Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Князев, О дихотомических графах с обхватом, на единицу меньшим максимального, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 2, 119–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 11:42:06

О дихотомических графах с обхватом, на единицу меньшим максимального

© 2002 г. А. В. Князев

Дихотомическим называется орграф, для полустепеней исхода $d_0(j)$ и захода $d_1(j)$ любой вершины $j \in V$ которого выполнено равенство $d_0(j) = d_1(j) = 2$. Граф Γ называется примитивным, если для любой пары его вершин i и j в Γ существует путь из i в j длины $m > 0$. Наименьшее такое m обозначается $\gamma(\Gamma)$ и называется экспонентом Γ . Обозначим через $G(n, 2, p)$ класс сильно связных дихотомических графов с n вершинами и с обхватом (длиной кратчайшего контура) p , а через $P(n, 2, p)$ класс примитивных n -вершинных дихотомических графов с обхватом p . Обхват n -вершинного дихотомического графа не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ — наименьшее целое число, не меньшее x . Ранее автором было доказано, что любой примитивный дихотомический n -вершинный граф с максимально возможным обхватом $\lfloor n/2 \rfloor$ имеет экспонент, равный в точности $n - 1$.

В настоящей работе доказано, что при нечетном $n \geq 13$

$$G(n, 2, (n-1)/2) = P(n, 2, (n-1)/2),$$

причем любой граф из $G(n, 2, (n-1)/2)$ имеет контур длины $(n+1)/2$; для любого графа Γ из $G(n, 2, (n-1)/2)$ справедливо неравенство

$$\gamma(\Gamma) \leq \frac{(n-1)^2}{4} + 5.$$

Напомним некоторые определения и введем обозначения. Всюду в дальнейшем под графом понимается сильно связный орграф с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ без параллельных дуг.

Определение 1. Дихотомическим называется орграф, для полустепеней исхода $d_0(j)$ и захода $d_1(j)$ любой вершины $j \in V$ которого выполнено равенство $d_0(j) = d_1(j) = 2$.

Определение 2. Граф Γ называется примитивным, если для любой пары его вершин i и j в Γ существует путь из i в j длины $m > 0$. Наименьшее такое m обозначается $\gamma(\Gamma)$ и называется экспонентом Γ .

Обозначим через $G(n, 2, p)$ класс сильно связных дихотомических графов с обхватом (длиной кратчайшего контура) p , а через $P(n, 2, p)$ класс примитивных дихотомических графов с обхватом p .

В [5] доказано, что обхват n -вершинного дихотомического графа не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ — наименьшее целое число, не меньшее x .

Обозначим через $R^{(\alpha)}$ множество всех различных подмножеств множества V вершин графа Γ мощности α , где $1 \leq \alpha \leq n - 1$. Пусть $Q \in R^{(\alpha)}$.

Расстоянием $\rho[i, Q]$ от вершины i до Q называется величина

$$\rho[i, Q] = \min\{\rho(i, j_t) \mid j_t \in Q, t = 1, \dots, \alpha\},$$

где $\rho(i, j_t)$ — длина кратчайшего непустого пути из i в j_t в Γ .

Определение 3. Величина

$$D_\alpha(\Gamma) = \max\{\rho[i, Q] \mid i \in V, Q \in R^{(\alpha)}, i \notin Q\}$$

называется α -диаметром сильно связного графа Γ .

Из результатов работы [4] следует, что для любого графа $\Gamma \in G(n, 2, p)$, где $p \geq 3$,

$$D_\alpha(\Gamma) \leq \frac{(n + 2 - \alpha)(p + 1)}{2p - 1}. \quad (1)$$

В [6] доказано, что для экспонента произвольного примитивного графа Γ с обхватом (длиной наименьшего контура) p справедлива достижимая верхняя оценка

$$\gamma(\Gamma) \leq n + p(n - 2).$$

В [2] доказано, что для экспонента произвольного графа Γ из $P(n, 2, p)$ справедлива оценка

$$\gamma(\Gamma) \leq \frac{n(p + 1)}{2p - 1} + p(n - 2) + 5.$$

С другой стороны, в [3] доказано, что любой примитивный дихотомический граф с максимально возможным обхватом $\lfloor n/2 \rfloor$ имеет экспонент, равный в точности $n - 1$.

В настоящей работе доказано, что при нечетном $n \geq 13$

$$G(n, 2, (n - 1)/2) = P(n, 2, (n - 1)/2),$$

причем любой граф из $G(n, 2, (n - 1)/2)$ имеет контур длины $(n + 1)/2$; для любого графа Γ из $G(n, 2, (n - 1)/2)$ справедливо неравенство

$$\gamma(\Gamma) \leq \frac{(n - 1)^2}{4} + 5.$$

Напомним общую идею получения верхних оценок экспонентов примитивных графов (см. [6]). Пусть Γ — примитивный граф, и пусть $L(\Gamma) = \{r_1, \dots, r_m\}$ — множество всех различных длин его простых контуров, где $r_1 > \dots > r_m = p$. Так как Γ примитивен, наибольший общий делитель $\gcd(r_1, \dots, r_m)$ чисел $r_1, \dots, r_m$ равен единице.

Пусть i и j — вершины Γ . Экспонентом $\gamma(i, j)$ пары (i, j) назовем такое наименьшее натуральное γ , что для любого $q \geq \gamma$ существует путь из i в j длины q . Тогда

$$\gamma(\Gamma) = \max\{\gamma(i, j) \mid i, j \in V = \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ — такое множество различных натуральных чисел, что $\gcd(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 1$. Определим функцию $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ как наименьшее натуральное

s такое, что любое натуральное $q \geq s$ может быть представлено в виде линейной комбинации

$$q = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m,$$

где $c_i, i = 1, \dots, m$, — целые неотрицательные числа. Функция задана корректно (см. [8]), при этом в [7] доказано, что при $m = 2$ справедливо равенство

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1). \quad (2)$$

Пусть $R = \{r_1, r_2 = p\} \subset L(\Gamma)$ и $\gcd(r_1, r_2) = 1$, $L_i = \{Q_i^{(j_i)}, j_i = 1, \dots, m_i\}$ — множество всех различных простых контуров длины $r_i, i = 1, 2$. Зафиксируем пару контуров $(Q_1^{(j_1)}, Q_2^{(j_2)}) \in L_1 \times L_2$. Для произвольной пары вершин i и j в графе Γ определим $(Q_1^{(j_1)}, Q_2^{(j_2)})$ -расстояние $\rho^{(i,j)}(Q_1^{(j_1)}, Q_2^{(j_2)})$ как длину кратчайшего пути из i в j , пересекающего $Q_1^{(j_1)}$ и $Q_2^{(j_2)}$ (то есть имеющего хотя бы по одной общей точке с этими контурами), если $Q_1^{(j_1)}$ и $Q_2^{(j_2)}$ не пересекаются, и пересекающего хотя бы один из пары контуров $Q_i^{(j_i)}, i = 1, 2$, если эти контуры пересекаются. Тогда R -расстояние $\rho_R(i, j)$ определим равенствами

$$\rho_R(i, j) = \min\{\rho^{(i,j)}(Q_1^{(j_1)}, Q_2^{(j_2)}) \mid j_1 = 1, \dots, m_1, j_2 = 1, \dots, m_2\}.$$

Тогда для $\gamma(i, j)$ справедлива оценка

$$\gamma(i, j) \leq \rho_R(i, j) + \varphi(r_1, r_2).$$

Введем обозначение

$$\rho(R) = \max\{\rho_R(i, j) \mid i, j \in V\}.$$

Тогда

$$\gamma(i, j) \leq \rho(R) + \varphi(r_1, r_2). \quad (3)$$

Пусть g — полноцикловая подстановка $(0, 1, \dots, n-1)$ (а $\bar{g}$ — соответствующая ей подстановочная матрица) из симметрической группы S_n , действующей на множестве $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Для $g^* \in S_n$ пусть $\Delta_j(g^*) = j \ominus i$, где $g^*(i) = j$, а $\ominus$ — символ операции вычитания по модулю n , то есть $j \ominus i = j - i$, если $j \geq i$, и $j \ominus i = n + j - i$, если $j < i$;

$$\Delta_{\max}(g^*) = \max\{\Delta_j(g^*) \mid j = 0, 1, \dots, n-1\};$$

$$\Delta_{\min}(g^*) = \min\{\Delta_j(g^*) \mid j = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Там, где будет ясно, о какой подстановке идет речь, будем писать $\Delta_{\max}, \Delta_{\min}, \Delta_j$.

Теорема 1. Пусть $\Gamma \in G(n, 2, (n-1)/2)$, где n — нечетное число, $n \geq 13$. Тогда Γ содержит контур длины $(n+1)/2$ и расстояние от любой вершины Γ до контура длины $(n+1)/2$ или $(n-1)/2$ не превышает 2.

Доказательство. По теореме Бирхгофа (см. [1]) для матрицы смежности A графа Γ справедливо равенство $A = \bar{g}_1 + \bar{g}_2$, где $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ — подстановочные матрицы.

Возможны следующие два случая.

В первом случае хотя бы одна из подстановок g_1, g_2 имеет цикловую структуру $[(n-1)/2, (n+1)/2]$. Ясно, что в этом случае теорема 1 верна.

Рис. 1.

Во втором случае обе подстановки g_1 и g_2 полноцикловые. Без ограничения общности можно считать, что $g_1 = g$ и $g_2 = (0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$. Так как обхват графа Γ равен $(n-1)/2$, справедлива оценка $\Delta_{\max}(g_2) \leq (n+1)/2 + 1$ (см. рис. 1).

Поскольку в Γ нет параллельных дуг, справедлива оценка $\Delta_{\min}(g_2) \geq 2$.

Утверждения теоремы будут следовать из лемм 1–3, доказываемых ниже.

Лемма 1. Пусть в условиях теоремы 1 $\Delta_{\max}(g_2) = (n+1)/2$. Тогда справедливы оба утверждения теоремы 1.

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $\Delta_{\max} = \Delta_{i_1}$ и, значит, $g_2(0) = (n+1)/2$ (см. рис. 1). Тогда контур $(0, (n+1)/2, (n+3)/2, \dots, n-1, 0)$ (см. рис. 1) имеет длину $(n+1)/2$, откуда следует справедливость первого утверждения теоремы.

Докажем второе утверждение. Ясно, что $g_2((n+1)/2) \in \{1, 2, (n+5)/2\}$, иначе в Γ существовал бы контур длины, строго меньшей $(n-1)/2$ (или параллельные дуги).

Если $g_2((n+1)/2)$ равно 1 или 2, то второе утверждение справедливо, так как контуры $(1, 2, \dots, (n+1)/2, 1)$ и $(2, 3, \dots, (n+1)/2, 2)$ имеют длины $(n+1)/2$ и $(n-1)/2$, соответственно. Во втором случае единственная вершина, не лежащая на контурах $(0, (n+1)/2, (n+3)/2, \dots, n-1, 0)$ длины $(n+1)/2$ и $(2, 3, \dots, (n+1)/2, 2)$ длины $(n-1)/2$ — это вершина 1. В этом случае по пути длины 1 из вершины 1 попадаем в вершину 2, принадлежащую контуру длины $(n-1)/2$.

Пусть $g_2((n+1)/2) = (n+5)/2$. Тогда $g_2((n+5)/2) \in \{1, 2, 3\}$ (см. рис. 1), иначе в Γ существовал бы контур длины, меньшей $(n-1)/2$.

Если $g_2((n+5)/2)$ равно 2 или 3, то лемма 1 справедлива, поскольку контуры $(2, 3, \dots, (n+1)/2, (n+5)/2, 2)$ и $(3, 4, \dots, (n+1)/2, (n+5)/2, 3)$ имеют длины $(n+1)/2$

Рис. 2.

и $(n-1)/2$ соответственно. Тогда существуют только множества вершин $\{1\}$ и $\{1, 2\}$, соответственно, не лежащие на контурах соответствующих длин. Легко видеть, что максимальная длина необходимого пути (из вершины 1 в вершину 3) в рассматриваемых случаях равняется 2.

Пусть $g_2((n+5)/2) = 1$. Тогда $g_2(1) \in \{3, 4\}$. В то же время контуры

$$(1, 3, 4, \dots, (n+1)/2, (n+5)/2, 1), \quad (1, 4, 5, \dots, (n+1)/2, (n+5)/2, 1)$$

в соответствующих случаях имеют длины $(n+1)/2$ и $(n-1)/2$, соответственно. Легко видеть, что максимальная длина необходимого пути в рассматриваемых случаях (из вершины 2 в вершину 4 (см. рис. 1)) равна 2.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть в условиях теоремы 1 $\Delta_{\max} < (n+1)/2$. Тогда справедливы оба утверждения теоремы 1.

Доказательство. Без ограничений общности можем считать, что $\Delta_{\max} = \Delta_{i_1}$.

Пусть t — такое наименьшее число, что

$$g_2^t(0) = i_t \in \{0, 1, 2, \dots, i_1\} \quad (4)$$

(см. рис. 2). Так как $\Delta_{i_1} = \Delta_{\max}$, то $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{t-2}, i_{t-1}$. Из полноцикловости g_2 следует, что $i_t \neq 0, i_1$.

Рассмотрим контур Q_1 вида

$$(0, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, i_{t-1} + 1, i_{t-1} + 2, \dots, n-1, 0)$$

Рис. 3.

и оценим сверху его длину l . Ясно, что $2 \leq \Delta_{\min} \leq \Delta_{i_j}$, $j = 2, \dots, t$. Поэтому

$$l \leq f(x, \Delta_{i_1}, \Delta_{i_t}, i_t) = 1 + \frac{1}{2}(n - \Delta_{i_1} - (\Delta_{i_t} - i_t)) - x + \Delta_{i_t} - i_t,$$

где x — целое неотрицательное число.

Ясно, что $f(x, \Delta_{i_1}, \Delta_{i_t}, i_t)$ достигает максимума при

$$x = 0, \quad \Delta_{i_t} = \Delta_{i_1} = \Delta_{\max}, \quad i_t = 1. \quad (5)$$

В этом случае $f(x, \Delta_{i_1}, \Delta_{i_t}, i_t) = f(\Delta_{\max}) = (n + 1)/2$.

Учитывая четность числа $n - 2\Delta_{\max} + 1$, непосредственно проверяем, что $x = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{i_j} = 2, \quad j = 2, \dots, t - 1. \quad (6)$$

Пусть $l = (n + 1)/2$ и выполнено первое утверждение теоремы 1. Тогда контур Q_2 вида $(1, 2, \dots, i_1 - 1, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, 1)$ (см. рис. 3) имеет, как и контур Q_1 , длину $(n + 1)/2$ и второе утверждение выполнено, поскольку все вершины Γ лежат на контуре Q_1 или Q_2 .

Пусть $l < (n + 1)/2$. Если $l \leq (n + 1)/2 - 2$, это противоречит условию теоремы 1, поскольку обхват Γ равен $(n - 1)/2$. Следовательно, $l = (n - 1)/2$.

Рассмотрим условия, при которых $f(x, \Delta_{i_1}, \Delta_{i_t}, i_t) = (n - 1)/2$.

Перепишем функцию f в виде

$$f(x, \Delta_{i_1}, \Delta_{i_t}, i_t) = 1 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}i_t - \frac{1}{2}(\Delta_{i_1} - \Delta_{i_t}) - x = \frac{n - 1}{2}.$$

Тогда возможны следующие случаи:

1. $x = 1, i_t = 1, \Delta_{i_1} = \Delta_{i_t} = \Delta_{\max}$;
- 2.1. $x = 0, i_t = 1, \Delta_{i_1} = \Delta_{i_t} + 2$;
- 2.2. $x = 0, i_t = 2, \Delta_{i_1} = \Delta_{i_t} + 1$;
- 2.3. $x = 0, i_t = 3, \Delta_{i_1} = \Delta_{i_t}$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

В случае 1 $x = 1, i_t = 1, \Delta_{i_1} = \Delta_{i_t} = \Delta_{\max}$. С учетом четности $n - 2\Delta_{\max} + 1$, в этом случае непосредственно проверяется, что $x = 1$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \Delta_{i_m} = \Delta_{i_q} = 3, & \quad 2 \leq m < q \leq t-1, \\ \Delta_{i_j} = 2, & \quad j = 2, 3, \dots, m-1, m+1, \dots, q-1, q+1, \dots, t-1, \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned} \Delta_{i_m} = 4, & \quad 2 \leq m \leq t-1, \\ \Delta_{i_j} = 2, & \quad j = 2, 3, \dots, m-1, m+1, \dots, t-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Ясно, что контуры $Q_1 = (0, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, i_{t-1} + 1, i_{t-1} + 2, \dots, n-1, 0)$ (см. рис. 2) и $Q_2 = (1, 2, \dots, i_1 - 1, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, 1)$ (см. рис. 3) имеют в этом случае одинаковую длину $(n-1)/2$. Поскольку $\Delta_1 = \Delta_{i_1} = \Delta_{\max}$, повторяя рассуждения, начиная с соотношения, аналогичного (4) для вершины i_{t-1} (вместо вершины 0), с учетом условия, аналогичного условию (7), получаем, что $g_2(1) - 1 \in \{3, 4\}$.

Если $g_2(1) < i_1$, то в Γ существует контур длины, меньшей, чем длина контура Q_2 , что противоречит условию теоремы 1. Следовательно, $\Delta_{\max} \in \{3, 4\}$.

Пусть $\Delta_{\max} = 3$. Тогда, с учетом (7), $i_1 = 3, g_2(1) = 4, g_2(2) = 5, g_3(3) = 6, g_2(4) = 7, g_2(5) = 8, g_2(6) = 9$ и $g_2(9) = 1$. При этом $\Delta_{\max} = \Delta_{\min} = 3$ и $n = 11$ (см. рис. 4). Это противоречит условию $n \geq 13$.

Аналогично, для $\Delta_{\max} = 4$ получаем, что

$$i_1 = 4, \quad g_2(1) = 5, \quad g_2(2) = 6, \quad g_2(3) = 7, \quad g_2(4) = 8, \quad g_2(8) = 1.$$

При этом $\Delta_{\max} = \Delta_{\min} = 4$ и $n = 11$ (см. рис. 5). Это противоречит условию $n \geq 13$. Следовательно, данный случай невозможен.

В случае 2.1 $x = 0, i_t = 1, \Delta_{i_1} = \Delta_{i_t} + 2$. С учетом четности в этом случае $(n - \Delta_{i_1} - (\Delta_{i_1} - i_t))$ получаем, что $x = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено (6). Поскольку $\Delta_{i_1} = \Delta_{\max} < (n+1)/2, i_1 \neq i_{t-1}$ (см. рис. 3). В этом случае контур Q_2 имеет длину $(n+3)/2$.

Тогда возможны следующие случаи (а) и (б).

В случае (а) $g_2(1) < i_t$. Тогда $g_2(1) \in \{3, 4\}$, и контуры $(1, 3, 4, \dots, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, 1)$ и $(1, 4, 5, \dots, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, 1)$ имеют длину $(n+1)/2$ и $(n-1)/2$, соответственно (во втором случае контур $(1, 4, 5, \dots, i_1, i_1 + 1, i_2, i_3, \dots, i_{t-1}, 1)$ имеет длину $(n+1)/2$). В обоих случаях максимальное расстояние от вершины 2 до ближайшей вершины (3 или 4), лежащей на контуре длины $(n-1)/2$ или $(n+1)/2$, не превосходит 2. Таким образом, лемма 2 в этом случае справедлива.

Рис. 4.

Рис. 5.

В случае (b) $g_2(1) > i_1$. Тогда $g_2(1) = i_1 + 1$, поскольку $\Delta_{i_1} = \Delta_{\max}$. Если при этом $g_2(2) < i_1$, то справедливы рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта (a), и лемма 2 в этом случае также справедлива.

Пусть $g_2(2) > i_1$. Тогда $g_2(2) > i_2$ и $\Delta_{g_2(2)} > \Delta_{i_1}$, что противоречит исходному предположению, что $\Delta_{i_1} = \Delta_{\max}$.

В случае 2.2 $x = 0$, $i_t = 2$, $\Delta_{i_1} = \Delta_{i_t} + 1$. С учетом четности в этом случае $(n - \Delta_{i_1} - (\Delta_{i_t} - i_t))$ получаем, что $x = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено (6). Поскольку $\Delta_{i_1} = \Delta_{\max} < (n + 1)/2$, $i_1 \neq i_{t-1}$ (см. рис. 3). В этом случае контуры

Рис. 6.

$(2, 3, \dots, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, 2)$ и $(2, 3, \dots, i_1, i_1 + 1, i_2, \dots, i_{t-1}, 2)$ имеют длину $(n - 1)/2$ и $(n + 1)/2$, и с учетом наличия контура

$$Q_1 = (0, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, i_{t-1} + 1, i_{pt} - 1 + 2, \dots, n - 1, 0)$$

длины $(n - 1)/2$, единственная вершина, не лежащая на контуре длины $(n - 1)/2$ или $(n + 1)/2$, это вершина 1. Следовательно, лемма 2 в этом случае справедлива.

В случае 2.3 $x = 0$, $i_t = 3$, $\Delta_{i_1} = \Delta_{i_t}$ и длина контура $(3, 4, \dots, i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, 3)$ равна $(n - 5)/2$, что противоречит условию теоремы 1.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть в условиях теоремы 1 $\Delta_{\max}(g_2) = (n + 1)/2 + 1$. Тогда справедливы оба утверждения теоремы 1.

Доказательство. Без ограничений общности можем полагать, что $\Delta_{\max} = \Delta_{i_1}$. Тогда $g_2(0) = (n + 1)/2 + 1$ (см. рис. 6). Ясно, что $g_2((n + 3)/2) \in \{1, 2, 3\}$, в противном случае обхват Γ был бы меньше $(n - 1)/2$.

Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть $g_2((n + 3)/2) = 3$ (см. рис. 6).

Если $g_2(3) \in \{0, 1, 2\}$, то контур $\{3, g_2(3), g_2(3) + 1, \dots, 3\}$ имеет длину, не большую 4, что противоречит условию теоремы 1.

Если $g_2(3) \in \{5, 6, \dots, (n + 1)/2\}$, то контур $\{3, g_2(3), \dots, (n + 3)/2, 3\}$ имеет длину, не большую $(n - 3)/2$, что противоречит условию теоремы 1.

Рис. 7.

Если $g_2(3) \in \{(n+9)/2, (n+11)/2, \dots, n-1\}$, то контур

$$\{0, (n+3)/2, 3, g_2(3), g_2(3)+1, \dots, n-1, 0\}$$

имеет длину, не большую $(n-3)/2$, что противоречит условию теоремы 1.

Если $g_2(3) = (n+5)/2$, то контур $(0, (n+3)/2, 3, (n+5)/2, (n+7)/2, \dots, n-1, 0)$ имеет длину $(n+1)/2$, и поскольку контур $(3, 4, \dots, (n+3)/2, 3)$ имеет длину $(n-1)/2$, лемма 3 в этом случае справедлива.

Если $g_2(3) = (n+7)/2$ (см. рис. 6), то контур

$$(3, (n+7)/2, (n+9)/2, \dots, n-1, 0, 1, 2, 3)$$

имеет длину $(n+1)/2$, и, как и в предыдущем случае, лемма 3 в этом случае справедлива.

2. Пусть $g_2((n+3)/2) = 2$. Тогда контур $(2, 3, \dots, (n+3)/2, 2)$ имеет длину $(n+1)/2$, и лемма 3 в этом случае справедлива.

3. Пусть $g_2((n+3)/2) = 1$ (см. рис. 7).

Если $g_2(1) \in \{(n+7)/2, (n+9)/2, \dots, n-1, 0\}$, то контур $(1, g_2(1), g_2(1)+1, \dots, 0, 1)$ имеет длину, не большую $(n-3)/2$, что противоречит условию теоремы 1.

Если $g_2(1) \in \{5, 6, \dots, (n+1)/2, (n+3)/2, \}$, то контур

$$(1, g_2(1), g_2(1)+1, \dots, (n+1)/2, (n+3)/2, 1)$$

имеет длину, не большую $(n-3)/2$, что противоречит условию теоремы 1.

Следовательно, $g_2(1) \in \{(n+5)/2, 3, 4\}$.

3.1. Пусть $g_2(1) = 4$ (см. рис. 7).

Отметим сразу, что в этом случае контур $(1, 4, 5, \dots, (n+3)/2, 1)$ имеет длину $(n-1)/2$ и второе утверждение теоремы 1 справедливо.

Если $g_2(4) \in \{6, 7, \dots, (n+1)/2\}$, то контур

$$(1, 4, g_2(4), g_2(4) + 1, \dots, (n+1)/2, (n+3)/2, 1)$$

имеет длину, не большую $(n-3)/2$, что противоречит условию теоремы 1.

Если $g_2(4) \in \{(n+13)/2, (n+15)/2, \dots, n-1, 0, 1, 2, 3\}$, то контур

$$(4, g_2(4), g_2(4) + 1, \dots, 2, 3, 4)$$

имеет длину, не большую $(n-3)/2$, что противоречит условию теоремы 1.

Следовательно, $g_2(4) \in \{(n+5)/2, (n+7)/2, (n+9)/2, (n+11)/2\}$.

Если $g_2(4) = (n+11)/2$, то контур $(4, (n+11)/2, (n+13)/2, \dots, n-1, 0, (n+3)/2, 1, 4)$ имеет длину, не большую $(n-3)/2$, что противоречит условию теоремы 1.

Если $g_2(4) = (n+9)/2$, то контур $(4, (n+9)/2, (n+11)/2, \dots, n-1, 0, 1, 2, 3, 4)$ имеет длину $(n+1)/2$, и лемма 3 в этом случае справедлива.

Если $g_2(4) = (n+7)/2$, то контур $(4, (n+7)/2, (n+9)/2, \dots, n-1, 0, (n+3)/2, 1, 4)$ имеет длину $(n+1)/2$, и лемма 3 в этом случае справедлива.

Пусть $g_2(4) = (n+5)/2$. Из рис. 7 легко видеть, что наличие в графе Γ любой дуги $((n+5)/2, i)$ приводит к появлению в Γ контура длины 3, 4 или 5, если $i \in \{0, 2, 3\}$, либо к появлению контура длины, не большей $(n-3)/2$, если

$$i \in \{5, 6, \dots, (n+1)/2\} \cup \{(n+9)/2, (n+11)/2, \dots, n-1\}.$$

Получаем противоречие с условием теоремы 1.

3.2. Пусть $g_2(1) = 3$. Тогда контур $(1, 3, 4, 5, \dots, (n+1)/2, (n+3)/2, 1)$ имеет длину $(n+1)/2$, расстояние от вершины 2 до этого контура равно 1, и лемма 3 в этом случае справедлива.

3.3. Пусть $g_2(1) = (n+5)/2$ (см. рис. 8). Тогда $g_2((n+5)/2) \in \{2, 3, 4\}$.

3.3.1. Пусть $g_2((n+5)/2) = 4$ (см. рис. 8). Тогда контур

$$(1, (n+5)/2, 4, 5, \dots, (n+3)/2, 1)$$

имеет длину $(n+1)/2$, расстояние от вершин из множества $\{2, 3\}$ до этого контура не превосходит 2, и лемма 3 в этом случае справедлива.

3.3.2. Пусть $g_2((n+5)/2) = 3$. Тогда контур $(3, 4, \dots, (n+3)/2, (n+5)/2, 3)$ имеет длину $(n+1)/2$, расстояние от вершин из множества $\{1, 2\}$ до этого контура не превосходит 2, и лемма 3 в этом случае справедлива.

3.3.3. Пусть $g_2((n+5)/2) = 2$ (см. рис. 9). Повторяя рассуждения начала пункта 3 для вершин 1, $(n+5)/2, 2$ (вместо 0, $(n+3)/2, 1$), получаем, что $g_2(2) = (n+7)/2$ и $g_2((n+7)/2) = 3$ и т.д., вплоть до тройки вершин $((n-3)/2, n-2, (n-1)/2)$ (см. рис. 9).

Тогда $g_2(n-1) = 0$, что противоречит отсутствию в Γ параллельных дуг.

С учетом всех рассмотренных случаев лемма 3 доказана.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Следствие 1. Любой граф Γ из множества $G(n, 2, (n-1)/2)$ при нечетном $n \geq 13$ примитивен.

Рис. 8.

Рис. 9.

Доказательство следствия очевидно.

Теорема 2. Если $\Gamma \in G(n, 2, (n-1)/2)$, n — нечетное число, $n \geq 13$, то

$$\gamma(\Gamma) \leq \frac{(n-1)^2}{4} + 5. \quad (8)$$

Доказательство. Учитывая, что $\gcd((n-1)/2, (n+1)/2) = 1$, положим

$$R = \{(n-1)/2, (n+1)/2\}.$$

Тогда в соответствии с (3)

$$\gamma(\Gamma) \leq \rho(R) + \varphi((n-1)/2, (n+1)/2).$$

В соответствии с (2)

$$\varphi((n-1)/2, (n+1)/2) = \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) \left(\frac{n+1}{2} - 1\right) = \frac{(n-3)(n-1)}{4}.$$

В следующей лемме оценивается $\rho(R)$.

Лемма 4. В условиях теоремы 2 справедлива оценка

$$\rho(R) \leq 2 + \frac{(n+1)^2}{2(n-2)}. \quad (9)$$

Доказательство. Возможны следующие два случая.

В графе Γ любая пара контуров длины $(n-1)/2$ и $(n+1)/2$ имеет хотя бы одну общую точку (пересекается). В этом случае справедливость (9) следует непосредственно из (1) при $p = (n-1)/2$, определения $\rho(R)$ и теоремы 1.

В графе Γ существует пара контуров Q_1 длины $(n+1)/2$ и Q_2 длины $(n-1)/2$, не имеющих общих точек. Тогда существует разложение матрицы смежности A графа Γ в сумму подстановочных матриц $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ (см. начало доказательства теоремы 1) такое, что одна из подстановок имеет цикловую структуру $[(n-1)/1, (n+1)/2]$.

Без ограничения общности можем считать, что это цикловая структура подстановки g_1 и

$$g_1 = (0 \ 1 \ \dots \ (n-1)/2 \ (n+1)/2)((n+3)/2 \ \dots \ n-2 \ n-1).$$

Из соображений размерности получаем, что в этом случае все вершины контура Q_1 , соответствующего циклу $(0 \ 1 \ \dots \ (n-1)/2 \ (n+1)/2)$ кроме одной (без ограничения общности i , $0 \leq i \leq (n-1)/2$), имеют исходящие дуги, соответствующие переходам подстановки g_2 , которые входят только в вершины контура Q_2 , соответствующего циклу $((n+3)/2 \ \dots \ n-2 \ n-1)$, а дуга, исходящая из i , может иметь только вид $(i, i+2)$ (в силу отсутствия в Γ контуров длины, меньшей $(n+1)/2$) (см. рис. 10).

В то же время очевидно, что все дуги, соответствующие переходам g_2 , исходящие из вершин Q_2 , входят только в вершины Q_1 (за исключением вершины $i+2$).

Из описания структуры графа Γ , оценки (1) при $p = (n-1)/2$ и определения $\rho(R)$ следует справедливость (9) и в этом случае.

Лемма 4 доказана.

Рис. 10.

Продолжим доказательство теоремы 2. С учетом оценки из леммы 4

$$\begin{aligned}
 \gamma(\Gamma) &\leq \frac{(n-3)(n-1)}{4} + \frac{(n+1)^2}{2(n-2)} + 2 \\
 &= \frac{(n-3)(n-1)}{4} + \frac{n^2 - 2n + 4n - 8 + 9}{2(n-2)} + 2 \\
 &= \frac{(n-3)(n-1)}{4} + \frac{(n-2)(n+4)}{2(n-2)} + \frac{9}{2(n-2)} + 2.
 \end{aligned}$$

Тогда, учитывая условие $n \geq 13$, получаем, что

$$\begin{aligned}
 \gamma(\Gamma) &\leq \frac{(n-3)(n-1)}{4} + \frac{n+4}{2} + \frac{1}{2} + 2 \\
 &= \frac{(n-3)(n-1)}{4} + \frac{n-1}{2} + 3 + 2 = \frac{(n-1)^2}{4} + 5.
 \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Достижимость оценки характеризует следующий результат (см. рис. 11).

Теорема 3. Для экспонента графа $\Gamma^* \in G(n, 2, (n-1)/2)$ справедливо равенство

$$\gamma(\Gamma^*) = \frac{(n-1)^2}{4} + 1.$$

Доказательство теоремы приведено в [4].

Рис. 11.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. Наука, Москва, 1988.
2. Князев А. В., Верхние оценки экспонентов псевдосимметрических графов. *Дискретная математика* (1990) 2, №4, 63–71.
3. Князев А. В., Дихотомические графы с максимальным обхватом. *Дискретная математика* (1990) 2, №3, 56–64.
4. Князев А. В., О диаметрах дихотомических графов. *Матем. заметки* (1992) 50, №1, 46–55.
5. Behzad M., Minimal 2-regular digraphs with given girth. *J. Math. Soc. Japan* (1973), №5, 1–6.
6. Shao Jia-Yu, On the exponent of a primitive digraph. *Linear Algebra and its Appl.* (1985) 64, 21–31.
7. Sylvester J. J., Math questions and their solutions. *Educational Times* (1884) 41, 21.
8. Vitek Y., Bound for a linear diophantine problem of Frobenius. *J. London Math. Soc.* (1975), №10, 79–85.

Статья поступила 18.03.2002.