Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Казимиров, О некоторых условиях отсутствия гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 2, 107–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:51:47

О некоторых условиях отсутствия гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения

© 2002 г. Н. И. Казимиров

Доказаны две теоремы, которые содержат условия отсутствия гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения. Приведены примеры применения этих теорем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 00-01-00233.

Для решения многих комбинаторных задач часто используется вероятностный подход. Если на множестве изучаемых комбинаторных объектов задать вероятностную меру, выбранную в соответствии с конкретными прикладными целями, то числовые характеристики таких объектов можно рассматривать как случайные величины. Множество примеров применения такого подхода можно найти в [1, 2, 3], где одним из главных методов исследования является обобщенная схема размещения частиц по ячейкам [1].

Пусть имеется набор целочисленных неотрицательных случайных величин

$$\eta_1, \dots, \eta_N$$

таких, что $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$ и совместное распределение $\eta_1, \dots, \eta_N$ задано с помощью последовательности $b = (b_0, b_1, \dots)$ неотрицательных чисел следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} = \frac{b_{n_1} \dots b_{n_N}}{\sum_{i_1 + \dots + i_N = n} b_{i_1} \dots b_{i_N}}. \quad (1)$$

Введем обозначение

$$B(x) = \sum_k b_k x^k.$$

Пусть последовательность b такова, что радиус сходимости $B(x)$ отличен от нуля. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, одинаково распределены и

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{b_k x^k}{B(x)}. \quad (2)$$

Тогда, как легко видеть,

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = n_1, \dots, \xi_N = n_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \quad (3)$$

В этом случае мы говорим, что наборы случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$ и $\xi_1, \dots, \xi_N$ образуют обобщенную схему размещения.

В последнее время повысился интерес к исследованию обобщенной схемы размещения с точки зрения возникновения в ней гигантской компоненты [4]. Пусть

$$\eta_{(1)} \leq \eta_{(2)} \leq \dots \leq \eta_{(N)}$$

— вариационный ряд случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$. Говорят, что в обобщенной схеме размещения возникает гигантская компонента, если при $N, n \rightarrow \infty$ величина $\eta_{(N)}$ с вероятностью, стремящейся к единице, имеет порядок n , и случайные величины $\eta_{(N)}$ и $\eta_{(N-1)}$ имеют предельные распределения при различной по порядку нормировке. В [4] приведено несколько примеров обобщенной схемы размещения как с гигантской компонентой, так и без нее. Следует отметить, что вопрос об общем виде распределения ξ_1 для схем с гигантской компонентой остается открытым.

Изучение вероятностей вида (1) комбинаторными методами часто бывает затруднительно, однако представление их в виде (3) позволяет находить их асимптотику при $N, n \rightarrow \infty$ с помощью хорошо разработанного аппарата предельных теорем теории вероятностей. Кроме того, инвариантность вероятностей (3) относительно параметра x позволяет осуществить его выбор (в зависимости от N, n) способом, наиболее удобным для получения предельных теорем.

Ниже доказаны теоремы 1 и 2, которые дают некоторые простые достаточные условия невозникновения гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения. Доказательства этих теорем основаны на леммах 3 и 4 о локальной сходимости для сумм независимых случайных величин в схеме серий. Следует отметить, что в задачах, сводимых к обобщенной схеме размещения [1, 3], получение именно такого рода результатов представляет наибольшие трудности.

Пусть k_0 — наименьшее число такое, что $b_{k_0} > 0$. Мы не рассматриваем здесь случай вырожденного распределения ξ_1 , поэтому по меньшей мере два элемента последовательности b положительны. Обозначим через d максимальный шаг распределения ξ_1 . Тогда случайная величина $(\xi_1 - k_0)/d$ принимает нулевое значение с положительной вероятностью, и максимальный шаг ее распределения равен 1. Поэтому далее, не теряя общности, мы предполагаем, что $b_0 > 0$ и $d = 1$.

Введем необходимые обозначения. Пусть R — радиус сходимости $B(x)$. Как уже отмечалось выше, предполагается, что $R > 0$. Пусть $|b| = \{0, k_1, k_2, \dots\}$ — носитель последовательности b , где $0 < k_1 < k_2 < \dots$. Тогда $\gcd |b| = d = 1$, где $\gcd$ означает наибольший общий делитель. Пусть s — наименьшее число такое, что $\gcd\{k_1, \dots, k_s\} = 1$, $m = k_s$. Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\zeta_1, \dots, \zeta_N$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_1 = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \leq r\}, \quad k \leq r. \quad (4)$$

Положим также

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}, \quad a = \mathbf{E}\xi_1, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1, \quad \mu_4 = \mathbf{E}(\xi_1 - a)^4, \\ S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad Z_N = \zeta_1 + \dots + \zeta_N,$$

Если X — случайная величина, то $\varphi(X; t)$ обозначает ее характеристическую функцию $\mathbf{E} \exp\{itX\}$. При выводе асимптотических соотношений удобно пользоваться следующими обозначениями [5]: если для некоторых двух (действительных) функций $v(y)$ и $w(y)$, определенных на множестве Y с предельной точкой y_0 , $|y_0| \leq \infty$, при $y \rightarrow y_0$ выполнено соотношение $v(y) = O(w(y))$, то мы пишем $v(y) \leq w(y)$ или $w(y) \geq v(y)$; если имеют

место соотношения $v(y) \leq w(y)$ и $v(y) \geq w(y)$ одновременно, то будем писать $v(y) \asymp w(y)$.

Нетрудно проверить (см. [1, 2, 3]), что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{Z_N = n\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}}. \quad (5)$$

Отсюда видно, что изучение свойств максимальной компоненты обобщенной схемы размещения можно свести к изучению полинома $(1 - P_r)^N$ и сумм S_N и Z_N .

Отметим, что мы не рассматриваем здесь вариант $R = \infty$, $\sigma \rightarrow \infty$, поскольку из всех широко известных примеров этим условиям удовлетворяют только задачи, в которых (2) является распределением Пуассона (классическая схема размещения) с неограниченно растущим параметром или урезанным распределением Пуассона (случайные неупорядоченные разбиения конечного множества на непересекающиеся подмножества). Для таких задач отсутствие гигантской компоненты установлено в [2, 3].

Для начала изучим вопрос о слабой сходимости сумм S_N и Z_N . Следующая лемма дает возможность получать предельные распределения сумм Z_N усеченных слагаемых, если известно предельное распределение S_N .

Лемма 1. Пусть $N \rightarrow \infty$, r выбрано так, что $NP_r \rightarrow 0$. Тогда при любом фиксированном t

$$\varphi((S_N - Na)/(\sigma\sqrt{N}), t)/\varphi((Z_N - Na)/(\sigma\sqrt{N}), t) \rightarrow 1. \quad (6)$$

Доказательство. Раскладывая $\varphi(\xi_1 - a, u)$ по формуле Тейлора по переменной u в окрестности нуля до второй производной, получим, что

$$\varphi(\xi_1 - a, u) = 1 - \frac{u^2}{2} \mathbf{E}(\xi_1 - a)^2 e^{i\theta(\xi_1 - a)}, \quad 0 \leq |\theta| \leq |u|.$$

Поскольку $|\mathbf{E}(\xi_1 - a)^2 e^{i\theta(\xi_1 - a)}| \leq \sigma^2$, при каждом фиксированном t

$$\varphi(\xi_1 - a, t/(\sigma\sqrt{N})) \rightarrow 1. \quad (7)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{Z_N - Na}{\sigma\sqrt{N}}, t\right) &= \varphi\left(\frac{S_N - Na}{\sigma\sqrt{N}}, t\right) (1 - P_r)^{-N} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{\varphi(\xi_1 - a, t/(\sigma\sqrt{N}))} \sum_{k>r} e^{itk} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\}\right)^N. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку $NP_r \rightarrow 0$, очевидно, что $(1 - P_r)^N \rightarrow 1$ и

$$N \left| \sum_{k>r} e^{itk} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = k\}}{\varphi(\xi_1 - a, t/(\sigma\sqrt{N}))} \right| \leq \frac{NP_r}{|\varphi(\xi_1 - a, t/(\sigma\sqrt{N}))|} \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (7) следует, что последний множитель в правой части (8) также стремится к 1. Тем самым мы получаем соотношение (6).

Лемма 2. Пусть $N \rightarrow \infty$, $r \asymp Na$ и выполнено одно из условий:

$$(\alpha) \sigma \sqrt{N} \rightarrow \infty, \mathbf{E} \xi_1^2 \leq 1,$$

$$(\beta) \mu_4/(\sigma^4 N) \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\varphi\left(\frac{S_N - Na}{\sigma \sqrt{N}}, t\right) \rightarrow e^{-t^2/2}, \quad \varphi\left(\frac{Z_N - Na}{\sigma \sqrt{N}}, t\right) \rightarrow e^{-t^2/2} \quad (9)$$

$$\text{и } \sigma \sqrt{N} = o(Na).$$

Доказательство. По теореме Линдеберга для доказательства слабой сходимости $(S_N - Na)/(\sigma \sqrt{N})$ к нормальному закону достаточно показать, что для любого $\tau > 0$

$$L_N(\tau) = \sum_{k=1}^N \mathbf{E} \left(\frac{(\xi_k - a)^2}{N\sigma^2}, \frac{|\xi_k - a|}{\sigma \sqrt{N}} > \tau \right) \rightarrow 0. \quad (10)$$

Для $L_N(\tau)$ справедливы оценки

$$L_N(\tau) = \frac{N}{N\sigma^2} \sum_{|k-a| > \tau \sigma \sqrt{N}} (k-a)^2 \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \leq \sigma^{-2} \sum_{|k-a| > \tau \sigma \sqrt{N}} k^2 \mathbf{P}\{\xi_1 = k\}$$

и, аналогично,

$$L_N(\tau) \leq \sigma^{-2} \mu_4/(\tau^2 \sigma^2 N).$$

Если выполнено условие (α) , то $a \leq 1$ и, учитывая условие $\sigma \sqrt{N} \rightarrow \infty$, получаем, что $L_N(\tau) \rightarrow 0$. Если выполнено условие (β) , воспользуемся второй оценкой. Таким образом, $(S_N - Na)/(\sigma \sqrt{N})$ слабо сходится к нормальному закону, и мы получаем первое из соотношений (9).

Докажем, что $\sigma \sqrt{N} = o(Na)$. Из слабой сходимости $(S_N - Na)/(\sigma \sqrt{N})$ к нормальному закону следует, что для любого $t > 0$

$$\mathbf{P}\{S_N < -t\sigma \sqrt{N} + Na\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-t} e^{-u^2/2} du = \gamma_t.$$

Предположим, что $Na \leq c\sigma \sqrt{N}$, где постоянная $c > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}\{S_N < -(c+1)\sigma \sqrt{N} + Na\} \leq \mathbf{P}\{S_N < -\sigma \sqrt{N}\} = 0,$$

что противоречит тому, что $\gamma_{c+1} > 0$. Следовательно, $\sigma \sqrt{N} = o(Na)$.

Отсюда и из того, что $a = o(r)$, поскольку $r \asymp Na$, получаем оценку для NP_r :

$$NP_r = N\mathbf{P}\{\xi_1 > r\} \leq N\mathbf{P}\{|\xi_1 - a| > r/2\} \leq N\sigma^2/r^2 \rightarrow 0.$$

Отсюда по лемме 1 получаем второе из соотношений (9).

В классической теореме Линдеберга в качестве центрирующих и нормирующих коэффициентов слагаемых выбираются, соответственно, математическое ожидание и дисперсия этих же слагаемых. Поэтому мы не можем непосредственно воспользоваться этой теоремой для получения второго из соотношений (9), так как, вообще говоря, равенства $\mathbf{E}Z_N = Na$, $\mathbf{D}Z_N = N\sigma^2$ не верны. Лемма 1 позволяет в ряде случаев обойти данное ограничение.

Рассмотрим теперь вопрос о локальной сходимости распределений S_N и Z_N .

Лемма 3. Пусть $N \rightarrow \infty$, $Nx^m \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}\xi_1^2 \asymp 1$, $r \asymp Na$. Тогда равномерно относительно целых h

$$\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{Z_N = h\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(h - Na)^2}{2\sigma^2 N}\right\} \rightarrow 0.$$

Доказательство. Из условия $Nx^m \rightarrow \infty$ следует, что $Nx^{k_1} \rightarrow \infty$. Кроме того, $\sigma^2 \asymp x^{k_1}$. Действительно, из условия $\mathbf{E}\xi_1^2 \asymp 1$ получаем, что $B(x) \asymp 1$, $x \asymp 1$. Если $x \asymp 1$, то $a \asymp 1$, откуда $\sigma^2 \geq a^2 b_0 / B(x) \asymp 1$. Если же $x \rightarrow 0$, то $a \asymp x^{k_1}$, $\mathbf{E}\xi_1^2 \asymp x^{k_1}$, откуда $\sigma^2 \asymp x^{k_1}$.

Таким образом, из условия $Nx^m \rightarrow \infty$ следует, что $N\sigma^2 \rightarrow \infty$. Поэтому в условиях доказываемой леммы выполняются условия леммы 2, так как при $x \geq \varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число, $\mathbf{E}\xi_1^2 \asymp 1$ и $\sigma\sqrt{N} \rightarrow \infty$, а при $x \rightarrow 0$ аналогично предыдущему получаем, что $\mathbf{E}(\xi_1 - a)^p \asymp x^{k_1}$, $p \geq 2$, откуда $\mu_4/(\sigma^4 N) \asymp (Nx^{k_1})^{-1} \rightarrow 0$. Следовательно, Z_N слабо сходится к нормальному закону.

Пусть

$$H_N = N \inf_{1/4 \leq t \leq 1/2} \mathbf{E}\langle(\xi_1 - \xi_2)t\rangle^2, \\ E_N^2(u) = 2N \sum_{1 \leq k \leq u} k^2 \mathbf{P}\{\xi_1 - \xi_2 = k\},$$

где $\langle y \rangle$ — расстояние от y до ближайшего целого числа. По теореме 1 из [6] для того, чтобы показать, что в условиях данной леммы из интегральной сходимости Z_N следует локальная, достаточно проверить, что $H_N \rightarrow \infty$ и $\sigma\sqrt{N} \leq E_N(u)$ при некотором фиксированном $u > 0$.

Докажем, что для любого $t \in [1/4, 1/2]$ существует k_j , $1 \leq j \leq s$, такое, что $\langle k_j t \rangle > 0$. Предположим, что при некотором t для всех k_j число $k_j t$ целое. Отсюда, в частности, следует, что t рационально. Тогда $t = l_1/l_2$, где l_1, l_2 — целые положительные взаимно простые числа. При этом из неравенства $t \leq 1/2$ следует, что $l_2 \geq 2$. Для любого $j = 1, \dots, s$ число $k_j l_1$ кратно l_2 , $\gcd\{l_1, l_2\} = 1$, откуда все k_j кратны l_2 , что противоречит условию $\gcd\{k_1, \dots, k_s\} = 1$.

Из доказанного следует, что при $t \in [1/4, 1/2]$

$$f(t) = \sum_{j=1}^s \langle k_j t \rangle^2 > 0.$$

Кроме того, $f(t)$ непрерывна, поэтому

$$\inf_{1/4 \leq t \leq 1/2} f(t) > 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathbf{E}\langle(\xi_1 - \xi_2)t\rangle^2 = \sum_{i \in \mathbf{Z}} \langle it \rangle^2 \sum_{k=\max\{0, -i\}}^{\min\{r, r-i\}} \frac{b_k b_{k+i} x^{2k+i}}{B^2(x)(1 - P_r)^2} \\ \geq \sum_{j=1}^s \langle k_j t \rangle^2 \frac{b_0 b_{k_j} x^{k_j}}{B^2(x)(1 - P_r)^2} \asymp \sum_{j=1}^s \langle k_j t \rangle^2 x^{k_j} \asymp x^m.$$

Отсюда и из условия $Nx^m \rightarrow \infty$ следует, что $H_N \rightarrow \infty$.

Оценим $E_N^2(k_1)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} E_N^2(k_1) &= 2N \sum_{k=1}^{k_1} k^2 \sum_{i=0}^{r-k_1} b_i b_{i+k} x^{2i+k} / (B(x)(1 - P_r))^2 \\ &\geq 2N k_1^2 b_0 b_{k_1} x^{k_1} / (B(x)(1 - P_r))^2 \gtrsim N x^{k_1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения $\sigma^2 \asymp x^{k_1}$ получаем, что $\sigma \sqrt{N} \asymp E_N(k_1)$. Лемма доказана.

Заметим, что если при доказательстве леммы 3 всюду считать $r = \infty$, то мы получим, что в условиях этой леммы выполнена локальная сходимость распределения S_N к нормальному распределению.

Как видно из условий леммы 3, ограниченность второго момента ξ_1 позволяет доказать локальную сходимость S_N для достаточно широкого класса последовательностей b , так как мы здесь не требуем какой-то конкретной асимптотики b_k при $k \rightarrow \infty$. Однако снятие условия ограниченности второго момента ξ_1 приводит к более жестким ограничениям на вид b_k .

Ниже мы рассмотрим случай $b_k \asymp k^{-\delta}$ при $k \rightarrow \infty$, $1 < \delta < 3$. Отметим, что если $\delta > 3$, то второй момент b конечен, и эта ситуация рассмотрена в более общем виде в лемме 3. Случаи $\delta = 3$ и $\delta \leq 1$ пока не изучены. Заметим также, что при таком условии $R = 1$. К этому случаю легко свести вариант $b_k \asymp k^{-\delta}/R^k$. Для этого достаточно рассмотреть обобщенную схему размещения, в которой вероятности (1) определяются последовательностью $b' = (b_0, b_1 R, b_2 R^2, \dots)$.

Лемма 4. Пусть $N \rightarrow \infty$, $b_k \asymp k^{-\delta}$, $1 < \delta < 3$, $x \rightarrow 1$ таким образом, что $\mu_4/(\sigma^4 N) \rightarrow 0$. Пусть $r \asymp Na$. Тогда равномерно относительно целых h

$$\sigma \sqrt{N} \mathbf{P}\{Z_N = h\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(h - Na)^2}{2\sigma^2 N} \right\} \rightarrow 0.$$

Доказательство. По лемме 2 распределение Z_N слабо сходится к нормальному закону. Для доказательства локальной сходимости воспользуемся теоремой 1 из [6], где требуется выполнение следующего условия: $H_N \rightarrow \infty$ и существуют такие $\nu < 1/2$, $\alpha > 0$ и $\rho \in (0, 2]$, что для $u \in [H_N^\nu, \sigma \sqrt{N}]$

$$E_N^2(u) \geq \alpha (\sigma \sqrt{N})^\rho u^{2-\rho}.$$

Ниже будет доказано, что данное неравенство выполнено при $\rho = \delta - 1$ для любого $\nu \in (0, 1/2)$.

Величина H_N оценивается снизу точно так же, как при доказательстве леммы 3, поэтому $H_N \rightarrow \infty$.

Пусть $u \in [A_1 \sqrt{\mu_4}/\sigma, \sigma \sqrt{N}]$, постоянная A_1 будет определена ниже. Из неравенства Гельдера нетрудно получить, что

$$\mathbf{E} \xi_1 \leq (\mathbf{E}(\xi_1)^4)^{1/4}, \quad \mathbf{E}(\xi_1)^2 \leq (\mathbf{E}(\xi_1)^4)^{1/2}, \quad \mathbf{E}(\xi_1)^3 \leq (\mathbf{E}(\xi_1)^4)^{3/4}.$$

Используя эти неравенства, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 E_N^2(u) &= 2N \sum_{0 \leq k \leq u} k^2 \mathbf{P}\{\xi_1 - \xi_2 = k\} = 2N((1/2)\mathbf{D}(\xi_1 - \xi_2) - \sum_{k > u} k^2 \mathbf{P}\{\xi_1 - \xi_2 = k\}) \\
 &\geq 2N \left(\mathbf{D}\xi_1 - \frac{1}{u^2} \sum_{k=0}^{\infty} k^4 \mathbf{P}\{\xi_1 - \xi_2 = k\} \right) \geq 2N \left(\mathbf{D}\xi_1 - \frac{1}{2u^2} \mathbf{E}(\xi_1 - \xi_2)^4 \right) \\
 &\geq 2N \left(\mathbf{D}\xi_1 - \frac{8}{u^2} \mathbf{E}(\xi_1)^4 \right). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
 a^2 &\leq \mathbf{E}\xi_1^2, \quad \mathbf{E}\xi_1 \leq a, \quad \mathbf{E}(\xi_1)^3 \leq \mathbf{E}\xi_1^3, \\
 |\mathbf{D}\xi_1 - \mathbf{D}\xi_1| &= |\mathbf{E}(\xi_1)^2 - \mathbf{E}\xi_1^2 + a^2 - (\mathbf{E}\xi_1)^2| \\
 &\leq \sum_{k \leq r} k^2 \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \left(\frac{1}{1 - P_r} - 1 \right) + \sum_{k > r} k^2 \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \\
 &\quad + (a + \mathbf{E}\xi_1) \left(\sum_{k \leq r} k \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \left(\frac{1}{1 - P_r} - 1 \right) + \sum_{k > r} k \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \right) \tag{12} \\
 &\leq \mathbf{E}\xi_1^2 P_r + \mathbf{E}\xi_1^4 / (Na)^2 + a^2 P_r + \mathbf{E}\xi_1^2 / N,
 \end{aligned}$$

где мы воспользовались условием $r \asymp Na$.

Покажем, что $a^2 = o(\mathbf{E}\xi_1^2)$. Если $a \leq 1$, то данное соотношение очевидно, поскольку $\mathbf{E}\xi_1^2 \rightarrow \infty$ при выбранном δ . Пусть $a \rightarrow \infty$. Для $0 < \varepsilon < 1$ определим $A = A(\varepsilon)$ следующим образом: A есть наименьшее целое такое, что $\sum_{k > A} b_k \leq \varepsilon$. Из неравенства Гельдера получаем, что

$$\left(\sum_{k > A} k x^k b_k \right)^2 \leq \sum_{k > A} x^k b_k \sum_{k > A} k^2 x^k b_k \leq \varepsilon \sum_{k > A} k^2 x^k b_k.$$

Суммы

$$\sum_{k \leq A} k x^k b_k, \quad \sum_{k \leq A} k^2 x^k b_k$$

ограничены, поэтому

$$a = (1 + o(1)) \sum_{k > A} k x^k b_k, \quad \mathbf{E}\xi_1^2 = (1 + o(1)) \sum_{k > A} k^2 x^k b_k.$$

Отсюда следует, что $\overline{\lim} a^2 / \mathbf{E}\xi_1^2 \leq \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому $a^2 = o(\mathbf{E}\xi_1^2)$ и, следовательно, $\mathbf{E}\xi_1^2 \asymp \sigma^2$. Аналогично можно доказать, что $\mu_4 \asymp \mathbf{E}\xi_1^4$.

Из условия $\mu_4 / (\sigma^4 N) \rightarrow 0$ и леммы 2 следует, что

$$\mathbf{E}\xi_1^4 / (Na)^2 \leq \mu_4 / (\sigma^2 N) = o(\sigma^2).$$

Поэтому из (12) находим, что $\mathbf{D}\xi_1 - \mathbf{D}\xi_1 = o(\sigma^2)$. Таким образом, используя (11), получаем, что

$$E_N^2(u) \asymp N(\sigma^2 - \mu_4/u^2).$$

Так как $u \geq A_1 \sqrt{\mu_4}/\sigma$, то $\mu_4/(u^2 \sigma^2) \leq 1/A_1^2$. Поэтому при достаточно большом A_1 получим, что $E_N^2(u) \geq N \sigma^2$ для всех $u \in [A_1 \sqrt{\mu_4}/\sigma, \sigma \sqrt{N}]$. С другой стороны, для таких u справедливо неравенство $u^{3-\delta}(\sigma \sqrt{N})^{\delta-1} \leq N \sigma^2$. Так что

$$E_N^2(u) \geq u^{3-\delta}(\sigma \sqrt{N})^{\delta-1} \quad (13)$$

для $u \in [A_1 \sqrt{\mu_4}/\sigma, \sigma \sqrt{N}]$.

Пусть теперь $u \in [H_N^v, A_1 \sqrt{\mu_4}/\sigma]$. Заменяя суммирование интегрированием, при $\delta < 3$ нетрудно получить, что для $p \geq 2$

$$\sum_k k^p b_k x^k \asymp \sum_k k^{p-\delta} x^k \asymp \frac{1}{(1-x)^{p+1-\delta}}.$$

Отсюда и из соотношений $\sigma^2 \asymp E \xi_1^2$, $\mu_4 \asymp E \xi_1^4$ следует, что $\sqrt{\mu_4}/\sigma \asymp (1-x)^{-1}$. Поэтому равномерно по u из рассматриваемого отрезка $x^u \asymp 1$. Учитывая, что $\sigma \sqrt{N} = o(r)$, получаем оценку

$$E_N^2(u) \geq N \sum_{0 \leq k \leq u} k^2 b_k \geq N \int_A^u y^{2-\delta} dy \geq N(u^{3-\delta} - A^{3-\delta}),$$

где A — такое число, что для $k \geq A$ имеет место неравенство $b_k \geq c k^{-\delta}$, в котором постоянная $c > 0$. Однако при $v > 0$ для $u > H_N^v$ получим, что $A^{3-\delta} = o(u^{3-\delta})$, откуда

$$E_N^2(u) \geq N u^{3-\delta}$$

для $u \in [H_N^v, A_1 E \xi_1^3/\sigma^2]$. Кроме того, $N > (\sigma \sqrt{N})^{\delta-1}$. Действительно,

$$(\sigma \sqrt{N})^{\delta-1} N^{-1} \asymp (1-x)^{-(3-\delta)(\delta-1)/2} N^{(\delta-3)/2},$$

а последнее выражение стремится к нулю, так как условие $\sigma^4 N/\mu_4 \rightarrow \infty$ эквивалентно соотношению $N(1-x)^{\delta-1} \rightarrow \infty$. Отсюда видно, что (13) выполнено и в этом случае. Лемма доказана.

Снова отметим, что, полагая $r = \infty$, аналогично предыдущему можно доказать, что в условиях леммы 4 выполнена локальная сходимость распределения S_N к нормальному закону.

Как уже отмечалось, вероятности (3) не зависят от параметра x , поэтому его выбор в зависимости от N, n производится так, чтобы было проще получать асимптотику вероятностей $\mathbf{P}\{S_N = n\}$ и $\mathbf{P}\{Z_N = n\}$ с помощью локальных предельных теорем. Доказанные выше леммы 3 и 4 дают асимптотику этих вероятностей для n таких, что $n = Na + O(\sigma \sqrt{N})$. Поэтому для применения этих лемм при получении результатов о поведении максимальной компоненты в обобщенной схеме размещения достаточно выбрать параметр x как корень уравнения $a = n/N$. Дифференцируя a по x , нетрудно получить, что a строго возрастает на интервале $(0, R)$. Кроме того, a непрерывно зависит от x и принимает все значения из интервала $(0, \mu_1)$, где $\mu_1 = \lim_{x \rightarrow R-0} a$. Заметим, что μ_1 зависит только от последовательности b . Если $\mu_1 = \infty$, то уравнение $a = n/N$ всегда имеет единственное решение. Если $\mu_1 < \infty$, то уравнение $a = n/N$ имеет единственное решение при $n/N \leq \mu_1$ и не имеет решений при $n/N > \mu_1$. В дальнейшем, предполагая, что x выбрано так, что $a = n/N$, мы тем самым накладываем ограничение на поведение дроби n/N .

Следующие две теоремы дают достаточные условия невозникновения гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения.

Теорема 1. Пусть параметр x определяется из соотношения $a = n/N$, при этом $n, N \rightarrow \infty$ так, что $Nx^m \rightarrow \infty$, $E\xi_1^2 \leq 1$. Тогда в обобщенной схеме размещения гигантской компоненты нет.

Доказательство. Пусть $r = [nt]$, $t > 0$. Как было отмечено при доказательстве леммы 3, из условия $Nx^m \rightarrow \infty$ следует, что $\sigma\sqrt{N} \rightarrow \infty$. Отсюда и из $E\xi_1^2 \leq 1$ по лемме 2 получаем, что $\sigma\sqrt{N} = o(n)$, поэтому

$$NP_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > nt\} \leq \mathbf{P}\{\xi_1 > \sigma\sqrt{N}\} \leq \sigma^{-2} \sum_{k > \sigma\sqrt{N}} k^2 x^k b_k / B(x).$$

Поэтому $NP_r \rightarrow 0$ и $(1 - P_r)^N \rightarrow 1$. Кроме того, согласно лемме 3 случайные величины S_N и Z_N имеют одно и то же предельное распределение, следовательно, $\mathbf{P}\{Z_N = n\} / \mathbf{P}\{S_N = n\} \rightarrow 1$.

Отсюда и из равенства (5) получаем, что при каждом $t > 0$ выполняется предельное соотношение $\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq nt\} \rightarrow 1$, то есть гигантская компонента не возникает.

Аналогично, с помощью леммы 4 доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $b_k \asymp k^{-\delta}$, $1 < \delta < 3$, параметр x определяется из соотношения $a = n/N$, $n, N \rightarrow \infty$ так, что $Nx^m \rightarrow \infty$ и $N(1-x)^{\delta-1} \rightarrow \infty$. Тогда в обобщенной схеме размещения гигантской компоненты нет.

Доказательство. Если $x \neq 1 - \varepsilon$, где ε произвольно малое фиксированное положительное число, то $E\xi_1^2 \leq 1$, и выполнены условия теоремы 1.

Пусть $x \rightarrow 1$. Как уже было отмечено при доказательстве леммы 4, условие $N(1-x)^{\delta-1} \rightarrow \infty$ эквивалентно условию $\mu_4/(\sigma^4 N) \rightarrow 0$. Поэтому из леммы 2 следует, что $\sigma\sqrt{N} = o(n)$. Кроме того, $a = o(\sigma\sqrt{N})$, поскольку, как было показано при доказательстве леммы 4, $a^2 = o(\sigma^2)$. Следовательно,

$$NP_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > nt\} \leq \mathbf{P}\{|\xi_1 - a| > \sigma\sqrt{N}\} \leq \mu_4/(\sigma^4 N) \rightarrow 0.$$

Итак, $(1 - P_r)^N \rightarrow 1$. Кроме того, в условиях теоремы вероятности $\mathbf{P}\{S_N = n\}$ и $\mathbf{P}\{Z_N = n\}$ имеют одну и ту же асимптотику по лемме 4. Из равенства (5) получаем, что при каждом $t > 0$ выполняется предельное соотношение $\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq nt\} \rightarrow 1$. Поэтому гигантская компонента в обобщенной схеме размещения отсутствует.

Следует отметить, что доказанные теоремы в большинстве случаев не дают исчерпывающего ответа на вопрос о возникновении или отсутствии гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения. В приведенных ниже примерах только в случае конечного носителя b (пример 2) полученные в статье результаты доказывают отсутствие гигантской компоненты. Теоремы 1 и 2 полезны тем, что указывают зону изменения параметров, в которой гигантская компонента не возникает, и тем самым сужают область ее поиска.

Рассмотрим несколько примеров применения теорем 1 и 2.

1. *Классическая схема размещения.* Рассмотрим равновероятное размещение n частиц по N ячейкам. Пусть η_j — число частиц, попавших в ячейку с номером j , $j = 1, \dots, N$. В этом случае вероятности (1) имеют вид

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} = \frac{n!}{n_1! \dots n_N! N^n}. \quad (14)$$

Данная обобщенная схема размещения достаточно хорошо изучена [2]. Известно, что в ней гигантская компонента не возникает при любом поведении дроби n/N и при $N \rightarrow \infty$.

Нетрудно проверить, что равенство (14) выполняется при $b_k = 1/k!$. При этом ξ_1 имеет распределение Пуассона с параметром x , а радиус сходимости R ряда $\sum_k x^k b_k$ равен ∞ . Заметим также, что для данных b_k имеем $k_1 = m = 1$. Выбирая x так, что $a = x = n/N$, по теореме 1 получаем, что для $n/N \ll 1$ в классической схеме размещения гигантская компонента не возникает.

2. Предположим, что носитель b конечен. Как нетрудно проверить, в этом случае $R = \infty$ и $E\xi_1^2 \leq 1$. Отсюда следует, что при условии $Nx^m \rightarrow \infty$, где x выбрано так, что $a = n/N$, по теореме 1 в обобщенной схеме размещения нет гигантской компоненты.

Рассмотрим пример 1.3.2 книги [1]. Из урны, содержащей l шаров каждого из N цветов, с помощью случайного выбора без возвращения извлекаются n шаров. Обозначим η_i число извлеченных шаров i -го цвета, $i = 1, \dots, N$. Тогда для неотрицательных целых $n_1, \dots, n_N$ таких, что $n_1 + \dots + n_N = n$,

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} = \binom{l}{n_1} \dots \binom{l}{n_N} / \binom{l}{n}.$$

Равенство (3) выполнено, если

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k} = \binom{l}{k} x^k / B(x), \quad k = 0, 1, \dots, l,$$

где $x = p/(1-p)$, $B(x) = (1+x)^l$. Поскольку $a = lp$, из уравнения $a = n/N$ получаем, что $Np = n/l$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$ выполнено условие $Nx^m \rightarrow \infty$, так как в данном случае $m = 1$. Следовательно, в данной обобщенной схеме при $N, n \rightarrow \infty$ и фиксированном l гигантская компонента не возникает.

3. В [7] изучаются леса Гальтона–Ватсона с N корневыми и n некорневыми вершинами. Пусть ξ — случайная величина, равная числу потомков в соответствующем процессе Гальтона–Ватсона,

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \lambda^k p_k / F(\lambda),$$

где

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k p_k, \quad F(1) = 1, \quad F'(1) = 1, \quad \lambda F'(\lambda) / F(\lambda) = n / (N + n).$$

Пусть d — максимальный шаг ξ . Обозначим также $\eta_1, \dots, \eta_N$ объемы деревьев в лесе Гальтона–Ватсона. В [7] доказано, что

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} = \mathbf{P}\{v_1 = n_1, \dots, v_N = n_N \mid v = N + n\},$$

где $v_1, \dots, v_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $v = v_1 + \dots + v_N$, причем

$$\mathbf{P}\{v_1 = 1 + kd\} = \lambda^{kd} b_k / F^{kd+1}(\lambda), \quad b_k \asymp k^{-3/2}.$$

В [7, 8] получены результаты, из которых видно, что при условии $n/N^2 \ll 1$ и $N\lambda^{dm} \rightarrow \infty$ гигантская компонента в данной обобщенной схеме размещения не возникает, а при условии $n/N^2 \rightarrow \infty$ возникает.

Полагая $\xi_i = (v_i - 1)/d$, $x = (\lambda/F(\lambda))^d$, приходим к обобщенной схеме размещения, удовлетворяющей изложенным в начале статьи требованиям. Из теоремы 2 следует, что

при выполнении условий $Nx^m \rightarrow \infty$, $N^2(1-x) \rightarrow \infty$ в лесе Гальтона–Ватсона гигантское дерево не возникает [8].

Заметим также, что при $x \rightarrow 1$ имеем $1-x \asymp 1-x^{1/d}$ и, кроме того, нетрудно доказать, что $1-\lambda F'(\lambda)/F(\lambda) \asymp (1-\lambda)^2$. Как показано в [7], $1-\lambda \asymp N/n$, поэтому условие $N^2(1-x) \rightarrow \infty$ эквивалентно условию $n/N^2 \rightarrow 0$ (см. [7, 8]).

4. Рассмотрим множество всех лесов из N некорневых деревьев с n вершинами. Зададим на нем равномерное распределение. Обозначим $\eta_1, \dots, \eta_N$ размеры деревьев в полученном случайном лесе. Тогда, как показано в [3], для изучения вероятностей $\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\}$ применима обобщенная схема размещения, в которой

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{k^{k-2}x^k}{k!B(x)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

т.е. $b_k = k^{k-2}/k!$. Радиус сходимости $B(x)$ равен e^{-1} . Нетрудно видеть, что $b_k \asymp k^{-5/2}/R^k$.

В книге [3] приводятся теоремы, из которых видно, что при выполнении условий

$$N\theta \rightarrow \infty, \quad N(1-\theta)^3 \rightarrow \infty, \quad \theta = 2(n-N)/n, \quad (15)$$

гигантская компонента не возникает. Однако при условии $N(1-2(n-N)/n)^3 \asymp 1$, как показано в [3], в данной обобщенной схеме размещения гигантская компонента все еще отсутствует, а появляется лишь при $N(1-2(n-N)/n)^3 \rightarrow -\infty$.

Чтобы перейти к обобщенной схеме размещения с такими параметрами, которые удовлетворяют условиям теоремы 2, рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины ξ'_i , $i = 1, \dots, N$, с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi'_1 = k\} = y^k b'_k / \beta(y), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где

$$y = xe, \quad b'_k = (k+1)^{k-1} / ((k+1)!e^k B(1/e)), \quad \beta(y) = \sum_{k=0}^n y^k b'_k.$$

Находя асимптотику b'_k с помощью формулы Стирлинга, получаем, что $b'_k \asymp k^{-5/2}$ при $k \rightarrow \infty$. По теореме 2 при выполнении условий

$$Ny \rightarrow \infty, \quad N(1-y)^{3/2} \rightarrow \infty \quad (16)$$

в рассматриваемой обобщенной схеме гигантской компоненты нет. Следуя обозначениям книги [3], положим $\theta e^{-\theta} = x = y/e$, $0 < \theta \leq 1$. При этом равенство $\mathbf{E}\xi'_1 = n/N$ имеет место при $\theta = 2(n-N)/n$. Заметим, что это равенство выполняется только при $n/N \leq 2$. Для другой зоны изменения параметров N, n теорема 2 неприменима.

При $y \rightarrow 1$ получим, что $\theta \rightarrow 1$ и

$$1-y = 1-\theta e^{1-\theta} = 1-\theta(1+(1-\theta)) + \frac{(1-\theta)^2}{2} + o(1-\theta)^2 = \frac{(1-\theta)^2}{2}(1+o(1)).$$

Отсюда следует, что условия (16) эквивалентны (15).

Список литературы

1. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
2. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
3. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Наука, Москва, 2000.
4. Колчин В. Ф., О существовании гигантской компоненты в схемах размещения частиц. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2000) 7, №1, 112–113.
5. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О., *Конкретная математика*. Мир, Москва, 1998.
6. Мухин А. Б., Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) 36, №4, 660–674.
7. Pavlov Yu. L., *Random Forests*. VSP, Utrecht, 2000.
8. Чеплюкова И. А., Возникновение гигантского дерева в случайном лесе. *Дискретная математика* (1998) 10, №1, 111–126.

Статья поступила 17.01.2002.