Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Дебрев, Об одной задаче комбинаторного поиска,
Дискрет. матем., 2002, том 14, выпуск 3, 8–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:54:18

Об одной задаче комбинаторного поиска

© 2002 г. Е. В. Дебрев

В работе исследуется задача поиска неориентированных гамильтоновых циклов в полном графе на n вершинах при помощи безусловных реберных тестов. Доказывается, что минимальный тест содержит в точности $n(n-3)/2 - \lfloor n/3 \rfloor + 1$ ребер. Предлагается явная характеристика всех минимальных различающих наборов ребер.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 02-01-00985 и 00-15-96103, программы «Университеты России» и ФЦП «Интеграция».

1. Введение и постановка задачи

В данной работе все графы предполагаются конечными, неориентированными, без петель и кратных ребер.

Рассмотрим полный граф K_n на n вершинах и в нем семейство простых циклов, проходящих через каждую вершину; такие циклы называются гамильтоновыми. Предположим, что требуется восстановить некоторый неизвестный цикл из этого семейства; при этом имеется возможность задавать вопросы вида: принадлежит ли искомому циклу ребро (p, q) ? Будем также предполагать, что каждый следующий задаваемый вопрос не зависит от ответов на предыдущие, то есть алгоритм является безусловным или неадаптивным.

Ясно, что проверив все ребра полного графа, можно полностью восстановить любой его подграф, в том числе и любой гамильтонов цикл. Однако нетрудно убедиться, что число проверок, равное числу ребер полного графа, является избыточным, и, стало быть, имеет смысл вопрос о минимальном числе ребер в проверяющем наборе.

Иными словами, ставится задача построения безусловных тестов, однозначно идентифицирующих гамильтоновы циклы, которая допускает формулировку в терминах табличного теста (см. [1]). При этом столбцы таблицы (одионые проверки) ставятся в соответствие ребрам полного графа, а строки (различаемые объекты) — гамильтоновым циклам; сама таблица является матрицей инцидентности циклов и ребер. Впрочем, далее язык табличных тестов использоваться не будет.

Некоторые задачи, аналогичные рассматриваемой, изучались другими авторами. Так в [2] (см. раздел 3.5) рассмотрены задачи построения условных тестов (алгоритмов поиска), которые при помощи реберных тестов различают графы некоторого заданного семейства. Для семейства гамильтоновых циклов приведены нижняя и верхняя оценки (см. [2], упражнения 3.5.5, 3.5.6), совпадающие по порядку величины. Кроме реберных тестов, проверяющих единственное ребро на принадлежность искомому графу, рассматривались также другие модели. Так в [4] (см. также [5], глава 2) изучаются условные

тесты, в которых единичные проверки отвечают пересечениям искомого гамильтонова цикла с кликами: в моделях одного типа размеры клик ограничены константой, независимой от числа вершин n , в других моделях допускается использовать клики с любым числом вершин. Рассматриваемые модели различаются и по информации, выдаваемой единичной проверкой: в одном случае выдается количество ребер в пересечении клики с искомым гамильтоновым циклом, в другом можно лишь узнать, содержит ли это пересечение хоть одно ребро. Для указанных моделей тестов в [4] получены оценки порядка роста.

Предметом настоящей работы является получение точного значения минимального количества ребер в различающем семействе и явная характеристика таких семейств для случая безусловного реберного теста.

2. Обозначения и формулировка основного результата

В дальнейшем изложении будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в [3].

Пусть $E(G_1)$ и $E(G_2)$ — множества ребер графов G_1 и G_2 соответственно. Под симметрической разностью $G_1 \Delta G_2$ подграфов G_1 и G_2 полного графа K_n будем понимать подграф в K_n , порожденный множеством ребер $E(G) = E(G_1) \Delta E(G_2)$. По определению будем считать, что граф $G_1 \Delta G_2$ содержит все вершины K_n (возможно, некоторые имеют степень ноль).

Будем называть подграф $G \subseteq K_n$ полного графа на n вершинах различающим, если для любых двух различных гамильтоновых циклов (в графе K_n) в G имеется ребро, входящее ровно в один из них.

Из сказанного следует, что граф не является различающим в том и только в том случае, если в его дополнении лежит симметрическая разность каких-либо двух различных гамильтоновых циклов.

Назовем подграф $G' \subseteq K_n$ коразличающим, если его дополнение является различающим графом.

Таким образом, граф является коразличающим тогда и только тогда, когда никакая симметрическая разность двух различных гамильтоновых циклов в нем не содержится.

Циклы будут задаваться одним из следующих способов: перечислением последовательности их ребер

$$C = (E_1, E_2, \dots, E_r),$$

или последовательности их вершин

$$C = (v_1, v_2, \dots, v_s),$$

или последовательности образующих их цепей

$$C = (l_1, l_2, \dots, l_t);$$

при этом предполагается, что как соседние ребра, так и соседние цепи имеют общие вершины. Аналогичным образом будут задаваться цепи.

Для краткости будем называть четным циклом простой цикл четной длины (соответственно нечетным циклом — простой цикл нечетной длины). Под четностью цепи будем понимать четность числа ее ребер.

В качестве меры сложности теста будем рассматривать минимальное количество ребер в различающем графе на n вершинах и будем обозначать его через $L(n)$.

Укажем простейшие оценки этой величины. Поскольку полный граф является различающим,

$$L(n) \leq n(n-1)/2.$$

С другой стороны, поскольку число гамильтоновых циклов в K_n равно $(n-1)!/2$, информационные соображения дают оценку

$$L(n) \gtrsim n \log n$$

(при $n \rightarrow \infty$).

В настоящей работе установлено, что для всякого $n \geq 3$ минимальный различающий граф содержит в точности

$$n(n-3)/2 - \lfloor n/3 \rfloor + 1$$

ребер (теорема 2).

3. Основные свойства коразличающих графов

Лемма 1. *Если граф содержит два различных простых цикла, имеющих более одной общей вершины, то он содержит четный цикл.*

Доказательство. Пусть C_1 и C_2 — циклы, указанные в формулировке леммы. Если хотя бы один из них является четным, то утверждение верно. В противном случае предъявим четный цикл в $C_1 \cup C_2$.

Рассмотрим ребра цикла C_1 , выберем одно из них и будем последовательно присоединять другие ребра C_1 следующим образом: если какой-либо из концов уже выбранных ребер не принадлежит C_2 , то второе инцидентное ему ребро также заносится в список выбранных. Нетрудно видеть, что эта последовательность, начиная с одного ребра, на каждом шаге дает простую цепь, лежащую в C_1 . В конце концов построение приводит к цепи с концами p и p' , которую мы обозначим l_1 , и которая обладает следующими свойствами:

- (1) ее концы p и p' различны, так как в $C_1 \cap C_2$ имеется по крайней мере две вершины;
- (2) $p, p' \in C_2$;
- (3) остальные вершины цепи, если таковые имеются, не принадлежат C_2 .

Заметим, что вершины p и p' делят C_2 на две простые цепи, которые мы обозначим l_2 и l_3 , имеющие в силу нечетности C_2 различную четность. Ввиду перечисленных условий, объединение l_1 с каждой из этих цепей дает простой цикл, и один из них будет четным. Лемма доказана.

Лемма 2. *Коразличающий граф не содержит четных циклов.*

Доказательство. Пусть некоторый подграф K_n содержит четный цикл C . Лемма будет доказана, если мы предъявим в K_n два различных гамильтоновых цикла с симметрической разностью, содержащейся в C . Тем самым будет показано, что указанный подграф не является коразличающим.

Рис. 1. К доказательству леммы 2

Требуемое построение иллюстрируется рисунком 1; ребра одного гамильтонового цикла обозначены сплошным черным цветом, ребра другого обозначены белым, а их общие ребра штрихованной линией. Изображены два случая: цикл длины $l = 4k$ и длины $l = 4k + 2$.

Идея построения состоит в том, чтобы найти две цепи с общими концами (на рисунке это вершины a и b), которые проходят через все вершины цикла C ровно по одному разу, и притом, симметрическая разность этих цепей есть в точности C . Далее, присоединив к каждой из полученных цепей одну и ту же цепь, обходящую вершины, не входящие в C , получим требуемую пару неразличимых гамильтоновых циклов.

Итак, выберем в C две противоположные вершины (здесь и далее, говоря о противоположных вершинах (или ребрах) циклов, мы будем иметь в виду, что две цепи, соединяющие эти вершины (ребра), имеют одинаковую длину) и обозначим их a и b . В C они соединены двумя простыми цепями одинаковой длины; пусть это цепи

$$\begin{aligned} c_1 &= (a, p_1, p_2, \dots, p_s, b), \\ c_2 &= (a, p'_1, p'_2, \dots, p'_s, b). \end{aligned}$$

Если в K_n имеются вершины, не входящие в C , занумеруем их в произвольном порядке:

$$v_1, v_2, \dots, v_{n-2s-2}.$$

Построим цепь, соединяющую b с a и проходящую через эти вершины (если их нет, то цепь состоит из одного ребра):

$$l_0 = (b, v_1, v_2, \dots, v_{n-2s-2}, a).$$

Разделим ребра C на два семейства так, чтобы соседние ребра не оказались в одном таком семействе; это можно сделать, так как по условию цикл четный. В одну группу попадут ребра $(a, p_1), (p'_1, p'_2), (p_2, p_3), \dots$, а в другую $(a, p'_1), (p_1, p_2), (p'_2, p'_3), \dots$. Куда попадут ребра (p_s, b) и (p'_s, b) , определяется четностью s .

Теперь построим две простых цепи, соединяющих a с b , каждая из которых состоит из ребер своего семейства, а так же из общих ребер $(p_1, p'_1), (p_2, p'_2), \dots, (p_s, p'_s)$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} l_1 &= (a, p_1, p'_1, p'_2, p_2, \dots, b), \\ l_2 &= (a, p'_1, p_1, p_2, p'_2, \dots, b). \end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, симметрическая разность этих цепей есть в точности цикл C . Следовательно, гамильтоновы циклы $H_1 = (l_0, l_1)$ и $H_2 = (l_0, l_2)$ также имеют своей симметрической разностью C . Лемма доказана.

С учетом леммы 1 отсюда получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *В коразличающем графе любой простой цикл нечетный и любые два различных простых цикла имеют не более одной общей вершины.*

Замечание 1. Из леммы 3 следует, что простые циклы в коразличающем графе не имеют общих ребер. Рассуждение, использованное при доказательстве леммы 1, показывает, что верно и обратное.

Пусть любые два различных простых цикла в графе не имеют общих ребер. Тогда в этом графе любые два простых цикла имеют не более одной общей вершины. Действительно, пусть циклы C_1 и C_2 имеют по крайней мере две общие вершины. Тогда, если у них нет общего ребра, то, воспользовавшись конструкцией леммы 1, из ребер циклов C_1 и C_2 можно построить цикл C_3 , имеющий общие ребра как с C_1 , так и с C_2 .

Хотя это и не существенно для дальнейшего изложения, следует отметить, что графы с таким условием (любые два простых цикла не имеют общих ребер) изучались под названием деревьев Хусими или кактусов (см. [3, 6]).

Возвращаясь к свойствам коразличающих графов, покажем, что лемма 3 допускает существенное усиление. Оказывается, любые два простых цикла в коразличающем графе не имеют общих вершин. Доказательству общего случая предположим несколько примеров, проясняющих существо дела.

Для начала рассмотрим случай двух треугольников (то есть циклов длины 3), имеющих одну общую вершину p . Обозначим остальные вершины одного треугольника через a_1 и a_2 , а второго через b_1 и b_2 . Вершины, не входящие в треугольники, если таковые имеются, как и раньше, обозначим $v_1, v_2, \dots, v_{n-5}$ и построим содержащую их простую цепь с концами a_2 и b_2

$$l_0 = (a_2, v_1, v_2, \dots, v_{n-5}, b_2).$$

Треугольники разобьем на простые цепи

$$\begin{aligned} l_1 &= (a_1, a_2), & l'_1 &= (a_1, p, a_2), \\ l_2 &= (b_2, b_1), & l'_2 &= (b_2, p, b_1). \end{aligned}$$

Кроме того, цепь, состоящую из одного ребра (a_1, b_1) , обозначим l_3 .

Тогда гамильтоновы циклы

$$H_1 = (l_1, l_0, l'_2, l_3), \quad H_2 = (l'_1, l_0, l_2, l_3)$$

имеют пару треугольников своей симметрической разностью.

Таким образом, в этом примере мы построили пару гамильтоновых циклов в K_n , симметрическая разность которых представляет собой пару циклов длины 3, имеющих ровно одну общую вершину p . При этом в каждом из циклов мы выделили по паре отличных от p вершин (a_1 и a_2 , b_1 и b_2) и по паре соединяющих их цепей (l_1 и l'_1 , l_2 и l'_2) со следующими свойствами:

- (1) цепь l_1 проходит через все вершины первого цикла, кроме p ;
- (2) цепь l'_1 проходит через все вершины первого цикла;
- (3) цепь l_2 проходит через все вершины второго цикла, кроме p ;
- (4) цепь l'_2 проходит через все вершины второго цикла;

Рис. 2. Нечетные циклы малых длин

Рис. 3. Общий случай нечетных циклов

- (5) симметрическая разность цепей l_1 и l'_1 есть первый цикл;
- (6) симметрическая разность цепей l_2 и l'_2 есть второй цикл.

Описанное построение отражено на рисунке 2а.

Аналогичной картины можно добиться, если один из треугольников заменен на цикл длины 5. В этом последнем цикле мы вновь выделяем пару вершин и соединяем их двумя цепями, как показано на рисунке 2b, так что симметрическая разность этих цепей есть в точности данный цикл. Нетрудно видеть, что условия 1–6 остаются в силе, то есть снова построена пара гамильтоновых циклов, симметрическая разность которых есть в точности данная пара простых циклов с одной общей вершиной.

Обобщением приведенных рассуждений является следующая лемма.

Лемма 4. *Коразличающий граф не может содержать пару простых циклов, имеющих общую вершину.*

Доказательство. Пусть дан некоторый коразличающий граф $G \subseteq K_n$, содержащий два различных простых цикла C_1 и C_2 , имеющих общую вершину p . Ввиду леммы 3 каждый из них имеет нечетную длину и нет других общих вершин, кроме p . Для доказательства леммы построим пару различных гамильтоновых циклов с симметрической разностью, лежащей в $C_1 \cup C_2$.

Для этого в каждом из циклов C_k , $k = 1, 2$, проведем следующие построения, иллюстрируемые рисунком 3. Выберем одну из соседних с p вершин и обозначим ее a_k . За вычетом (p, a_k) в цикле C_k имеется четное число ребер, следовательно в C_k имеется вершина b_k такая, что отрезки цикла C_k , соединяющие b_k с a_k и с p имеют одинаковую длину s (длина цикла C_k составляет $l = 2s + 1$). Заметим, что на рисунке 3 представлен случай длин циклов, имеющих разные остатки при делении на 4. При этом один из

циклов имеет длину $2s + 1$, а другой $2t + 1$. Следующее далее рассуждение использует обозначение s для обоих случаев ($s \equiv 1 \pmod{2}$) и $s \equiv 0 \pmod{2}$). Обозначим эти отрезки через c_k и c'_k соответственно. Их вершины занумеруем в направлении от a_k к b_k и от p к b_k :

$$\begin{aligned} c_k &= (a_k, v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{k,s-1}, b_k), \\ c'_k &= (p, v'_{k1}, v'_{k2}, \dots, v'_{k,s-1}, b_k). \end{aligned}$$

Разобьем множество ребер C_k на два непересекающихся класса A_k и B_k следующим образом: ребро (a_k, v_{k1}) отнесем к классу A_k , ребро (p, v'_{k1}) к классу B_k , и далее, двигаясь по каждой из цепей c_k, c'_k , будем чередовать классы, так чтобы соседние ребра не попадали в один класс. При этом ребра $(v_{k,s-1}, b_k)$ и $(v'_{k,s-1}, b_k)$ также попадут в разные классы (как и любые два ребра из разных цепей с одинаковыми порядковыми номерами).

Введем в рассмотрение ребра вида

$$(v_{k,i}, v'_{k,i}), \quad i = 1, \dots, s-1,$$

которые будем называть хордами.

Заметим, что существует простая цепь, ведущая от вершины p к вершине b_k , чередующая ребра из класса B_k с хордами. Также существует простая цепь от a_k к b_k , состоящая из ребер A_k и хорд. Присоединим к первой из этих цепей ребро (a_k, p) , относя его к классу B_k , и обозначим ее l'_k ; вторую цепь обозначим l_k .

Тем самым мы построили пару цепей, соединяющих a_k и b_k , чья симметрическая разность есть простой цикл C_k . Действительно, каждая из цепей l_k, l'_k проходит по ребрам своего класса, а также по всем хордам. Классы A_k и B_k не пересекаются, тогда как хорды принадлежат обоим цепям. Следовательно,

$$l_k \Delta l'_k = A_k \cup B_k = C_k.$$

Остается соединить вершины b_1 и b_2 цепью l_0 , проходящей через все вершины, не лежащие в $C_1 \cup C_2$, а также вершины a_1 и a_2 цепью l_3 , состоящей из одного ребра.

Тогда гамильтоновы циклы

$$H_1 = (l_1, l_0, l'_2, l_3), \quad H_1 = (l'_1, l_0, l_2, l_3)$$

имеют своей симметрической разностью в точности $C_1 \cup C_2$.

Следовательно, граф G не может быть коразличающим. Лемма доказана.

Тем самым получено следующее усиление леммы 3.

Лемма 5. В коразличающем графе любой простой цикл нечетный и любые два различных простых цикла не имеют общих вершин.

Докажем, что полученное условие является не только необходимым, но и достаточным.

Лемма 6. Симметрическая разность двух различных гамильтоновых циклов содержит либо четный цикл, либо пару нечетных циклов, имеющих общую вершину.

Доказательство. Пусть различные гамильтоновы циклы H_1 и H_2 имеют симметрическую разность C . Легко видеть, что симметрическая разность любых двух гамильтоновых циклов есть граф со степенями вершин 0, 2, 4.

Покажем, что всякий граф с четными степенями вершин можно представить в виде объединения непересекающихся по ребрам простых циклов (и, возможно, вершин степени ноль).

Действительно, пусть в графе G степени всех вершин четны. Если в G отсутствуют ребра, то утверждение верно. В противном случае рассмотрим какое-либо ребро в G , оно образует простую цепь длины 1. Вершины на концах этой цепи имеют степени не менее, чем 1, а следовательно, в силу четности, и не менее, чем 2. Таким образом, имеющуюся простую цепь можно достраивать, присоединяя к ее концам ребра. Этот процесс обрывается, когда очередное присоединение приводит к образованию простого цикла C_1 . Если в G есть ребра, не входящие в C_1 , то можно повторить процесс в $G - C_1$, выделив цикл C_2 , и так далее.

Исчерпав все ребра G , получаем требуемое представление

$$G = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_d \cup V,$$

где через V обозначен граф, состоящий из вершин степени ноль.

Ранее было доказано, что если два простых цикла имеют более одной общей вершины, то их объединение содержит четный цикл (лемма 1).

В симметрической разности двух гамильтоновых циклов всякий нечетный простой цикл содержит вершину степени 4. Действительно, в силу нечетности цикла в нем есть два смежных ребра, принадлежащих лишь одному из гамильтоновых циклов. Через общую вершину v этих ребер проходит и второй гамильтонов цикл. Пара принадлежащих ему ребер, инцидентных v , в совокупности с парой ребер первого цикла дают степень 4.

Если в симметрической разности C есть четный цикл, то утверждение леммы верно. Иначе все циклы в C нечетные. Из существования вершин степени 4 в C следует, что существует пара нечетных циклов с общей вершиной. Для любой такой пары общая вершина ровно одна в силу отсутствия четных циклов.

Лемма доказана.

Теорема 1. Для того чтобы граф $G \subseteq K_n$ был коразличающим, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал ни четных циклов, ни пары нечетных циклов с общей вершиной.

Доказательство. В силу леммы 5 коразличающий граф не содержит ни четных циклов, ни пары нечетных циклов с общей вершиной. С другой стороны, если некоторый граф $G \subseteq K_n$ не содержит ни того, ни другого, то по лемме 6 он не содержит и никакой симметрической разности двух различных гамильтоновых циклов, а стало быть, является коразличающим. Теорема доказана.

4. Конструкция минимального различающего графа

В данном разделе приводится явная конструкция минимального различающего графа (и соответственно, максимального коразличающего).

Напомним, что задача рассматривается при $n \geq 3$. Вершины полного графа будем обозначать $v_1, v_2, \dots, v_n$. Для каждого $n \geq 3$ граф G_n зададим, перечислив его ребра

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), \\ (v_1, v_3), (v_4, v_6), \dots, (v_{3\lfloor n/3 \rfloor - 2}, v_{3\lfloor n/3 \rfloor}).$$

Рис. 4. Максимальные коразличающие графы G_n для всех $n \geq 3$

Иными словами, граф G_n представляет собой набор из $\lfloor n/3 \rfloor$ треугольников (то есть циклов длины 3), попарно не пересекающихся по вершинам и образованных ребрами $(v_{3k-2}, v_{3k-1}), (v_{3k-1}, v_{3k}), (v_{3k-2}, v_{3k}), k = 1, \dots, \lfloor n/3 \rfloor$; эти треугольники соединены в цепь ребрами $(v_{3k}, v_{3k+1}), k = 1, \dots, \lfloor n/3 \rfloor - 1$, к тому же, если $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, то имеется хвост из $n - 3\lfloor n/3 \rfloor$ ребер. Все это отражено на рисунке 4.

Все простые циклы в графе G_n имеют длину 3, и никакие два не имеют общих вершин. Согласно теореме 1 граф является коразличающим. Число его ребер равно

$$L_n = n + \lfloor n/3 \rfloor - 1.$$

Теорема 2. Для любого $n \geq 3$ минимальный различающий граф для гамильтоновых циклов в K_n имеет ровно

$$n(n-3)/2 - \lfloor n/3 \rfloor + 1$$

ребер.

Доказательство. Утверждение теоремы можно переформулировать для коразличающих графов. В этом случае требуется доказать, что максимальное число ребер в коразличающем графе равно

$$L_n = \frac{n(n-1)}{2} - \left(\frac{n(n-3)}{2} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 \right) = n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1.$$

Ранее уже был предъявлен коразличающий граф G_n с таким числом ребер. Теперь докажем, что всякий коразличающий граф имеет не более L_n ребер, то есть, что предъявленный граф является максимальным коразличающим (вообще говоря, не единственно возможным).

Действительно, пусть дан некоторый коразличающий граф G' со связными компонентами G'_k , содержащими V_k вершин, E_k ребер и C_k циклов, $k = 1, \dots, s$. В силу теоремы 1 никакие два цикла в G' не имеют общих вершин, следовательно, число ребер E_k в k -й компоненте связности равно числу ребер в остовном дереве плюс число циклов:

$$E_k = V_k + C_k - 1. \quad (1)$$

Суммируя по связным компонентам, получаем, что

$$E = \sum_{k=1}^s E_k = n + C - s, \quad (2)$$

где C — суммарное число циклов в G' . Каждый простой цикл имеет длину, не меньшую 3, следовательно, поскольку простые циклы в G' не пересекаются по вершинам, их число

Рис. 5. Максимальные коразличающие графы для $n = 4, 5, 6, 7$

не превосходит $\lfloor n/3 \rfloor$. Число связанных компонент s не меньше 1. Следовательно, правая часть выражения (2) не превосходит $n + \lfloor n/3 \rfloor - 1$. Теорема доказана.

Итак, в работе найдены некоторые свойства коразличающих графов для гамильтоновых циклов в K_n , доказана характеризующая их теорема 1, на основе которой доказана теорема 2, дающая точное значение функции сложности. Также явным образом построены коразличающие графы с максимальным числом ребер (для всякого $n \geq 3$).

В заключение приведем для примера список максимальных коразличающих графов для малых n , полученный прямым перебором (см. рис. 5); этот список показывает, что предложенная ранее конструкция не исчерпывает всего множества максимальных коразличающих графов.

Список литературы

1. Соловьев Н. А., *Тесты (теория, построение, применение)*. Наука, Новосибирск, 1978.
2. Aigner M., *Combinatorial search*. Wiley, Berlin, 1988.
3. Оре О., *Теория графов*. Наука, Москва, 1980.
4. Grebinski V., Kucherov G., Optimal query bounds for reconstructing a Hamiltonian cycle in complete graphs. In: *Proc. 5th Israel Symp. Theory of Computing and Systems*. IEEE Press, 1997, pp. 166–173.
5. Grebinski V., *Recherche combinatoire: problèmes de pesage, reconstruction de graphes et applications*. Diplôme de doctorat de l'Université Henri Poincaré, 1998.
6. Ford G. W., Uhlenbeck G. E., *Lectures in statistical mechanics*. AMS, Providence, 1963.

Статья поступила 24.05.2002.