цепочки; функцией фильтра вершины β НИГ назовем функцию, равную максимуму функций проводимости ориентированных цепочек, ведущих из корня НИГ в вершину β ,

и будем обозначать ее $\varphi_\beta(x)$; скажем, что запись y , приписанная листу α , попадает в ответ НИГ на запрос $x \in X$ для числа $c \in (0, 1]$, если $\varphi_\alpha(x) \geq c$. Ответом НИГ U на запрос x для числа $c \in (0, 1]$ назовем множество записей, попавших в ответ НИГ на запрос x для числа $c \in (0, 1]$, и обозначим его $\mathcal{F}_U(x, c)$. Эту функцию $\mathcal{F}_U(x, c)$ будем считать результатом функционирования НИГ U .

Скажем, что НИГ U допустим для ЗНП $I = \langle X, V, \eta \rangle$, если для любого запроса $x \in X$ и любого числа $c \in (0, 1]$

$$\mathcal{F}_U(x, c) = \{y \in V : \eta(x, y) \geq c\}.$$

Множество НИГ над базовым множеством $\mathcal{F}$, допустимых для ЗНП I , обозначим $\mathcal{U}(I, \mathcal{F})$.

Для $y \in Y$ множество $O(y, \eta) = \{x \in X : \eta(x, y) > 0\}$ назовем тенью записи y .

Пусть U — некоторый НИГ, y — запись из Y . Через $L_U(y)$ обозначим множество листьев НИГ U , которым соответствует запись y .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. НИГ U допустим для ЗНП $I = \langle X, V, \eta \rangle$ тогда и только тогда, когда

(1) для любой записи $y \in V$ такой, что $O(y, \eta) \neq \emptyset$,

$$L_U(y) \neq \emptyset,$$

и

$$\max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) \equiv \eta(x, y);$$

(2) для любой записи $y \in V$ такой, что $O(y, \rho) = \emptyset$, либо $L_U(y) = \emptyset$, либо

$$\max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) \equiv \eta(x, y) \equiv 0.$$

Базовое множество $\mathcal{F}$ называется полным для типа $S = \langle X, Y, \eta \rangle$, если для любой ЗНП $I = \langle X, V, \eta \rangle$ типа S существует НИГ U над базовым множеством $\mathcal{F}$, допустимый для ЗНП I .

Справедлив следующий результат, относящийся к проблеме полноты для НИГ.

Теорема 2. Базовое множество $\mathcal{F}$ является полным для типа $S = \langle X, Y, \eta \rangle$ тогда и только тогда, когда для любой записи $y \in Y$ такой, что $O(y, \eta) \neq \emptyset$, функция $\eta(x, y)$ как функция от x может быть представлена формулой вида

$$\eta(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m_i} f_{ij}(x),$$

где $f_{ij} \in \mathcal{F}$.

Теоремы 1 и 2 являются обобщениями теорем 1 и 2 из [2].

Далее всюду будем считать, что множество запросов $X = [0, 1]$ и множество записей $Y = [0, 1]$.

Введем некоторый способ перехода от задачи информационного поиска к задаче нечеткого поиска такой, что для замкнутого ρ и числа $c = 1$ задача нечеткого поиска совпадает с исходной задачей информационного поиска.

Рассмотрим некоторую функцию $\mu: \mathbf{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ такую, что

$$\mu(x, y) = 1 \iff (x, y) = (0, 0)$$

и для любых $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство $\mu(\lambda x, 0) > \mu(x, 0)$, и если $y \neq 0$, то $\mu(\lambda x, \lambda y) \geq \mu(x, y)$. Рассмотрим некоторую функцию $\mu': \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ такую, что $\mu'(x) = 1 \iff x = 0$ и для любого $x \in [-1, 1]$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство $\mu'(\lambda x) > \mu'(x)$. Пару $\phi = \langle \mu, \mu' \rangle$ назовем основанием перехода. Основание $\phi = \langle \mu, \mu' \rangle$ позволяет задать оператор перехода ϕ , который каждой ЗИП позволяет сопоставить некоторую ЗНП, а каждому ИГ некоторый НИГ.

Пусть $\rho \subseteq [0, 1]^2$ — отношение поиска. Через $\phi(\rho)$ обозначим нечеткое отношение

$$\eta(x, y) = \sup_{(x_0, y_0) \in \rho} \mu(x - x_0, y - y_0).$$

Заметим, что если $\rho \neq \emptyset$, то множество $\{(x, y) \in [0, 1]^2: \eta(x, y) = 1\}$ замкнуто.

Каждой ЗИП $I = \langle [0, 1], V, \rho \rangle$ сопоставим ЗНП $\phi(I) = \langle [0, 1], V, \phi(\rho) \rangle$.

Пусть F — некоторое базовое множество предикатов на $[0, 1]$. Для $f \in F$ пусть

$$N_f = \{x \in [0, 1]: f(x) = 1\},$$

и для $A \subseteq [0, 1]$ пусть

$$\mu'(A)(x) = \sup_{x_0 \in A} \mu'(x - x_0).$$

Предикату $f \in F$ сопоставим функцию $\phi(f)(x) = \mu'(N_f)(x)$. Множеству F сопоставим базовое множество нечетких функций $\phi(F) = \{\phi(f): f \in F\}$. Заметим, что если $N_f \neq \emptyset$, то множество $\{x \in [0, 1]: \phi(f)(x) = 1\}$ замкнуто.

Пусть U — ИГ над базовым множеством F . Сопоставим ему НИГ $\phi(U)$ над базовым множеством $\phi(F)$, полученный из ИГ U заменой для каждого ребра ИГ U предиката f , приписанного этому ребру, на функцию $\phi(f)$.

Для произвольного базового множества предикатов F рассмотрим всевозможные конечные подмножества $F_\lambda \subseteq F$. Для каждого F_λ и произвольного основания перехода $\phi = \langle \mu, \mu' \rangle$ рассмотрим функцию $g_{\lambda, \phi}(x) = \min_{f \in F_\lambda} \phi(f)(x)$. Заметим, что если $g_{\lambda, \phi}(x) < 1$ для всех $F_\lambda \subseteq F$ и всех $x \in [0, 1]$, то либо базовое множество F пусто, либо $N_f = \emptyset$ для всех предикатов $f \in F$.

Учитывая, что в дальнейшем основание перехода будет предполагаться фиксированным, символ ϕ в обозначении $g_{\lambda, \phi}$ будем опускать, то есть положим $g_\lambda(x) \equiv g_{\lambda, \phi}(x)$ при выбранном ϕ .

Фиксируем основание перехода ϕ . Для тех индексов λ , для которых функция g_λ принимает значение 1, положим

$$\begin{aligned} a'_\lambda &= \sup_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ \forall t \in [0, x] \ g_\lambda(t) = \mu'(t-x)}} x, & a''_\lambda &= \sup_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ \forall t \in [x, 1] \ g_\lambda(t) = \mu'(t-x)}} (1-x), \\ b'_\lambda &= \sup_{\substack{0 \leq t \leq x \leq 1 \\ \forall t' \in [t, x] \ g_\lambda(t') = \mu'(t'-x)}} (x-t), & b''_\lambda &= \sup_{\substack{0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \forall t' \in [x, t] \ g_\lambda(t') = \mu'(t'-x)}} (t-x). \end{aligned}$$

Если $g_\lambda(x) < 1$ для всех $x \in [0, 1]$, то положим $a'_\lambda = a''_\lambda = b'_\lambda = b''_\lambda = 0$.

Положим

$$\begin{aligned} a'_F &= \sup_{\lambda} a'_{\lambda}, & a''_F &= \sup_{\lambda} a''_{\lambda}, \\ b'_F &= \sup_{\lambda} b'_{\lambda}, & b''_F &= \sup_{\lambda} b''_{\lambda}. \end{aligned}$$

Заметим, что $a'_F \leq b'_F$, $a''_F \leq b''_F$.

Положим $u_F = 1$, если $b'_F = b'_{\lambda}$ или $b''_F = b''_{\lambda}$ для некоторого λ . Если такого λ не существует, то положим $u_F = 0$. Если $a'_F = b'_F$ и $a'_F = a'_{\lambda}$ для некоторого λ , то положим $u'_F = 1$, в противном случае положим $u'_F = 0$. Если $a''_F = b''_F$ и $a''_F = a''_{\lambda}$ для некоторого λ , то положим $u''_F = 1$, в противном случае положим $u''_F = 0$.

Для каждого подмножества $F_{\lambda} \subseteq F$, для которого g_{λ} принимает значение 1, рассмотрим множество точек $V_{\lambda} = \{v_1^{\lambda}, v_2^{\lambda}, \dots\}$ таких, что $g_{\lambda}(v_i^{\lambda}) < 1$ и существует $x \in [0, 1]$, для которого $g_{\lambda}(x) = 1$ и либо для всех $t \in [x, v_i^{\lambda})$

$$g_{\lambda}(t) = \mu'(t - x)$$

и в некоторой окрестности v_i^{λ} при $t > v_i^{\lambda}$ выполняется неравенство $g_{\lambda}(t) \neq \mu'(t - x)$, либо для всех $t \in (v_i^{\lambda}, x]$

$$g_{\lambda}(t) = \mu'(t - x)$$

и в некоторой окрестности v_i^{λ} при $t < v_i^{\lambda}$ выполняется неравенство $g_{\lambda}(t) \neq \mu'(t - x)$. Обозначим $c_i^{\lambda} = g_{\lambda}(v_i^{\lambda})$. Если $0 \in V_{\lambda}$ для некоторого индекса λ , то положим

$$b' = \inf_{\lambda, i: v_i^{\lambda}=0} c_i^{\lambda},$$

в противном случае положим $b' = \infty$. Если $1 \in V_{\lambda}$ для некоторого индекса λ , то положим

$$b'' = \inf_{\lambda, i: v_i^{\lambda}=1} c_i^{\lambda},$$

в противном случае положим $b'' = \infty$. Рассмотрим множества $V'_{\lambda} = V_{\lambda} \setminus \{0, 1\}$. Если $V'_{\lambda} \neq \emptyset$ для некоторого индекса λ , то положим

$$b = \inf_{\lambda, i: v_i^{\lambda} \in V'_{\lambda}} c_i^{\lambda},$$

в противном случае положим $b = \infty$. Положим

$$\varepsilon'_F = \min\{b', b\}, \quad \varepsilon''_F = \min\{b, b''\}.$$

Скажем, что базовое множество предикатов F и основание $\phi = \langle \mu, \mu' \rangle$ согласованы, если

(1) для любых $A_1, \dots, A_m \in \{N_f: f \in F\}$ таких, что

$$\bigcap_{i=1}^m A_i \neq \emptyset,$$

справедливо соотношение

$$\min\{\mu'(A_1), \dots, \mu'(A_m)\} \equiv \mu' \left(\bigcap_{i=1}^m A_i \right),$$

(2) $\mu(x, 0) \equiv \mu'(x)$ для всех $x \in (-b'_F, b''_F)$, причем если $u'_F = 1$, то

$$\mu(-b'_F, 0) = \mu'(-b'_F),$$

если $u''_F = 1$, то

$$\mu(b''_F, 0) = \mu'(b''_F),$$

если $u'_F = u''_F = 0$ и $u_F = 1$, то

$$\max\{\mu(-b'_F, 0), \mu(b''_F, 0)\} = \max\{\mu'(-b'_F), \mu'(b''_F)\},$$

(3) для всех $y \neq 0$ и всех $x \in [-1, 0]$ справедливо неравенство $\mu(x, y) \leq \varepsilon'_F$, для всех $y \neq 0$ при всех $x \in [0, 1]$ справедливо неравенство $\mu(x, y) \leq \varepsilon''_F$.

Назовем ИГ неизбыточным, если в нем нет ориентированных цепей, проводимость которых тождественно равна нулю.

Множество неизбыточных ИГ над базовым множеством F , допустимых для ЗИП I , обозначим $\mathcal{U}'(I, \mathcal{F})$.

Скажем, что базовое множество предикатов F и основание $\phi = \langle \mu, \mu' \rangle$ вырождены, если для любого отношения $\rho \subseteq [0, 1]^2$ и любой ЗИП I типа $\langle [0, 1], [0, 1], \rho \rangle$ выполняется соотношение

$$(U \in \mathcal{U}'(I, F) \implies \phi(U) \in \mathcal{U}(\phi(I), \phi(F))).$$

Теорема 3. Базовое множество предикатов F и основание $\phi = \langle \mu, \mu' \rangle$ вырождены тогда и только тогда, когда они согласованы.

3. Критерий допустимости нечетких информационных графов

В данном разделе приводится доказательство теоремы 1.

Начнем с доказательства необходимости. Пусть НИГ U допустим для ЗНП $I = \langle X, V, \eta \rangle$. Тогда по определению для любого запроса $x \in X$ и любого числа $c \in (0, 1]$

$$\mathcal{J}_U(x, c) = \{y \in V : \eta(x, y) \geq c\}.$$

Пусть запись $y \in V$ такова, что $O(y, \eta) \neq \emptyset$. Это означает, что существуют $x \in O(y, \eta)$ и $c^* \in (0, 1]$ такие, что $\eta(x, y) = c^*$. НИГ U допустим для ЗНП I , значит, среди его листьев есть лист, которому соответствует запись y . Поэтому $L_U(y) \neq \emptyset$.

Пусть для некоторого $x \in X$

$$\eta(x, y) < \max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) = c'.$$

Тогда $\eta(x, y) < c'$, следовательно $y \notin \mathcal{J}_U(x, c')$ (из определения допустимого НИГ для ЗНП), а из равенства

$$\max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) = c'$$

следует, что $y \in \mathcal{J}_U(x, c')$ (из определения $\mathcal{J}_U(x, c)$). Получаем противоречие.

Пусть теперь для некоторого $x \in X$

$$\max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) < \eta(x, y) = c''.$$

Тогда

$$\max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) < c'',$$

следовательно, $y \notin \mathcal{J}_U(x, c'')$ (из определения $\mathcal{J}_U(x, c)$), а из равенства $\eta(x, y) = c''$ следует, что $y \in \mathcal{J}_U(x, c'')$ (из определения допустимого НИГ для ЗНП). Получаем противоречие.

Итак,

$$\max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) \equiv \eta(x, y).$$

Если же запись $y \in Y$ такова, что $O(y, \eta) = \emptyset$, то $\eta(x, y) = 0$ для любого запроса $x \in X$. Поэтому для любого числа $c \in (0, 1]$

$$y \notin \mathcal{J}(x, c)$$

для любого запроса $x \in X$ (из определения допустимого НИГ для ЗНП), и либо $L_U(y) = \emptyset$, либо

$$\max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) \equiv 0.$$

Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполняются условия (1) и (2) теоремы.

Пусть для некоторого запроса $x \in X$, некоторой записи $y \in V$ и некоторого числа $c \in (0, 1]$

$$\max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) \equiv \eta(x, y) \geq c.$$

Тогда $y \in \mathcal{J}_U(x, c)$ (по определению $\mathcal{J}_U(x, c)$) и одновременно

$$y \in \{y \in V : \eta(x, y) \geq c\},$$

если же

$$\max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) \equiv \eta(x, y) < c,$$

то $y \notin \{y \in V : \eta(x, y) \geq c\}$. Поэтому для любого запроса $x \in X$ и для любого числа $c \in (0, 1]$

$$\mathcal{J}_U(x, c) = \{y \in V : \eta(x, y) \geq c\},$$

то есть НИГ U допустим для ЗНП $I = \langle X, V, \eta \rangle$.

Теорема доказана.

Отметим, что понятие ЗИП, введенное выше, является частным случаем понятия ЗНП. Действительно, ЗИП $I = \langle X, Y, \rho \rangle$ можно рассматривать как ЗНП $I = \langle X, Y, \rho(x, y) \rangle$ с отношением нечеткого поиска

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \rho y, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Базовое множество предикатов F можно рассматривать как базовое множество нечетких функций F , а любой ИГ U над F как НИГ U над F . В таком случае для любого $x \in X$ для любого $c \in (0, 1]$ выполняется равенство

$$\{y \in V : \rho(x, y) \geq c\} = \{y \in V : x \rho y\},$$

следовательно, для ЗИП $I = \langle X, Y, \rho \rangle$

$$\mathcal{F}_U(x) \equiv \mathcal{F}_U(x, c)$$

для любого $c \in (0, 1]$. Поэтому ИГ U допустим для ЗИП $I = \langle X, Y, \rho \rangle$ тогда и только тогда, когда НИГ U допустим для ЗНП $I = \langle X, Y, \rho(x, y) \rangle$. Поэтому теорема 1 справедлива для ИГ и дальше будет использоваться для ИГ без комментариев.

4. Критерий полноты базового множества

В данном разделе приводится доказательство теоремы 2.

Начнем с доказательства необходимости. Пусть базовое множество $\mathcal{F}$ полно для типа $S = \langle X, Y, \eta \rangle$. Возьмем произвольную запись $y \in Y$ такую, что $O(y, \eta) \neq \emptyset$. Пусть $V = \{y\}$. Рассмотрим ЗНП $I = \langle X, V, \eta \rangle$. Существует НИГ U над базовым множеством $\mathcal{F}$, допустимый для ЗНП I . Рассмотрим $L_U(y)$. По теореме 1 это множество не пусто и

$$\max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) \equiv \eta(x, y).$$

Но каждая $\varphi_\alpha(x)$ по определению равна максимуму проводимостей ориентированных цепей, ведущих из корня в вершину α . Занумеруем все ориентированные цепи, ведущие из корня в вершины из $L_U(y)$ (в силу того, что U есть конечный граф, таких цепей конечное число). В каждой цепи занумеруем ребра (их тоже конечное число). Функцию, приписанную j -му ребру в i -й цепи, обозначим f_{ij} . Тогда

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &\equiv \max_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha(x) = \max_{\alpha \in L_U(y)} \max_{i \in I_\alpha} \min_{1 \leq j \leq m_i} f_{ij}(x) \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m_i} f_{ij}(x), \end{aligned}$$

где I_α есть множество номеров, соответствующих ориентированным цепям, ведущим из корня в вершину α , m_i есть число ребер в i -й цепи, n есть число ориентированных цепей из корня в вершины из $L_U(y)$.

Необходимость доказана.

Докажем теперь достаточность. Возьмем произвольную ЗНП $I = \langle X, V, \eta \rangle$, где $V = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$. Построим НИГ U , допустимый для ЗНП I .

Для любой записи $y_l \in V$ такой, что $O(y_l, \eta) \neq \emptyset$, функция $\eta(x, y_l)$ как функция от x может быть представлена формулой вида

$$\eta(x, y_l) = \max_{1 \leq i \leq n_l} \min_{1 \leq j \leq m_{li}} f_{ij}^l(x),$$

где $f_{ij}^l \in \mathcal{F}$.

Возьмем $k + 1$ вершину, выделим корень, остальные k вершин назовем листьями и занумеруем числами $1, 2, \dots, k$.

Для всех l от 1 до k припишем листу с номером l (обозначим его α_l) запись y_l . Если $O(y_l, \eta) \neq \emptyset$, то проведем из корня в лист α_l ровно n_l цепей, причем i -я цепь состоит из m_{li} ребер. Припишем j -му ребру в i -й цепи функцию f_{ij}^l . НИГ U построен.

Тогда функция фильтра l -й вершины имеет вид

$$\varphi_{\alpha_l}(x) = \max_{1 \leq i \leq n_l} \min_{1 \leq j \leq m_{li}} f_{ij}^l(x),$$

то есть $\varphi_{\alpha_l}(x) = \eta(x, y_l)$. С другой стороны, для любой вершины $y \in V$ такой, что $O(y, \eta) = \emptyset$, множество $L_U(y)$ пусто. Таким образом, по теореме 1 НИГ U допустим для ЗНП I .

Произвольность выбора ЗНП I доказывает достаточность.

Теорема доказана.

5. Критерий вырожденности основания перехода

Замыкание произвольного множества A вещественной прямой будем обозначать $[A]$.

Скажем, что x_0 является точкой слабого максимума функции f , если выполняется одно из следующих условий:

- x_0 является точкой локального максимума функции f ,
- f возрастает в левой полуокрестности точки x_0 и убывает в правой полуокрестности точки x_0 ,
- f возрастает в левой полуокрестности и в правой полуокрестности точки x_0 , но $f(x_0 - 0) > f(x_0 + 0)$,
- f убывает в левой и в правой полуокрестности точки x_0 , но $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.

Лемма 1. Для произвольного множества $A \subseteq [0, 1]$ все слабые максимумы функции $\mu'(A)(x)$ принадлежат $[A]$.

Доказательство. Множество $[A]$ можно представить в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся отрезков (см. [3], с. 60). Рассмотрим такое представление

$$[A] = \bigcup_i [a_i^1, a_i^2],$$

где $a_i^1 \leq a_i^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu'(A)(x) &= \sup_{x' \in A} \mu'(x - x') = \sup_{x' \in [A]} \mu'(x - x') = \sup_{x' \in \bigcup_i [a_i^1, a_i^2]} \mu'(x - x') \\ &= \sup_i \sup_{x' \in [a_i^1, a_i^2]} \mu'(x - x') = \sup_i \mu'([a_i^1, a_i^2])(x). \end{aligned}$$

Индукцией по числу n компонент связности в множестве $[A]$ покажем, что $\mu'(A) \equiv \mu'([A])$ не имеет слабых максимумов вне $[A]$. При $n = 1$ справедливо равенство $[A] = [a_1^1, a_1^2]$, на $[0, a_1^1]$

$$\mu'(A)(x) \equiv \sup_{x' \in A} \mu'(x - x') = \mu'(x - a_1^1)$$

– монотонно возрастающая функция, на $[a_1^2, 1]$

$$\mu'(A)(x) \equiv \mu'(x - a_1^2)$$

— монотонно убывающая функция, и $\mu'(A)(x) \equiv 1$ на $[a_1^1, a_1^2]$. Следовательно, все слабые максимумы функции $\mu'(A)$ принадлежат $[A]$. Предположим, что утверждение леммы доказано для не более, чем n компонент связности $[A]$. Рассмотрим

$$[A] = \bigcup_{i=1}^{n+1} [a_i^1, a_i^2],$$

где $a_i^1 \leq a_i^2 < a_{i+1}^1$. Если $\mu'(x) \equiv 0$ при $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, то

$$\mu'([A])(x) = \begin{cases} 1, & x \in [A], \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus [A], \end{cases}$$

и, следовательно, утверждение леммы справедливо. Если $\mu'(x)$ не есть тождественный ноль при $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, то положим $x_0 = \inf x$, где нижняя грань берется по всем $x \in [0, a_{n+1}^1]$ таким, что

$$\mu'([a_{n+1}^1, a_{n+1}^2])(x) > \mu' \left(\bigcup_{i=1}^n [a_i^1, a_i^2] \right) (x).$$

На $[0, x_0)$

$$\mu'([a_{n+1}^1, a_{n+1}^2])(x) \leq \mu' \left(\bigcup_{i=1}^n [a_i^1, a_i^2] \right) (x),$$

на $(x_0, 1]$

$$\mu'([a_{n+1}^1, a_{n+1}^2])(x) \geq \mu' \left(\bigcup_{i=1}^n [a_i^1, a_i^2] \right) (x).$$

Следовательно, на $[0, x_0)$

$$\mu'([A])(x) \equiv \mu' \left(\bigcup_{i=1}^n [a_i^1, a_i^2] \right) (x),$$

а на $(x_0, 1]$

$$\mu'([A])(x) \equiv \mu'([a_{n+1}^1, a_{n+1}^2])(x).$$

По индуктивному предположению

$$\mu' \left(\bigcup_{i=1}^n [a_i^1, a_i^2] \right) (x)$$

не имеет слабых максимумов вне

$$\bigcup_{i=1}^n [a_i^1, a_i^2],$$

а

$$\mu' \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} [a_i^1, a_i^2] \right) (x)$$

не имеет слабых максимумов вне $[a_{n+1}^1, a_{n+1}^2]$. На $[a_n^2, 1]$

$$\mu' \left(\bigcup_{i=1}^n [a_i^1, a_i^2] \right) (x) = \mu'(x - a_n^2)$$

— монотонно убывающая функция, на $[0, a_{n+1}^1]$

$$\mu'([a_{n+1}^1, a_{n+1}^2])(x) = \mu'(x - a_{n+1}^1)$$

— монотонно возрастающая функция. Поэтому x_0 — точка локального минимума $\mu'([A])(x)$. Следовательно, все слабые максимумы функции $\mu'([A])(x)$ принадлежат $[A]$. Переходя к пределу по n , получаем утверждение леммы.

Следствие 1. Пусть $A \subseteq [0, 1]$, $c \in [0, 1]$, и пусть

$$(x, y) \in \rho \iff (x \in A) \& (y = c).$$

Тогда все слабые максимумы функции $\phi(\rho)(x, c)$ принадлежат $[A]$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\phi(\rho)(x, c) = \sup_{(x_0, y_0) \in \rho} \mu(x - x_0, c - y_0) = \sup_{x_0 \in A} \mu(x - x_0, 0).$$

Введем функцию $\tilde{\mu}(x) = \mu(x, 0)$. Заметим, что $\tilde{\mu}$ обладает теми же свойствами, что и функция μ' , а именно,

$$\tilde{\mu}(x) = 1 \iff x = 0$$

и для любого $x \in [-1, 1]$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство $\tilde{\mu}(\lambda x) > \tilde{\mu}(x)$. Для произвольного множества $B \subseteq [0, 1]$ положим

$$\tilde{\mu}(B) = \sup_{x_0 \in B} \tilde{\mu}(x - x_0).$$

Тогда $\phi(\rho)(x, c) = \tilde{\mu}(A)(x)$. Теперь достаточно показать, что все слабые максимумы функции $\tilde{\mu}(A)(x)$ принадлежат $[A]$. Доказательство этого факта совпадает с доказательством леммы 1, только вместо функции μ' рассматривается функция $\tilde{\mu}$.

Следствие 2. Пусть A — непустое подмножество $[0, 1]$. В точках слабого максимума функция $\mu'(A)$ принимает значение 1.

Лемма 2. Если $f_1, \dots, f_m$ — предикаты, то либо

$$\phi(f_1 \& \dots \& f_m) \equiv \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i),$$

либо $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)$ имеет слабый максимум, не принадлежащий $[\bigcap_{i=1}^m N_{f_i}]$.

Доказательство. Для любых предикатов $f_1, \dots, f_m$ справедливо неравенство

$$\phi(f_1 \& \dots \& f_m) \leq \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i).$$

Пусть

$$\phi(f_1 \& \dots \& f_m) \equiv \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i).$$

Тогда в силу леммы 1 все слабые максимумы функции $\phi(f_1 \& \dots \& f_m)$, а следовательно, и функции $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)$, принадлежат $[\bigcap_{i=1}^m N_{f_i}]$.

Предположим, что существует точка x_0 такая, что

$$\phi(f_1 \& \dots \& f_m)(x_0) < \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x_0).$$

Индукцией по числу m предикатов покажем, что в таком случае $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)$ имеет слабый максимум, не принадлежащий $[\bigcap_{i=1}^m N_{f_i}]$.

При $m = 2$ возможны следующие случаи.

Случай 1. Пусть $\min\{\phi(f_1)(x_0), \phi(f_2)(x_0)\} = 1$. Следовательно, в силу того, что $\min\{\phi(f_1)(x), \phi(f_2)(x)\} \leq 1$ для всех x , точка x_0 есть точка слабого максимума функции $\min\{\phi(f_1), \phi(f_2)\}$. С другой стороны,

$$\phi(f_1 \& f_2)(x_0) < \min\{\phi(f_1)(x_0), \phi(f_2)(x_0)\} = 1,$$

поэтому $x_0 \notin [N_{f_1} \cap N_{f_2}]$, так как $\phi(f_1 \& f_2)(x) = 1$ для всех $x \in [N_{f_1} \cap N_{f_2}]$.

Случай 2. Пусть $\min\{\phi(f_1)(x_0), \phi(f_2)(x_0)\} < 1$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\min\{\phi(f_1)(x_0), \phi(f_2)(x_0)\} = \phi(f_1)(x_0).$$

В силу следствия 2 леммы 1 x_0 не может быть точкой слабого максимума функции $\phi(f_1)$. Пусть $\phi(f_1)$ возрастает в точке x_0 (случай, когда $\phi(f_1)$ убывает в точке x_0 , рассматривается аналогично). В силу леммы 1 существует точка $x_1 > x_0$ такая, что $\phi(f_1)$ монотонно возрастает на $[x_0, x_1]$ и $\phi(f_1)(x_1) = 1$. Понятно, что на $[x_0, x_1]$ нет точек из $[N_{f_1}]$. Поэтому на $[x_0, x_1]$ выполняется соотношение

$$\phi(f_1)(x) \equiv \sup_{x' \in N_{f_1}} \mu'(x - x') = \mu'(x - x_1).$$

Пусть $\phi(f_2)(x_1) = 1$, тогда и $\min\{\phi(f_1)(x_1), \phi(f_2)(x_1)\} = 1$. Докажем, что при этом $\phi(f_1 \& f_2)(x_1) < 1$. Предположим, что $\phi(f_1 \& f_2)(x_1) = 1$. Тогда $x_1 \in [N_{f_1} \cap N_{f_2}]$, и

$$\phi(f_1 \& f_2)(x_0) = \sup_{x' \in N_{f_1} \cap N_{f_2}} \mu'(x_0 - x') \geq \mu'(x_0 - x_1) = \phi(f_1)(x_0),$$

следовательно, $\phi(f_1 \& f_2)(x_0) = \min\{\phi(f_1)(x_0), \phi(f_2)(x_0)\}$, и мы получаем противоречие. Значит,

$$\phi(f_1 \& f_2)(x_1) < \min\{\phi(f_1)(x_1), \phi(f_2)(x_1)\} = 1.$$

Следовательно, этот случай сводится к случаю 1 для точки x_1 .

Пусть $\phi(f_2)(x_1) < 1$ и $\phi(f_1)(x_0) = \phi(f_2)(x_0)$. Тогда, так как $x_1 \notin [N_{f_2}]$, существует точка $x_2 \in [0, x_0]$ такая, что $\phi(f_2)(x_2) = 1$ и $\phi(f_2)(x) \equiv \mu'(x - x_2)$ на $[x_2, x_0]$. Покажем, что $x_2 \notin [N_{f_1}]$. Действительно, если $x_2 \in [N_{f_1}]$, то

$$\phi(f_1 \& f_2)(x_0) \geq \mu'(x_0 - x_2) = \phi(f_2)(x_0) = \phi(f_1)(x_0) = \min\{\phi(f_1)(x_0), \phi(f_2)(x_0)\},$$

следовательно,

$$\phi(f_1 \& f_2)(x_0) = \min\{\phi(f_1)(x_0), \phi(f_2)(x_0)\},$$

и мы опять получаем противоречие.

Понятно, что $[x_2, x_1] \cap [N_{f_1}] = \emptyset$ и $(x_2, x_1] \cap [N_{f_2}] = \emptyset$. Следовательно,

$$\phi(f_1)(x_0 - 0) < \phi(f_1)(x_0), \quad \phi(f_2)(x_0 + 0) < \phi(f_2)(x_0),$$

так что x_0 — точка слабого максимума функции $\min\{\phi(f_1)(x), \phi(f_2)(x)\}$ и, очевидно, $x_0 \notin [N_{f_1} \cap N_{f_2}]$.

Пусть $\phi(f_2)(x_1) < 1$ и $\phi(f_1)(x_0) < \phi(f_2)(x_0)$. Существует точка $x_2 \in [0, x_1]$ такая, что $\phi(f_2)(x_2) = 1$ и $\phi(f_2)(x) \equiv \mu'(x - x_2)$ на $[x_0, x_2]$ ($[x_2, x_0]$). Понятно, что $[x_2, x_1] \cap N_{f_1} = \emptyset$. Пусть $x_3 = \sup_{x \in N_{f_2} \cap [x_2, x_1]} x$. Так как $\phi(f_2)(x_1) < 1$, то $x_3 \neq x_1$. Тогда $\phi(f_2)(x) \equiv \mu'(x - x_3)$ — монотонно убывающая функция на $[x_3, x_1]$. На $[x_0, x_1]$ функция $\phi(f_1)(x) \equiv \mu'(x - x_1)$ монотонно возрастает. Так как $\phi(f_1)(x_0) < \phi(f_2)(x_0)$, а $\phi(f_2)(x_1) < \phi(f_1)(x_1) = 1$, существует точка $x^* \in (x_0, x_1) \cap (x_3, x_1)$ такая, что на отрезке $[x_0, x^*]$ функция $\min\{\phi(f_1)(x), \phi(f_2)(x)\} = \phi(f_1)(x)$ монотонно возрастает, а на отрезке $[x^*, x_1]$ функция $\min\{\phi(f_1)(x), \phi(f_2)(x)\} = \phi(f_2)(x)$ монотонно убывает. Тогда x^* — точка слабого максимума функции $\min\{\phi(f_1)(x), \phi(f_2)(x)\}$, и, очевидно, $x^* \notin [N_{f_1} \cap N_{f_2}]$.

Если $\phi(f_1)$ имеет в точке x_0 локальный минимум, то в силу леммы 1 существуют точки x' и x'' такие, что $\phi(f_1)(x') = \phi(f_1)(x'') = 1$, $\phi(f_1)$ убывает на интервале (x', x_0) и возрастает на интервале (x_0, x'') . Понятно, что $\phi(f_1)(x) \equiv \mu'(x - x')$ на $[x', x_0)$, а на $(x_0, x'']$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \phi(f_1)(x) &\equiv \mu'(x - x''), \\ \phi(f_1)(x_0) &= \max\{\mu'(x_0 - x'), \mu'(x_0 - x'')\}. \end{aligned}$$

Если $\phi(f_1)(x_0) = \mu'(x_0 - x')$, то положим $x_1 = x'$, в противном случае положим $x_1 = x''$. Далее доказательство совпадает с описанным выше.

Базис индукции доказан.

Проведем индуктивный переход. Пусть лемма справедлива для не более, чем m предикатов. Тогда либо

$$\phi(f_1 \& \dots \& f_m) \equiv \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i),$$

либо $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)$ имеет слабый максимум, не принадлежащий $[\bigcap_{i=1}^m N_{f_i}]$.

Если для всех $x \in [0, 1]$

$$\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i) \leq \phi(f_{m+1}),$$

то

$$\min_{1 \leq i \leq m+1} \phi(f_i) \equiv \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i).$$

Понятно, что в таком случае $[\bigcap_{i=1}^{m+1} N_{f_i}] = [\bigcap_{i=1}^m N_{f_i}]$, слабые максимумы функций $\min_{1 \leq i \leq m+1} \phi(f_i)(x)$ и $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x)$ совпадают, и по предположению индукции утверждение леммы верно.

Если для всех $x \in [0, 1]$

$$\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i) \geq \phi(f_{m+1}),$$

то $\min_{1 \leq i \leq m+1} \phi(f_i) \equiv \phi(f_{m+1})$. Понятно, что в таком случае $[\bigcap_{i=1}^{m+1} N_{f_i}] = [N_{f_{m+1}}]$, слабые максимумы функции $\min_{1 \leq i \leq m+1} \phi(f_i)(x)$ совпадают со слабыми максимумами функции $\phi(f_{m+1})(x)$, и по предположению индукции утверждение леммы верно.

Пусть теперь $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x) - \phi(f_{m+1})(x)$ меняет знак на $[0, 1]$. Положим

$$\begin{aligned} X_0 &= \{x \in [0, 1]: (\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x+0) < \phi(f_{m+1})(x+0)) \\ &\quad \& (\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x-0) > \phi(f_{m+1})(x-0))\}, \\ X_1 &= \{x \in [0, 1]: (\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x+0) > \phi(f_{m+1})(x+0)) \\ &\quad \& (\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x-0) < \phi(f_{m+1})(x-0))\}. \end{aligned}$$

Понятно, что $X_0 \cup X_1 \neq \emptyset$. Без ограничения общности можно считать, что $X_0 \neq \emptyset$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X_0$. Предположим, что $\phi(f_{m+1})$ убывает в x_0 , тогда $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)$ тоже убывает в x_0 . Согласно лемме 1 существует точка x_1 такая, что $\phi(f_{m+1})(x) \equiv \mu'(x - x_1)$ на $[x_1, x_0 + \delta_1]$, $\delta_1 > 0$. Так как

$$\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x_0 - 0) > \phi(f_{m+1})(x_0 - 0)$$

и $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)$ убывает в x_0 , должна существовать точка $x_2 \in (x_1, x_0]$ такая, что для некоторых $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$

$$\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x) \equiv \mu'(x - x_2)$$

на $[x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_3]$ (так как значение функции $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)$ на интервале, где она монотонна, определяется значением на этом интервале по крайней мере одной из функций $\phi(f_i)$, $i = 1, \dots, m$). Но тогда

$$\phi(f_{m+1})(x) < \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x)$$

на $[x_0, x_0 + \min\{\delta_1, \delta_3\}]$, получаем противоречие.

Предположим, что x_0 — точка локального минимума $\phi(f_{m+1})$. Согласно лемме 1 существуют точка x_1 такая, что

$$\phi(f_{m+1})(x) \equiv \mu'(x - x_1)$$

на $[x_1, x_0]$ и точка $x_2 \in (x_0, 1]$ такая, что

$$\phi(f_{m+1})(x) \equiv \mu'(x - x_2)$$

на $(x_0, x_2]$. Так как

$$\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x - 0) > \phi(f_{m+1})(x - 0),$$

должна существовать точка $x_3 \in (x_1, x_0]$ такая, что для некоторого $\delta > 0$

$$\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x) \equiv \mu'(x - x_3)$$

на $[x_0 - \delta, x_0]$. Для любого $x \in [x_3, x_0 + (x_3 - x_1))$

$$\phi(f_{m+1})(x_0 - 0) = \mu'(x_0 - x_1 - 0) \leq \mu'(x - x_3).$$

Кроме того,

$$\phi(f_{m+1})(x_0 + 0) = \mu'(x_0 - x_2 + 0) > \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x_0 + 0) \geq \mu'(x_0 - x_3 + 0).$$

Поэтому $\phi(f_{m+1})(x_0 + 0) > \phi(f_{m+1})(x_0 - 0)$. Пусть

$$\phi(f_{m+1})(x_0 + 0) - \phi(f_{m+1})(x_0 - 0) = \alpha.$$

Тогда если $x_2 < 1$, то для любого $x_4 \in (x_2, 1]$

$$\mu'(x_0 - x_4 + 0) < \mu'(x_0 - x_2 + 0) - \alpha.$$

Но $\mu'(x_0 - x_3) > \mu'(x_0 - x_2 - 0) = \mu'(x_0 - x_2 + 0) - \alpha$. Поэтому $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)$ убывает в правой полукрестности x_0 . При этом $\phi(f_{m+1})$ убывает в левой полукрестности x_0 . Заметим, что

$$\begin{aligned} \phi(f_{m+1})(x_0 - 0) &= \mu'(x_0 - x_1 - 0), \\ \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x_0 + 0) &= \mu'(x_0 - x_3 + 0). \end{aligned}$$

Так как $x_0 - x_3 < x_0 - x_1$, то $\mu'(x_0 - x_3 + 0) > \mu'(x_0 - x_1 - 0)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq m+1} \phi(f_i)(x_0 - 0) &= \phi(f_{m+1})(x_0 - 0) \\ &< \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x_0 + 0) = \min_{1 \leq i \leq m+1} \phi(f_i)(x_0 + 0). \end{aligned}$$

Следовательно, x_0 является точкой слабого максимума функции $\min_{1 \leq i \leq m+1} \phi(f_i)$. При этом, так как x_0 не является точкой максимума $\phi(f_{m+1})$,

$$x_0 \notin \left[\bigcap_{i=1}^{m+1} N_{f_i} \right].$$

Наконец, предположим, что $\phi(f_{m+1})$ возрастает в x_0 , тогда очевидно, что функция $\min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)$ убывает в x_0 . Следовательно, x_0 является точкой слабого максимума функции $\min_{1 \leq i \leq m+1} \phi(f_i)$. При этом, так как x_0 не является точкой максимума $\phi(f_{m+1})$,

$$x_0 \notin \left[\bigcap_{i=1}^{m+1} N_{f_i} \right].$$

Аналогично, если $X_1 \neq \emptyset$ и $x_1 \in X_1$, то x_1 является точкой слабого максимума функции $\min_{1 \leq i \leq m+1} \phi(f_i)$, но, так как x_1 не является точкой максимума $\phi(f_{m+1})$,

$$x_1 \notin \left[\bigcap_{i=1}^{m+1} N_{f_i} \right].$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Докажем необходимость. Пусть F и $\phi = \langle \mu, \mu' \rangle$ вырождены, но не согласованы. Это означает, что не выполняется по крайней мере один из трех пунктов определения.

1. Предположим, что существуют множества $A_1, \dots, A_m \in \{N_f : f \in F\}$ такие, что

$$\bigcap_{i=1}^m A_i \neq \emptyset,$$

и точка $x^* \in [0, 1]$ такая, что

$$\min_{1 \leq i \leq m} \mu'(A_i)(x^*) > \mu' \left(\bigcap_{i=1}^m A_i \right) (x^*).$$

Для каждого $i = 1, \dots, m$ обозначим через f_i предикат, соответствующий множеству A_i . Выберем отношение ρ следующим образом:

$$x \rho y \iff \left(x \in \bigcap_{i=1}^m A_i \right) \& (y = 0)$$

Построим нечеткое отношение $\eta = \phi(\rho)$. Рассмотрим ЗИП $I = \langle [0, 1], \{0\}, \rho \rangle$. Построим ИГ U следующим образом: возьмем вершину, объявим ее корнем и выпустим из нее цепь, состоящую из m ребер. Припишем i -му ребру предикат f_i , $i = 1, \dots, m$. Вершину, конец цепи, объявим листом и припишем ему запись 0. По теореме 1 ИГ U допустим для ЗИП I над базовым множеством F . Рассмотрим ЗНП $\phi(I)$ и НИГ $\phi(U)$. По лемме 2 $\min_{1 \leq i \leq m} \mu'(A_i)$ имеет слабый максимум, не принадлежащий $\left[\bigcap_{i=1}^m A_i \right]$. В то же время, по следствию 1 леммы 1 все слабые максимумы функции $\phi(\rho)(x, 0)$ принадлежат множеству $\left[\bigcap_{i=1}^m A_i \right]$. Следовательно,

$$\max_{\alpha \in L_U(0)} \varphi_\alpha(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \mu'(A_i) \neq \phi(\rho)(x, 0).$$

Поэтому по теореме 1 НИГ $\phi(U)$ не является допустимым для ЗНП $\phi(I)$. Следовательно, базовое множество F и основание $\phi = \langle \mu, \mu' \rangle$ не вырождены. Получили противоречие.

2. Предположим, что не выполняется пункт 2 определения согласованности. Возможны следующие случаи.

а) Пусть существует $x^* \in (-b'_F, b''_F)$ такой, что $\mu(x^*, 0) \neq \mu'(x^*)$. Для определенности будем считать, что $x^* > 0$ (случай $x^* < 0$ рассматривается аналогично). Можно считать, что $x^* \in (0, b)$, где $b < b''_F$. Для любого $b \in [0, b''_F)$ существуют конечный набор предикатов $F_\lambda \subseteq F$ и точка $x_0 \in [0, 1 - b]$ такие, что для всех $x \in [x_0, x_0 + b]$ справедливо равенство $g_\lambda(x) = \mu'(x - x_0)$. Выберем $b \geq x^*$ и для соответствующего λ занумеруем $f \in F_\lambda$ числами $1, \dots, m$, так что эти элементы примут вид $f_1, f_2, \dots, f_m$.

Выберем отношение ρ следующим образом:

$$x \rho y \iff \left(x \in \bigcap_{f \in F_\lambda} N_f \right) \& (y = 0).$$

Построим нечеткое отношение $\eta = \phi(\rho)$. Рассмотрим ЗИП $I = \langle [0, 1], \{0\}, \rho \rangle$. Построим ИГ U следующим образом. Возьмем вершину, объявим ее корнем и выпустим из нее цепь, состоящую из m ребер. Для каждого $i = 1, \dots, m$ припишем i -му ребру предикат f_i . Вершину, конец цепи, объявим листом и припишем ей запись 0. По теореме 1 ИГ U допустим для ЗИП I над базовым множеством F . Рассмотрим ЗНП $\phi(I)$ и НИГ $\phi(U)$. Понятно, что

$$\max_{\alpha \in L_U(0)} \varphi_\alpha(x_0 + x^*) = \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(x_0 + x^*) = g_\lambda(x_0 + x^*) = \mu'(x^*).$$

Так как в силу пункта 1

$$g_\lambda(x) \equiv \mu' \left(\bigcap_{i=1}^m N_{f_i} \right) (x)$$

и $g_\lambda(x_0) = 1$, то вследствие леммы 1

$$x_0 \in \left[\bigcap_{i=1}^m N_{f_i} \right],$$

следовательно, $(x_0, 0) \in [\rho]$ и $\eta(x_0 + x^*, 0) \geq \mu(x^*, 0)$.

Если $\mu(x^*, 0) > \mu'(x^*)$, то

$$\eta(x_0 + x^*, 0) \geq \mu(x^*, 0) > \mu'(x^*) = \max_{\alpha \in L_U(0)} \varphi_\alpha(x_0 + x^*),$$

следовательно, по теореме 1 НИГ $\phi(U)$ не является допустимым для ЗНП $\phi(I)$. Таким образом, базовое множество F и основание ϕ не вырождены. Получили противоречие.

Пусть $\mu(x^*, 0) < \mu'(x^*)$. Так как базовое множество F и основание ϕ вырождены, по теореме 1 должно выполняться равенство $\eta(x_0 + x^*, 0) = \mu'(x^*)$. В таком случае $\eta(x_0 + x^*, 0) \neq \mu(x^*, 0)$. Значит, должна существовать точка

$$x_1 \in (x_0, 1] \cap \left[\bigcap_{i=1}^m N_{f_i} \right]$$

такая, что $\eta(x_0 + x^*, 0) = \mu(x^* - x_1, 0)$. Так как $g_\lambda(x) = \mu'(x - x_0) < 1$ для всех $x \in [x_0, x_0 + b]$ и в силу того, что должно выполняться соотношение $\eta(x, 0) \equiv g_\lambda(x)$, получаем, что $x_1 > x_0 + b$.

Так как $\eta(x_0 + x^*, 0) = \mu(x^* - x_1, 0)$, в точке $x_0 + x^*$ функция $\eta(x, 0)$ либо возрастает, либо имеет локальный минимум. В силу вырожденности F и ϕ по теореме 1 должно выполняться соотношение $\eta(x, 0) \equiv g_\lambda(x)$. Но на $[x_0, x_0 + b]$

$$g_\lambda(x) \equiv \mu'(x - x_0).$$

Возьмем $\delta = (b - x^*)/2$. Так как $g_\lambda(x)$ убывает на $[x_0, x_0 + b]$,

$$g_\lambda(x_0 + x^* + \delta) < g_\lambda(x_0 + x^*) = \eta(x_0 + x^*, 0) < \eta(x_0 + x^* + \delta, 0).$$

Следовательно, по теореме 1, F и ϕ не могут быть вырожденными. Получили противоречие.

б) Пусть $u''_F = 1$, и пусть для некоторого $x^* \in (0, b''_F]$ справедливо неравенство $\mu(x^*, 0) \neq \mu'(x^*)$. Существует конечный набор предикатов $F_\lambda \subseteq F$ такой, что для $x_0 = 1 - b''_F$ $g_\lambda(x) = \mu'(x - x_0)$ для всех $x \in [x_0, 1]$. Построим отношение ρ и нечеткое отношение $\phi(\rho)$, ЗИП I и ЗНП $\phi(I)$, ИГ U и НИГ $\phi(U)$ так, как было описано выше. Необходимость равенства $\mu(x, 0) = \mu'(x)$ для всех $x \in [0, b''_F]$ вытекает из рассмотрения случая а). Очевидно,

$$x_0 = \sup_{x \in \bigcap_{f \in F_\lambda} N_f} x,$$

поэтому $\eta(1, 0) = \mu(1 - x_0, 0) = \mu(b''_F, 0)$. Если $\mu(b''_F, 0) \neq \mu'(b''_F)$, то

$$\eta(1, 0) \neq g_\lambda(1) \equiv \max_{\alpha \in L_U(0)} \varphi_\alpha(1),$$

следовательно, по теореме 1 НИГ U не допустим для ЗНП $\phi(I)$. Таким образом, F и ϕ не вырождены. Получили противоречие.

Следовательно, при $u_F'' = 1$ должно выполняться соотношение $\mu(x, 0) \equiv \mu'(x)$ при $x \in [0, b_F'']$.

в) Аналогично доказывается, что при $u_F' = 1$ должно выполняться соотношение $\mu(x, 0) \equiv \mu'(x)$ при $x \in [-b_F', 0]$.

г) Пусть $u_F' = u_F'' = 0$ и $u_F = 1$. Пусть $\mu(x^*, 0) \neq \mu'(x^*)$ для некоторого $x^* \in (0, b_F'')$ (случай $x^* \in (-b_F', 0)$ рассматривается аналогично). Существует конечный набор предикатов $F_\lambda \subseteq F$ такой, что для $x_0 = 1 - b_F''$ справедливо равенство $g_\lambda(x) = \mu'(x - x_0)$ для всех $x \in [x_0, 1]$. Построим отношение ρ и нечеткое отношение $\phi(\rho)$, ЗИП I и ЗНП $\phi(I)$, ИГ U и НИГ $\phi(U)$ так, как было описано выше. Необходимость равенства $\mu(x, 0) = \mu'(x)$ для всех $x \in [0, b_F'']$ вытекает из рассмотрения случая а). Так как в силу пункта 1 $g_\lambda(x) \equiv \mu'(\bigcap_{f \in F_\lambda} N_f)$ и $u_F' = u_F'' = 0$, существует точка $x_1 \in (x_0, 1]$ такая, что при $x \in (x_0 + b_F'', x_1]$ справедливо соотношение $g_\lambda(x) \equiv \mu'(x - x_1)$. Понятно, что $x_1 = x_0 + b_F' + b_F''$ (при $x_1 < x_2$ справедливо равенство $\sup_{\mu'(x-x_1) > \mu'(x-x_2)} x - \sup_{\mu'(x-x_1) < \mu'(x-x_2)} x = x_2 - x_1$). Следовательно,

$$g_\lambda(x_0 + b_F'') = \max\{\mu'(-b_F'), \mu'(b_F'')\}.$$

Понятно, что существует точка $x_2 \in [x_0, x_1]$ такая, что $\eta(x, 0) \equiv \mu(x - x_0, 0)$ при $x \in [x_0, x_2]$, а при $x \in (x_2, x_1]$ справедливо соотношение $\eta(x, 0) \equiv \mu(x - x_1, 0)$. Необходимость равенства $\mu(x, 0) = \mu'(x)$ для всех $x \in (-b_F', 0]$ вытекает из рассмотрения случая а). Следовательно, $x_2 = x_0 + b_F''$ и

$$\eta(x_0 + b_F'', 0) = \max\{\mu(-b_F', 0), \mu(b_F'', 0)\}.$$

Если $\max\{\mu(-b_F', 0), \mu(b_F'', 0)\} \neq \max\{\mu'(-b_F'), \mu'(b_F'')\}$, то

$$\eta(x_0 + b_F'', 0) \neq g_\lambda(x_0 + b_F'') \equiv \max_{\alpha \in L_U(0)} \varphi_\alpha(x_0 + b_F''),$$

следовательно, по теореме 1 НИГ U не допустим для ЗНП $\phi(I)$. Следовательно, F и ϕ не вырождены. Получили противоречие. Таким образом, при $u_F' = u_F'' = 0$, $u_F = 1$ должно выполняться соотношение $\mu(x, 0) \equiv \mu'(x)$ при $x \in (-b_F', b_F'')$ и

$$\max\{\mu(-b_F', 0), \mu(b_F'', 0)\} = \max\{\mu'(-b_F'), \mu'(b_F'')\}.$$

д) Пусть $u_F' = u_F'' = u_F = 0$, и пусть $\mu(x^*, 0) \neq \mu'(x^*)$ для некоторого $x^* \in (0, b_F'')$ (случай $x^* \in (-b_F', 0)$ рассматривается аналогично). По определению b_F'' для любого $b \in [0, b_F'')$ должен существовать конечный набор предикатов $F_\lambda \subseteq F$ и $x_0 \in [0, 1]$ такой, что $x_0 + b \leq 1$, и $g_\lambda(x) = \mu'(x - x_0)$ для всех $x \in [x_0, x_0 + b]$. Поэтому из рассмотрения случая а) следует необходимость условия $\mu(x, 0) \equiv \mu'(x)$ при $x \in (-b_F', b_F'')$.

3. Пусть не выполняется пункт 3 определения согласованности. Предположим, что существует $y_0 \neq 0$ такой, что для некоторого $x_0 \in [-1, 0]$ справедливо неравенство $\mu(x_0, y_0) > \varepsilon_F'$ (случай, когда существует $y_0 \neq 0$ такой, что для некоторого $x_0 \in [0, 1]$ справедливо неравенство $\mu(x_0, y_0) > \varepsilon_F''$ рассматривается аналогично). Будем считать, что $y_0 < 0$ (случай $y_0 > 0$ рассматривается аналогично). По определению ε_F' найдется λ и v_i^λ такие, что $c_i^\lambda < \mu(x_0, y_0)$. Подберем $t \in (0, 1]$ так, что $v_i^\lambda - tx_0 \leq 1$. Занумеруем предикаты из F_λ числами $1, \dots, m$, так что они принимают вид $f_1, \dots, f_m$. Выберем отношение ρ следующим образом:

$$x \rho y \iff \left(\left(x \in \bigcap_{f \in F_\lambda} N_f \right) \& (y = 0) \right) \vee ((x = v_i^\lambda - tx_0) \& (y = -ty_0)).$$

Рассмотрим ЗИП $I = \langle [0, 1], \{0\}, \rho \rangle$. Построим ИГ U следующим образом. Возьмем вершину, объявим ее корнем и выпустим из нее цепь, состоящую из m ребер, i -му ребру припишем предикат f_i . Вершину, являющуюся концом цепи, объявим листом и припишем ей запись 0. По теореме 1 ИГ U допустим для ЗИП I над базовым множеством F . Построим нечеткое отношение $\eta = \phi(\rho)$ и рассмотрим задачу $\phi(I)$ и НИГ $\phi(U)$. Справедливы равенства

$$\max_{\alpha \in L_U(0)} \varphi_\alpha(v_i^\lambda) = \min_{1 \leq i \leq m} \phi(f_i)(v_i^\lambda) = g_\lambda(v_i^\lambda) = c_i^\lambda.$$

Но согласно пункту 1

$$\eta(v_i^\lambda, 0) = \sup_{(x', y') \in \rho} \mu(v_i^\lambda - x', 0 - y') = \mu(tx_0, ty_0).$$

Функция μ была определена таким образом, что при $t \in (0, 1)$

$$\mu(tx, ty) \geq \mu(x, y)$$

для любых $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, следовательно,

$$\mu(tx_0, ty_0) \geq \mu(x_0, y_0) > c_i^\lambda.$$

Итак,

$$\eta(v_i^\lambda, 0) > \max_{\alpha \in L_U(0)} \varphi_\alpha(v_i^\lambda) = c_i^\lambda.$$

Поэтому по теореме 1 НИГ $\phi(U)$ не является допустимым для ЗНП $\phi(I)$. Следовательно, базовое множество F и основание $\phi = \langle \mu, \mu' \rangle$ не вырождены. Получаем противоречие.

Докажем теперь достаточность. Пусть F и $\phi = \langle \mu, \mu' \rangle$ согласованы. Возьмем произвольное отношение $\rho \in [0, 1]^2$, произвольную ЗИП $I = \langle [0, 1], V, \rho \rangle$, где V — произвольное конечное подмножество $[0, 1]$, и любой ИГ $U \in \mathcal{U}'(I, F)$. Построим нечеткое отношение $\eta = \phi(\rho)$ и перейдем к ЗНП $I' = \phi(I)$. Рассмотрим НИГ $U' = \phi(U)$. Рассмотрим все цепи, ведущие из корня ИГ U в листья, которым приписана запись y_0 . Так как $U \in \mathcal{U}'(I, F)$, по теореме 1 множество таких листьев не пусто и

$$\max_{\alpha \in L_{U'}(y_0)} \varphi_\alpha(x) \equiv \rho(x, y_0),$$

причем проводимость каждой цепи ненулевая. Если выполняется пункт 1 определения согласованности, то

$$\min\{\phi(f_1), \dots, \phi(f_N)\} \equiv \phi(f_1 \& \dots \& f_N)$$

для любых предикатов $f_1, \dots, f_N \in F$. Пусть

$$\rho(x, y_0) \equiv \max_{\alpha \in L_U(y_0)} \varphi_\alpha(x) \equiv \max_{1 \leq i \leq M} \min_{1 \leq j \leq N_i} f_{ij}.$$

Введем отношения ρ_i , $i = 1, \dots, M$, следующим образом:

$$x \rho_i y \iff \left(\left(x \in \bigcap_{j=1}^{N_i} N_{f_{ij}} \right) \& (y = y_0) \vee (x \rho y) \& (y \neq y_0) \right).$$

Для произвольного отношения ρ' и произвольного $y' \in [0, 1]$ рассмотрим отношение $\pi_{\rho' y'}$ такое, что

$$x \pi_{\rho' y'} y \iff (x \rho' y) \& (y = y').$$

Выполнение пункта 3 определения согласованности означает, что

$$\phi(\rho_i)(x, y_0) \equiv \phi(\pi_{\rho_i y_0})(x, y_0), \quad i = 1, \dots, M.$$

Наконец, выполнение пунктов 1 и 2 определения согласованности означает, что

$$\phi(\pi_{\rho_i y_0})(x, y_0) \equiv \min_{1 \leq j \leq N_i} \phi(f_{ij}), \quad i = 1, \dots, M.$$

Объединяя все три условия, получаем, что

$$\begin{aligned} \eta(x, y_0) &\equiv \phi(\rho)(x, y_0) \equiv \phi(\max_{1 \leq i \leq M} \rho_i) \equiv \max_{1 \leq i \leq M} \phi(\rho_i) \\ &\equiv \max_{1 \leq i \leq M} \phi(\pi_{\rho_i y_0})(x, y_0) \equiv \max_{1 \leq i \leq M} \min_{1 \leq j \leq N_i} \phi(f_{ij})(x) \equiv \max_{\alpha \in L_{U'}(y_0)} \varphi_\alpha(x). \end{aligned}$$

Итак, для ЗНП I' и НИГ U' выполнены условия теоремы 1. Поэтому НИГ U' допустим для ЗНП I' над базовым множеством F . Произвольность выбора отношения ρ , ЗИП I и ИГ U , допустимого для I , доказывает достаточность.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Гасанов Э. Э., Информационно-графовая модель хранения и поиска данных. *Интеллектуальные системы* (1998) 3, № 3–4, 163–192.
2. Гасанов Э. Э., Об одной математической модели информационного поиска. *Дискретная математика* (1991) 3, № 2, 69–76.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. Наука, М., 1968.

Статья поступила 07.01.2002.