Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Скачкова, Решетки Ω -расслоенных формаций, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 2, 85–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 10:33:05

Решетки Ω -расслоенных формаций

© 2002 г. Ю. А. Скачкова

Рассматриваются решетки Ω -канонических и Ω -биканонических формаций. Установлены индуктивность и модулярность решетки всех n -кратно Ω -канонических и n -кратно Ω -биканонических формаций.

Развитие идеи конструирования формаций при помощи специальных функций, впервые предложенной Гашюцем, привело к рассмотрению Ω -спутников и Ω -расслоенных формаций с различными направлениями [1, 2], где Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{F}$ всех конечных простых групп, а направление формации определяется как отображение φ класса $\mathfrak{F}$ во множество всех непустых формаций Фиттинга. В данной работе рассматриваются введенные в [1] канонические (K -формации) и Ω -канонические (ΩK -формации), имеющие направление $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ при всех $A \in \mathfrak{F}$, а также биканонические (B -формации) и Ω -биканонические (ΩB -формации), как Ω -расслоенные формации с направлением $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любого $A \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}$ и $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для всех $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$ (см. [2]).

Методы общей теории решеток широко применяются в теории классов групп [3]. Большое число работ посвящено изучению свойств решеток формаций различных типов. Так, А. Н. Скибой и Л. А. Шеметковым в [4] показано, что решетка всех n -кратно ω -локальных формаций модулярна. Аналогичный результат для решетки всех n -кратно Ω -композиционных формаций приводится в [5], а также независимо получен автором [6]. В данной работе установлена модулярность решетки всех n -кратно ΩK -формаций и решетки всех n -кратно ΩB -формаций.

Все группы предполагаются конечными. Необходимые определения и обозначения можно найти в [1–3]. Согласно [1], формация $\mathfrak{F}$ называется Ω -расслоенной с направлением φ , если

$$\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega')\}$$

и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$, где f и φ — некоторые ΩF -функция и FR -функция соответственно. Функцию f называют Ω -спутником формации $\mathfrak{F}$.

Перейдем к изложению полученных результатов.

Пусть θ — полная решетка формаций. Будем называть Ω -формационную функцию θ -значной или, коротко, $\Omega F\theta$ -функцией, если все ее значения принадлежат θ . Через $\Omega F_{\varphi}\theta$ обозначим множество всех Ω -расслоенных формаций с направлением φ , обладающих хотя бы одним $\Omega F\theta$ -спутником. Используем также обозначение $\Omega F\theta(\mathfrak{X}, \varphi) = \Omega F_{\varphi}\theta \text{ form}(\mathfrak{X})$.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, θ — полная решетка формаций. Тогда Ω -расслоенная формация $\mathfrak{F} = \Omega F\theta(\mathfrak{X}, \varphi)$, где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным $\Omega F\theta$ -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \theta \text{ form}(G/O_{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \theta \text{ form}(G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп, $K(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, φ — такая FR -функция, что $\varphi_0 \leq \varphi$. Так как $\mathfrak{G}$ — Ω -расслоенная формация с направлением φ , причем все значения ее Ω -спутника равны $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G} \in \Omega F\theta$. Кроме того, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}$ и, значит, $\mathfrak{F} = \Omega F\theta(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует и множество L всех $\Omega F\theta$ -спутников $\mathfrak{F}$ непусто.

Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L . По лемме 5 из [1] $\mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$, следовательно, $f_1 \in L$. При этом $f_1 \leq h$ для любого $h \in L$, значит, f_1 — единственный минимальный $\Omega F\theta$ -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f — ΩF -функция, описанная в заключении леммы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$, тогда $M/O_\Omega(M) \in f(\Omega')$ и из включения $K(M) \subseteq K(\mathfrak{X})$ следует, что $M/M_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любых $A \in \Omega \cap K(M)$, поэтому $M \in \Omega F(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \Omega F(f, \varphi)$. Поскольку f — $\Omega F\theta$ -спутник, то $\mathfrak{F} = \Omega F\theta(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \Omega F(f, \varphi)$.

Аналогично доказательству теоремы 5 в [1], учитывая, что f_1 — $\Omega F\theta$ -спутник, можно показать, что $f \leq f_1$ и, следовательно, $f = f_1$ ввиду минимальности f . Лемма доказана.

В частности, пусть $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ — направление Ω -канонической формации, тогда, обозначая $\Omega F_\varphi\theta$ как $\Omega K\theta$, получим следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, θ — полная решетка формаций и $\mathfrak{F} = \Omega K\theta F(\mathfrak{X})$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным $\Omega K\theta$ -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \theta \operatorname{form}(G/O_\Omega(G)) \mid G \in \mathfrak{X}, \quad f(A) = \theta \operatorname{form}(G/O_{A',A}(G)) \mid G \in \mathfrak{X}$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, θ — полная решетка формаций и $\mathfrak{F} = \Omega B\theta F(\mathfrak{X})$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным $\Omega B\theta$ -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \theta \operatorname{form}(G/O_\Omega(G)) \mid G \in \mathfrak{X}, \quad f(A) = \theta \operatorname{form}(G/O_{A'}(G)) \mid G \in \mathfrak{X}$$

для всех $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cap K(\mathfrak{X})$,

$$f(A) = \theta \operatorname{form}(G/O_{A',A}(G)) \mid G \in \mathfrak{X}$$

для любых $A \in \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \setminus$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Лемма 2. Пусть θ — полная решетка формаций такая, что $\Omega K\theta \subseteq \theta$ и $\mathfrak{G}_A\theta \subseteq \theta$ для всех $A \in \Omega$. Если $\mathfrak{F} = \Omega K F(f)$ и f — ее минимальный $\Omega K\theta$ -спутник, то формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним $\Omega K\theta$ -спутником h , где $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = \mathfrak{G}_A f(A)$ для любых $A \in \Omega$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F} = \Omega K\theta F(\mathfrak{F})$, в силу следствия 1 ее минимальный $\Omega K\theta$ -спутник имеет вид

$$f(\Omega') = \theta \operatorname{form}(G/O_\Omega(G)) \mid G \in \mathfrak{F}, \quad f(A) = \theta \operatorname{form}(G/O_{A',A}(G)) \mid G \in \mathfrak{F}$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F})$. Так как $\Omega K\theta \subseteq \theta$, легко видеть, что $f(\Omega') \subseteq \Omega K\theta F(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ и $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, f — внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Пусть h — ΩF -функция, описанная в заключении леммы. Так как $\Omega K\theta \subseteq \theta$, то $\mathfrak{F} \in \theta$ и $h(\Omega') \in \theta$. Кроме того, из $f(A) \in \theta$ и $\mathfrak{G}_A f(A) \in \mathfrak{G}_A\theta \subseteq \theta$ следует, что $h(A) \subseteq \theta$ для всех

$A \in \Omega$ и h — θ -значная Ω -функция. По лемме 7 из [2], $h(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для любых $A \in \{\Omega'\} \cup \Omega$. В силу теоремы 2 из [2], h является единственным максимальным внутренним Ω -спутником формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, h является единственным максимальным внутренним $\Omega F\theta$ -спутником формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть θ — полная решетка формаций такая, что $\Omega B\theta \subseteq \theta$ и $\mathfrak{U}_A\theta \subseteq \theta$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{F} = \Omega B F(f)$ и f — ее минимальный $\Omega B\theta$ -спутник, то формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним $\Omega B\theta$ -спутником h , где $h(A) = \mathfrak{F}$ при $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ и $h(A) = \mathfrak{U}_A f(A)$ для любых $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$.

Доказательство. Полагая в теореме 4 из [2], что f — минимальный $\Omega B\theta$ -спутник $\mathfrak{F}$, получим, что h является единственным максимальным внутренним $\Omega B\theta$ -спутником формации $\mathfrak{F}$. Причем из включения $\Omega B\theta \subseteq \theta$ следует, что $\mathfrak{F} \in \theta$, а с учетом того, что $\mathfrak{U}_A\theta \subseteq \theta$ для всех абелевых простых групп A из Ω , заключаем, что h — θ -значный ΩB -спутник. Лемма доказана.

Следующая лемма является обобщением леммы 4 из [7].

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где φ — r -направление, G — монолитическая группа с монолитом R и $G/R \in \mathfrak{F}$. Тогда

- (а) если $K(R) \not\subseteq \Omega$ и $G \in f(\Omega')$, то $G \in \mathfrak{F}$;
- (б) если $K(R) \subseteq \Omega$, $K(R) = (A)$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Если m и h — спутники формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно, θ — полная решетка формаций, то используем обозначение

$$\mathfrak{M} \vee_{\theta} \mathfrak{H} = \theta \text{ form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Через $m \vee_{\theta} h$ обозначают спутник такой, что

$$(m \vee_{\theta} h)(A) = m(A) \vee_{\theta} h(A)$$

для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$.

Полную решетку θ назовем Ω_{φ} -индуктивной, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций из $\Omega F_{\varphi}\theta$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних $\Omega F\theta$ -спутников f_i , где $\mathfrak{F}_i = \Omega F(f_i, \varphi)$, имеет место равенство

$$\vee_{\Omega F_{\varphi}\theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Omega F(\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I), \varphi).$$

В частности, если φ — направление ΩK -формации, то будем говорить об ΩK -индуктивности.

Лемма 5. Пусть θ — полная решетка формаций, $\Omega K\theta \subseteq \theta$, $\mathfrak{U}_A\theta \subseteq \theta$ для всех простых групп $A \in \Omega$. Тогда θ является ΩK -индуктивной решеткой.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_i = \Omega K F(f_i)$, где f_i — внутренний $\Omega K\theta$ -спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Покажем, что если $\mathfrak{F} = \vee_{\Omega K\theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, то $\mathfrak{F} = \Omega K F(f)$, где $f(A) = \vee_{\theta}(f_i \mid i \in I)(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$.

Введем обозначение

$$\mathfrak{H} = \Omega K F(\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I)) = \Omega K F(f).$$

Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Так как $f_i \leq f$, то $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}$, $i \in I$, следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду следствия 1 существуют следующие спутники: h_i — минимальный $\Omega K\theta$ -спутник $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$; h — минимальный $\Omega K\theta$ -спутник $\mathfrak{F}$. Поскольку по условию $\Omega K\theta \subseteq \theta$, $\mathfrak{G}_A\theta \subseteq \theta$ для всех $A \in \Omega$, по лемме 2 существует единственный максимальный внутренний $\Omega K\theta$ -спутник F формации $\mathfrak{F}$ такой, что $F(\Omega') = \mathfrak{F}$, $F(A) = \mathfrak{G}_A h(A)$ для всех $A \in \Omega$.

Пусть $A \in \Omega$. По следствию 1

$$\begin{aligned} \theta \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} h_i(A) \right) &\subseteq \theta \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} (\theta \text{ form}(G/O_{A'.A}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) \right) \\ &= \theta \text{ form} \left(G/O_{A'.A}(G) \mid G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = h(A). \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку $\mathfrak{F}_i$ обладает единственным максимальным внутренним $\Omega K\theta$ -спутником, значение которого на A равно $\mathfrak{G}_A h_i(A)$, $i \in I$, используя (1), получим, что

$$\begin{aligned} f(A) &= \theta \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} f_i(A) \right) \subseteq \theta \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{G}_A h_i(A) \right) \\ &\subseteq \mathfrak{G}_A \theta \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} h_i(A) \right) \subseteq \mathfrak{G}_A h(A) = F(A). \end{aligned}$$

Пусть теперь $A \in \{\Omega'\}$. Поскольку f_i — внутренний спутник $\mathfrak{F}_i$, то $f_i(A) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, $i \in I$. Кроме того, $\mathfrak{F} \in \Omega K\theta \subseteq \theta$, следовательно,

$$f(A) = \theta \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} f_i(A) \right) \subseteq \mathfrak{F} = F(A).$$

Таким образом, $f(A) \subseteq F(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$. Поэтому $f \leq F$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть θ — полная решетка формаций, $\Omega B\theta \subseteq \theta$, $\mathfrak{G}_A\theta \subseteq \theta$ для всех простых групп $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$. Тогда θ является ΩB -индуктивной решеткой.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_i = \Omega B F(f_i)$, где f_i — внутренний $\Omega B\theta$ -спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Покажем, что

$$\mathfrak{F} = \vee_{\Omega B\theta} (\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Omega B F(f),$$

где $f = \vee_{\theta} (f_i \mid i \in I)$.

Обозначив $\mathfrak{H} = \Omega B F(f)$, заметим, что $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}$, $i \in I$, так как $f_i \leq f$, следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. В силу следствия 2 существуют следующие спутники: h_i — минимальный $\Omega B\theta$ -спутник $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$; h — минимальный $\Omega B\theta$ -спутник $\mathfrak{F}$. По лемме 3 существует единственный максимальный внутренний $\Omega B\theta$ -спутник F формации $\mathfrak{F}$ такой, что $F(A) = \mathfrak{F}$ при $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ и $F(A) = \mathfrak{G}_A f(A)$ для любых $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$.

Пусть $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$, тогда выполняется равенство (1) из доказательства леммы 5. Аналогично, при $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$ справедливы включения

$$h_i(A) \subseteq \theta \text{ form}(G/O_{A'.A}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i), \quad \theta \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} h_i(A) \right) \subseteq h(A).$$

Как и в доказательстве леммы 5, несложно показать, что в случаях $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$ и $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ справедливо включение $f(A) \subseteq F(A)$, поэтому

$$\mathfrak{F} = \Omega BF(f) \subseteq \Omega BF(F) = \mathfrak{F}.$$

Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 7. Для множества S_n всех нормально наследственных формаций справедливо включение $\Omega K S_n \subseteq S_n$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F} = \Omega K F(f)$, все непустые значения Ω -спутника f принадлежат S_n и $H \triangleleft G$. Рассмотрим произвольную группу

$$B \in \Omega \cap K(H) \subseteq \Omega \cap K(G).$$

Так как $G \in \mathfrak{F}$, то

$$H/O_{B',B}(H) = H/(O_{B',B}(G) \cap H) \cong H O_{B',B}(G)/O_{B',B}(G) \triangleleft G/O_{B',B}(G) \in f(B) \in S_n,$$

и значит, $H/O_{B',B}(H) \in f(B)$. Далее,

$$H/O_{\Omega}(H) = H/(O_{\Omega}(G) \cap H) \cong H O_{\Omega}(G)/O_{\Omega}(G) \triangleleft G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega')$$

и из $f(\Omega') \in S_n$ следует, что $H/O_{\Omega}(H) \in f(\Omega')$. По определению ΩK -формации, $H \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 8. Для множества S_n всех нормально наследственных формаций справедливо включение $\Omega B S_n \subseteq S_n$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega B F(f)$, все непустые значения Ω -спутника f принадлежат S_n . Если $G \in \mathfrak{F}$ и $H \triangleleft G$, то для произвольной группы

$$B \in (\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cap K(H) \subseteq (\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cap K(G)$$

получим, что

$$H/O_{B'}(H) = H/(O_{B'}(G) \cap H) \cong H O_{B'}(G)/O_{B'}(G) \triangleleft G/O_{B'}(G) \in f(B) \in S_n,$$

значит, $H/O_{B'}(H) \in f(B)$. Аналогично можно показать, что $H/O_{B',B}(H) \in f(B)$ для всех $B \in \Omega \cap \mathfrak{A}$ и $H/O_{\Omega}(H) \in f(\Omega')$. По определению ΩB -формации, $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ является S_n -замкнутой формацией в силу произвольности выбора G и H . Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — ΩK -формации, t и h — внутренние ΩK -спутники $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — ΩK -формация с ΩK -спутником f таким, что $f(A) = t(A)\mathfrak{H}$ для всех $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$, $f(A) = h(A)$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{M})$ и $f(A) = \mathfrak{F}$ при $A \in \{\Omega'\}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L} = \Omega K F(f)$. Допустим, что $\mathfrak{L} \subsetneq \mathfrak{F}$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{L} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, то $G \notin \mathfrak{H}$, значит, $G^{\mathfrak{H}} \neq 1$ и $R \subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку $G/R \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$,

$$(G/R)^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}R/R \cong G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}} \cap R) = G^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}.$$

Пусть $K(R) = (A)$ и $A \notin \Omega$, тогда $O_{\Omega}(G) = 1$ и из $G \in \mathfrak{L}$ следует, что $G \cong G/O_{\Omega}(G) \in \mathfrak{F}$. Получаем противоречие с выбором G . Значит, $A \in \Omega$.

Далее, ввиду леммы 4 из [1] без ограничения общности полагаем $m(\Omega') = \mathfrak{M}$ и $h(\Omega') = \mathfrak{H}$.

Если $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$, то $G/O_{A',A}(G) \in m(A)\mathfrak{H}$, то есть

$$(G/O_{A',A}(G))^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}} \cap O_{A',A}(G)) = G^{\mathfrak{H}}/O_{A',A}(G^{\mathfrak{H}}) \in m(A).$$

Кроме того,

$$G^{\mathfrak{H}}/O_{\Omega}(G^{\mathfrak{H}}) \cong (G^{\mathfrak{H}}/R)/(O_{\Omega}(G^{\mathfrak{H}})/R) = (G^{\mathfrak{H}}/R)/O_{\Omega}(G^{\mathfrak{H}}/R) \in \mathfrak{M} = m(\Omega').$$

По определению ΩK -формации, $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$ и $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, что противоречит выбору G .

Предположим, что $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{M})$. Так как $G \in \mathfrak{L}$ и $A \in K(G) \cap \Omega$,

$$G/O_{A',A}(G) \in h(A) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Поскольку $K(R) = (A)$, то $G/O_{A',A}(G) = G/O_A(G) \in \mathfrak{H}$. Учитывая, что $G \notin \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, замечаем, что $O_A(G) \neq 1$, значит, $G^{\mathfrak{H}} \subseteq O_A(G)$ и $G^{\mathfrak{H}}$ — A -группа. Возможны следующие случаи.

1) $G^{\mathfrak{H}}/R$ — A -группа и из $G^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}$ следует, что $A \in K(\mathfrak{M})$. Получаем противоречие с выбором A .

2) $G^{\mathfrak{H}} = R$ и $G/R \in \mathfrak{H}$. Так как $G \in \mathfrak{L}$, то $G/O_{A',A}(G) \in f(A) = h(A) \subseteq \mathfrak{H}$ и по лемме 4 $G \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, что противоречит выбору G .

Значит, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{L}$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{L}$.

Если $A \in K(G^{\mathfrak{H}}) \cap \Omega$, то из $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$ получаем, что $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и

$$(G/O_{A',A}(G))^{\mathfrak{H}} \cong G^{\mathfrak{H}}/(O_{A',A}(G) \cap G^{\mathfrak{H}}) = G^{\mathfrak{H}}/O_{A',A}(G^{\mathfrak{H}}) \in m(A).$$

Значит, $G/O_{A',A}(G) \in m(A)\mathfrak{H} = f(A)$.

Пусть $A \in (K(G) \cap \Omega) \setminus (K(G^{\mathfrak{H}}) \cap \Omega)$, тогда $G^{\mathfrak{H}} \subseteq O_{A'}(G)$, и

$$G/O_{A',A}(G) \cong (G/G^{\mathfrak{H}})/(O_{A',A}(G)/G^{\mathfrak{H}}) = (G/G^{\mathfrak{H}})/O_{A',A}(G/G^{\mathfrak{H}}) \in h(A).$$

При этом если $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$, то

$$G/O_{A',A}(G) \in h(A) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq m(A)\mathfrak{H} = f(A);$$

при $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{M})$ получим, что $G/O_{A',A}(G) \in h(A) = f(A)$. Таким образом, $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для любых $A \in K(G) \cap \Omega$.

Кроме того, из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/O_{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. По определению ΩK -формации, $G \in \mathfrak{L}$, что противоречит выбору G . Лемма доказана.

Определение 1. Всякую формацию считаем 0-кратно ΩK -формацией. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем n -кратно ΩK -формацией для некоторого натурального n , если она обладает ΩK -спутником, все непустые значения которого являются $(n-1)$ -кратно ΩK -формациями.

Из леммы 9 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — n -кратно ΩK -формации с внутренними ΩK -спутниками t и h соответственно, причем все непустые значения t и h являются $(n-1)$ -кратно ΩK -формациями. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — n -кратно ΩK -формация со спутником f таким, что $f(A) = t(A)\mathfrak{H}$ для всех $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \Omega$, $f(A) = h(A)$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{M})$ и $f(\Omega') = \mathfrak{F}$.

Замечание 1. Лемма 9 независимо доказана В. А. Ведерниковым в [2].

Замечание 2. Нетрудно показать, что формация $\mathcal{G}_A$ для всех $A \in \mathfrak{F}$ является канонической формацией с K -спутником f таким, что $f(A) = (1)$ и $f(B) = \emptyset$ для любых $B \in \mathfrak{F} \setminus (A)$. По следствию 3.3 из [1] $\mathcal{G}_A$ является Ω -канонической формацией для произвольного $\Omega \subseteq \mathfrak{F}$.

Замечание 3. Можно показать, что формация $\mathcal{G}_A$ для всех $A \in \mathfrak{F}$ является биканонической формацией с B -спутником f . При $A \in \mathfrak{U}$ он имеет вид $f(A) = (1)$ и $f(B) = \emptyset$ для любых $B \in \mathfrak{F} \setminus (A)$, а при $A \notin \mathfrak{U}$ получим, что $f(A) = \mathcal{G}_A$ и $f(B) = \emptyset$ для всех $B \in \mathfrak{F} \setminus (A)$. По теореме 3 из [1], $\mathcal{G}_A$ является ΩB -формацией для произвольного $\Omega \subseteq \mathfrak{F}$.

В силу следствия 3 и замечания 2 справедливо следующее утверждение.

Следствие 4. Для множества K_n^Ω всех n -кратно ΩK -формаций при любом натуральном n справедливо включение $\mathcal{G}_A K_n^\Omega \subseteq K_n^\Omega$.

В силу следствия 9 из [2] и замечания 3 справедливо следующее утверждение.

Лемма 10. Для множества B_n^Ω всех n -кратно ΩB -формаций при любом натуральном n справедливо включение $\mathcal{G}_A B_n^\Omega \subseteq B_n^\Omega$.

Лемма 11. Пусть A — простая группа, тогда $\mathcal{G}_A S_n \subseteq S_n$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{F} \in S_n$, $G \in \mathcal{G}_A \mathfrak{F}$ и $H \triangleleft G$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \in \mathcal{G}_A$ и

$$HG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cong H/(H \cap G^{\mathfrak{F}}) \in S_n \mathfrak{F} = \mathfrak{F},$$

то $H^{\mathfrak{F}} \triangleleft H \cap G^{\mathfrak{F}} \in \mathcal{G}_A$. Отсюда следует, что $H \in \mathcal{G}_A \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 12. Множества K_n^Ω и S_n образуют полные решетки формаций, которые являются ΩK -индуктивными.

Доказательство. Покажем вначале, что K_n^Ω — полная решетка формаций. При $n = 1$ по лемме 5 из [1], пересечение любой совокупности ΩK -формаций $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, является ΩK -формацией, причем, если $\mathfrak{F}_i = \Omega K F(f_i)$, то

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \Omega K F(f),$$

где

$$f = \bigcap_{i \in I} f_i.$$

Для произвольного натурального $n > 1$ предположим, что пересечение любой совокупности K_{n-1}^Ω -формаций есть K_{n-1}^Ω -формация и

$$\mathfrak{F}_i = \Omega K F(f_i) \in K_n^\Omega, \quad i \in I,$$

причем $f_i(A) \in K_{n-1}^\Omega$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$. Тогда по предположению индукции $f(A) = \bigcap_{i \in I} f_i(A) \in K_n^\Omega$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, и по определению $\mathfrak{F} = \Omega K F(f) \in K_n^\Omega$. Таким образом, пересечение любой совокупности K_n^Ω -формаций есть K_n^Ω -формация. Очевидно, что $\emptyset$ и $\mathcal{G}$ принадлежат K_n^Ω , поскольку обладают Ω -спутниками, все значения которых

соответственно равны $\emptyset$ и $\mathfrak{G}$. Из доказанного выше следует, что K_n^Ω — полная решетка формаций.

Нетрудно показать, что пересечение формаций из S_n принадлежит S_n , а также $\emptyset \in S_n$ и $\mathfrak{G} \in S_n$. Значит, S_n — полная решетка формаций.

Из леммы 5 с учетом следствия 4 и того, что $\Omega K K_n^\Omega \subseteq K_n^\Omega$ следует, что решетка K_n^Ω является ΩK -индуктивной. Аналогично, принимая во внимание леммы 7 и 11, получаем, что ΩK -индуктивная решетка S_n . Лемма доказана.

Лемма 13. Решетки B_n^Ω и S_n являются ΩB -индуктивными.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 12, можно показать, что B_n^Ω — полная решетка формаций. По определению ΩB_n^Ω -формации (см. [2]), $\Omega B B_n^\Omega \subseteq B_n^\Omega$. Из леммы 5 с учетом леммы 10 следует, что решетка B_n^Ω является ΩB -индуктивной. Применяя леммы 8 и 11, докажем также ΩB -индуктивность S_n . Лемма доказана.

Лемма 14. Для произвольного подгруппового функтора τ решетка всех τ -замкнутых формаций модулярна.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — τ -замкнутые формации такие, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Покажем, что

$$\mathfrak{M} \vee_\tau (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \vee_\tau \mathfrak{F}). \quad (2)$$

По лемме 1.2.22 из [3] для произвольного класса групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство $\tau \text{ form } \mathfrak{X} = H R_0 S_{\bar{\tau}} \mathfrak{X}$, где $\bar{\tau}$ — замыкание функтора τ . Очевидно что если $\mathfrak{X}$ — τ -замкнутая формация, то $S_{\bar{\tau}} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

Заметим также, что для произвольных классов групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ справедливо равенство $S_{\bar{\tau}}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}) = S_{\bar{\tau}} \mathfrak{X} \cup S_{\bar{\tau}} \mathfrak{Y}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \vee_\tau (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) &= \tau \text{ form}(\mathfrak{M} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})) = H R_0 S_{\bar{\tau}}(\mathfrak{M} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})) \\ &= H R_0(S_{\bar{\tau}} \mathfrak{M} \cup S_{\bar{\tau}}(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})) = H R_0(\mathfrak{M} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})) \\ &= \text{form}(\mathfrak{M} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})) = \mathfrak{M} \vee (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \vee_\tau \mathfrak{F}) &= \mathfrak{H} \cap \tau \text{ form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{F}) = \mathfrak{H} \cap H R_0 S_{\bar{\tau}}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{F}) \\ &= \mathfrak{H} \cap H R_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{F}) = \mathfrak{H} \cap \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{F}) \\ &= \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \vee \mathfrak{F}). \end{aligned}$$

По лемме 1 из [8], если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \vee (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \vee \mathfrak{F})$, а значит, выполняется равенство (2). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть θ — полная решетка формаций и $\varphi_0 \leq \varphi$. Если θ является Ω_φ -индуктивной и модулярной решеткой, то решетка $\Omega F_\varphi \theta$ модулярна.

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{F}_i = \Omega F(f_i, \varphi) \in \Omega F_\varphi \theta$, где f_i — внутренний θ -значный Ω -спутник, $i = 1, 2, 3$. Предполагая, что $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$, покажем, что

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee_{\Omega F_\varphi \theta} \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee_{\Omega F_\varphi \theta} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3). \quad (3)$$

Положим $r = f_2 \vee_\theta f_3$. Так как решетка θ является Ω_φ -индуктивной,

$$\mathfrak{F}_2 \vee_{\Omega F_\varphi \theta} \mathfrak{F}_3 = \Omega F(r, \varphi).$$

Ясно, что $h = f_1 \cap r$ — θ -значный Ω -спутник формации $\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee_{\Omega F_\varphi \theta} \mathfrak{F}_3)$. Ввиду леммы 1 без потери общности можем считать, что

$$f_i(\Omega') = \theta \operatorname{form}(G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i), \quad f_i(A) = \theta \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{F}_i),$$

если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}_i)$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F}_i)$. Тогда из включения $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$ следует, что $f_2(A) \subseteq f_1(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$.

Поскольку θ модулярна, для любых $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$

$$h(A) = f_1(A) \cap (f_2(A) \vee_\theta f_3(A)) = f_2(A) \vee_\theta (f_1(A) \cap f_3(A)).$$

Следовательно, $h = f_2 \vee_\theta (f_1 \cap f_3)$ и из Ω_φ -индуктивности решетки θ следует, что

$$\mathfrak{F}_2 \vee_{\Omega F_\varphi \theta} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3) = \Omega F(h, \varphi),$$

что доказывает равенство (3). Теорема доказана.

Следствие 5. Для любого натурального числа n решетка K_n^Ω всех n -кратно Ω -канонических формаций модулярна.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 0$ решетка всех формаций модулярна в силу леммы 1 из [8]. Пусть теорема верна для некоторого натурального n и рассмотрим решетку $K_{n+1}^\Omega = \Omega K K_n^\Omega$. По предположению индукции K_n^Ω модулярна и по лемме 12 она является ΩK -индуктивной. Применяя теорему 1, получим, что K_{n+1}^Ω является модулярной решеткой. Следовательно, утверждение верно для любого натурального n . Следствие доказано.

Следствие 6. Для любого натурального n решетка B_n^Ω модулярна.

Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 5 с применением леммы 13 и индукции по n .

Следствие 7. Решетки $\Omega K S_n$ и $\Omega B S_n$ модулярны.

Доказательство. Из лемм 12 и 14 следует, что S_n является ΩK -индуктивной и модулярной решеткой формаций, поэтому в силу теоремы 1 решетка $\Omega K S_n$ модулярна. Аналогично, применяя леммы 13, 14 и теорему 1, получим, что решетка $\Omega B S_n$ модулярна. Следствие доказано.

Замечание 4. Основной результат работы [6] может быть получен как следствие теоремы 1.

Список литературы

1. Ведерников В. А., Сорокина М. М., Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискретная математика* (2001) **13**, №3, 125–144.
2. Ведерников В. А., Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга. *Труды ИММ НрО РАН* (2001) **8**, 1–23.
3. Скиба А. Н., *Алгебра формаций*. Беларуская навука, Минск, 1997.
4. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Матем. труды* (1999) **2**, №1, 1–34.
5. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., Кратно $\mathfrak{L}$ -композиционные формации конечных групп. *Докл. НАН Беларуси* (1999) **43**, №4, 5–8.
6. Скачкова Ю. А., О решетке всех n -кратно Ω -композиционных формаций. *Тезисы докл. V международной алгебраической конференции, посвященная 60-летию проф. Ю.И. Мерзлякова*. Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, 2000, 163–164.
7. Скачкова Ю. А., Прямые разложения кратно Ω -расслоенных формаций. *Сборник научных трудов*. Изд-во БГПУ, Брянск, 2000, 184–188.
8. Скиба А. Н., О локальных подформациях длины 5. *Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп*. Наука и техника, Минск, 1986, 149–156.

Статья поступила 15.05.2001.