Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Г. Омелянов, А. А. Сапоженко, О числе множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 3, 3–7

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:33:05

О числе множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел

© 2002 г. К. Г. Омелянов, А. А. Сапоженко

Подмножество A целых чисел называется свободным от сумм, если для любых $a, b \in A$ число $a + b$ не принадлежит множеству A . Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим $s_\varepsilon(n)$ число множеств, свободных от сумм, в отрезке $[(1/4 + \varepsilon)n, n]$. В статье доказывается, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что $s_\varepsilon(n) \leq c2^{n/2}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00266.

1. Введение

Подмножество A целых чисел называется свободным от сумм, если для любых $a, b \in A$ число $a + b$ не принадлежит множеству A . П. Камерон в [1] предположил, что число $s(n)$ свободных от сумм подмножеств натуральных чисел отрезка $[1, n]$ есть $O(2^{n/2})$. В [1] доказано, что число множеств, свободных от сумм, в отрезке $[n/3, n]$ есть $O(2^{n/2})$. Н. Калкин в [2] доказал, что $s(n) = 2^{n(1/2+o(1))}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим через $s_\varepsilon(n)$ число множеств, свободных от сумм, в отрезке $[(1/4 + \varepsilon)n, n]$. Нами доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что

$$s_\varepsilon(n) \leq c 2^{n/2}. \quad (1)$$

2. Определения и вспомогательные утверждения

Подмножество A вершин графа G называется независимым, если подграф, порожденный множеством A , не содержит ребер. Число всех независимых множеств графа G обозначим через $I(G)$. Назовем границей вершины v в графе $G = (V, E)$ множество

$$\partial v = \{u : (u, v) \in E\}.$$

Границу подмножества A графа G , определим как множество

$$\partial A = \left(\bigcup_{v \in A} \partial v \right) \setminus A.$$

Для подмножеств A и B аддитивной группы H положим

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Заметим, что всюду далее логарифмы берутся по основанию 2.

Теорема 2 (Коши–Давенпорт [3]). Пусть A, B — непустые подмножества элементов группы H простого порядка. Тогда $A + B = H$ или $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.

Лемма 1. Пусть в n -вершинном графе $G = (V, E)$ максимальная степень вершины не превосходит k , а доля вершин, степени меньшей k , не превосходит δ . Тогда

$$I(G) \leq 2^{(n/2)(1+\delta+O(\sqrt{(\log k)/k}))}. \quad (2)$$

Доказательство. С небольшими изменениями доказательство повторяет доказательство теоремы 2 из [4]. Для произвольного независимого множества A построим множество T с помощью следующей пошаговой процедуры.

Шаг 1. Пусть u_1 — произвольная вершина из A . Положим $T_1 = \{u_1\}$.

Пусть сделано m шагов и построено множество

$$T_m = \{u_1, \dots, u_m\}.$$

Шаг $m + 1$. Если существует вершина $u_{m+1} \in A$ такая, что $|\partial u_{m+1} \setminus \partial T_m| \geq \varphi$, то полагаем

$$T_{m+1} = T_m \cup \{u_{m+1}\}.$$

В противном случае процесс заканчивается, и полагаем $T = T_m$.

Это множество T будем называть φ -локализатором множества A . Число независимых множеств A , для которых множество T является φ -локализатором, обозначим $I(G, T)$. Определим для каждого такого T

$$D = D(T) = \{v \in V \setminus \partial T : |\partial v \setminus \partial T| < \varphi\}.$$

Обозначим D_1 ту часть D , которая содержит вершины степени k . Рассмотрим двудольный подграф графа G с долями вершин D_1 и ∂T . Степень каждой вершины из D_1 не меньше $k - \varphi$, а степень каждой вершины из ∂T не меньше k . Поэтому

$$|D_1|(k - \varphi) \leq |\partial T|k.$$

Учитывая, что $|D| - \delta n \leq |D_1|$ и $|\partial T| \leq n - |D|$, получаем неравенство

$$|D| \leq n(1 + \delta) \frac{k}{2k - \varphi}. \quad (3)$$

Положим $\varphi = \sqrt{k \log k}$. Заметим, что для любого A по построению

$$|T| \leq |\partial A|/\varphi \leq n/\varphi.$$

Следовательно, существует семейство Ψ множеств $T \subseteq V$ такое, что для каждого независимого множества A в нем найдется φ -локализатор множества A и при этом

$$|\Psi| \leq \sum_{i \leq n/\varphi} \binom{n}{i} \leq 2^{n\sqrt{(\log k)/k}}. \quad (4)$$

В силу (3) и включения $A \subseteq D$

$$I(G, T) \leq 2^{|D|} \leq 2^{(n/2)(1+\delta+O(\sqrt{(\log k)/k}))}.$$

Отсюда с учетом (4) получаем, что

$$I(G) \leq \sum_{T \in \Psi} I(G, T) \leq 2^{(n/2)(1+\delta+O(\sqrt{(\log k)/k}))}.$$

3. Доказательство теоремы 1

Поскольку $s_\varepsilon(n+1) \leq 2s_\varepsilon(n)$, утверждение (1) равносильно аналогичному утверждению для четных n . Нам удобно будет считать, что n четно. Обозначим через S множество всех свободных от сумм подмножеств отрезка $[(1/4 + \varepsilon)n, n/2]$. Заметим, что каждое подмножество C отрезка $[n/2 + 1, n]$ свободно от сумм, а число таких подмножеств равно $2^{n/2}$. Поэтому достаточно оценить число тех $C \in S$, наименьший элемент которых не превосходит $n/2$. Назовем t глубиной множества C , если наименьший элемент C равен $n/2 - t$. Подсемейство всех $C \in S$ глубины t обозначим через S_t . Если t_0 — некоторое фиксированное число, то, очевидно,

$$\sum_{t=0}^{t_0} |S_t| \leq c(t_0) 2^{n/2},$$

где $c(t_0) \leq 2^{t_0+1}$. Поэтому в дальнейшем, оценивая $|S_t|$, мы ограничиваемся значениями t , превышающими t_0 , где t_0 — некоторое достаточно большое число. Положим

$$Z_t = [n/2 - t, n/2].$$

Если $A \subset [1, n/2]$, то пусть

$$\mathcal{B}(A) = \{B \subseteq [n/2 + 1, n] : A \cup B \in S\}.$$

Тогда

$$|S_t| = \sum_{A \subseteq Z_t} |\mathcal{B}(A)|. \quad (5)$$

Пусть

$$\begin{aligned} S'_t &= \{C \in S_t : |C \cap Z_t| \leq \log t\}, \\ S' &= \bigcup_{t_0 < t \leq (1/4 - \varepsilon)n} S'_t. \end{aligned}$$

Для оценки $|S'_t|$ заметим, что для каждого $A \subseteq Z_t$ и любого $j = 1, \dots, t$ из каждой пары чисел $(n/2 + j, n + j - t)$ множеству $B \in \mathcal{B}(A)$ принадлежит не более одного числа. Отсюда следует, что

$$|\mathcal{B}(A)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^t 2^{n/2}. \quad (6)$$

Поскольку для достаточно большого t

$$|\{A \subseteq Z_t : |A| \leq \log t\}| \leq 2^{\log^2 t},$$

в силу (5) и (6)

$$\begin{aligned} |S'| &= \sum_{t=t_0+1}^{(1/4-\varepsilon)n} |S'_t| \leq \sum_{t=t_0}^{\infty} \sum_{A \subseteq Z_t, |A| \leq \log t} |\mathcal{B}(A)| \\ &\leq \sum_{t=t_0}^{\infty} 2^{\log^2 t} \left(\frac{3}{4}\right)^t 2^{n/2} \leq 2^{n/2-c_1 t_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

где c_1 — абсолютная положительная постоянная.

Положим

$$S''_t = S_t \setminus S'_t, \quad S'' = \bigcup_{t_0 < t \leq (1/4-\varepsilon)n} S''_t.$$

Оценим $|S''|$. Пусть

$$C \in S''_t, \quad A = C \cap Z_t,$$

а m — минимальное число такое, что

$$|A \cap [n/2 - t, n/2 - t + m]| = \lceil \log t \rceil.$$

Через $\Gamma_t(A)$ обозначим граф с множеством вершин

$$V = [n/2 + 1, n/2 + t] \cup [n - t + 1, n],$$

в котором вершины u и v соединены ребром, если

$$u - v \in A \cap [n/2 - t, n/2 - t + m].$$

Заметим, что для каждого $A \in Z_t$ и $B \in \mathcal{B}(A)$ множество $B \cap V$ является независимым в $\Gamma_t(A)$. Кроме того, $|V| = 2t$, число вершин степени $\lceil \log t \rceil$ равно $2t - 2m$, а остальные $2m$ вершин имеют меньшую степень. В силу (2)

$$I(\Gamma_t(A)) \leq 2^{t+m+O(t\sqrt{\log \log t / \log t})}.$$

Пусть $C \in S''$, $A = C \cap Z_t$, а u и v таковы, что $u + v \in [n/2 + 1, n] \setminus V$, тогда $u + v \notin C \setminus V$. Положим

$$\xi = \frac{4\varepsilon}{1-4\varepsilon}, \quad A_\xi = C \cap [n/2 - t/2 - \xi t, n/2 - t/2], \quad k = |A_\xi|.$$

Заметим, что $u + v \notin V$ для любых $u, v \in A_\xi$. Пусть p — простое число, $n \leq p - 1$, и H_p — группа вычетов по модулю p . Ясно, что $A_\xi \subset H_p$ и сумма любых двух элементов из A_ξ не превосходит n . По теореме 2 число различных чисел вида $u + v$, где $u, v \in A_\xi$ не меньше $2k - 1$. Пусть $Q(m, k)$ — семейство множеств $A \subseteq Z_t$ таких, что

$$|A \cap [n/2 - t, n/2 - t + m]| = \lceil \log t \rceil, \quad |A \cap [n/2 - t/2 - \xi t, n/2 - t/2]| = k.$$

Тогда

$$|Q(m, k)| \leq 2^{\log^2 t + t - (m+1) - \xi t} \binom{\xi t}{k}. \quad (8)$$

Для каждого $A \in Q(m, k)$ справедливы неравенства

$$|\mathcal{B}(A)| \leq 2^{n/2 - (2k-1) - 2t} I(\Gamma_t(A)) \leq 2^{n/2 - t + m - 2k + O(t\sqrt{\log \log t / \log t})}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\begin{aligned} |S''| &= \sum_{t=t_0+1}^{(1/4-\varepsilon)n} |S''_t| \leq \sum_{t=t_0}^{\infty} \sum_{m=\lceil \log t \rceil}^t \sum_{k=0}^{\xi t} \sum_{A \in Q(m, k)} |\mathcal{B}(A)| \\ &\leq 2^{n/2} \sum_{t=t_0}^{\infty} \sum_{m=\lceil \log t \rceil}^t \sum_{k=0}^{\xi t} \binom{\xi t}{k} 2^{-2k} 2^{-\xi t + \log^2 t + O(t\sqrt{\log \log t / \log t})} \\ &\leq 2^{n/2} \sum_{t=t_0}^{\infty} 2^{\xi(\log_2 5 - 3)t + \log t + \log^2 t + O(t\sqrt{\log \log t / \log t})} \leq 2^{n/2 - c_2 t_0}, \end{aligned} \quad (10)$$

где c_2 — положительная постоянная, зависящая от ε . Теперь из (7) и (10) получаем, что

$$s_\varepsilon(n) = |S| \leq 2^{n/2} (1 + c(t_0) + 2^{-c_1 t_0} + 2^{-c_2 t_0}) = c 2^{n/2},$$

где c — постоянная, зависящая от ε .

Список литературы

1. Cameron P., Erdős P., On the number of integers with various properties. In: *Number theory, Proc. 1st Conf. Can. Number Theory Assoc., Banff/Alberta (Mollin, R. A., Ed.) 1988*. De Gruyter, Berlin, 1990, pp. 61–79.
2. Calkin N. J., On the number of sum-free sets. *Bull. London Math. Soc.* (1990) **22**, 141–144.
3. Mann H. B., *Addition theorems: the addition theorems of group theory and number theory*. Interscience, New York, 1965.
4. Сапоженко А. А., О числе независимых множеств в расширителях. *Дискретная математика* (2001) **13**, №1, 56–62.

Статья поступила 10.04.2002.