Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, В. В. Менших, О переключениях ориентаций графов, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 3, 18–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:57:46

О переключениях ориентаций графов

© 2002 г. В. А. Колмыков, В. В. Меньших

Пусть каждой вершине конечного ориентированного графа сопоставлено конечномерное линейное пространство, а каждой стрелке — линейное преобразование соответствующего пространства. Такие объекты называются линейными представлениями графов. Они естественно возникают в некоторых разделах алгебры и активно изучаются в последние тридцать лет.

Заменяя все стрелки, входящие в вершину-сток на противоположные, получим новый орграф. Эти два орграфа родственны тем, что задачи классификации их представлений, как показали И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд и В. А. Пономарев, эквивалентны друг другу. Две ориентации называются эквивалентными, если одна получается из другой последовательностью описанных преобразований.

В теории представлений орграфов наиболее интересны бесконтурные ориентации. В этой заметке указывается простой критерий эквивалентности бесконтурных ориентаций. Доказано, что две ориентации эквивалентны тогда и только тогда, когда равны некоторые интегралы от этих ориентаций.

Следуя [1], мы рассматриваем только конечные графы без петель и кратных ребер. Ориентация Λ графа G — задание направлений каждого из его ребер.

Для вершины a и ориентации Λ через $s_a \Lambda$ обозначается ориентация, получающаяся из Λ изменением направлений всех ребер, инцидентных a . Преобразование s_a называется отражением. Для последовательности вершин $A = \{a_i\}_{i=1}^k$ положим $s_A = s_{a_k} \dots s_{a_1}$. Назовем A единицей для (G, Λ) , если $s_A \Lambda = \Lambda$. Последовательность A назовем полной, если она содержит все вершины графа по одному разу.

Лемма 1. Преобразование s_A не зависит от порядка, в котором расположены отражения s_{a_i} , $i = 1, \dots, k$ (в частности $s_a s_b = s_b s_a$) и $s_A^2 \Lambda = \Lambda$.

Полная последовательность является единицей.

Если F — подграф G , A — полная последовательность для F , то $s_A \Lambda$ отличается от Λ направлением всех ребер, инцидентных F и $G \setminus F$.

Если (A, B) — полная последовательность для G , то $s_A = s_B$.

Лемма 2. Отношение $\Lambda \sim \Lambda'$, задаваемое равенством

$$\exists A \ s_A \Lambda = \Lambda',$$

является отношением эквивалентности на множестве всех ориентаций графа.

Вершина a называется $(+)$ -вершиной ($(-)$ -вершиной) в ориентированном графе Λ , если из нее не выходит (в нее не входит) ни одной стрелки. Пересечение множества всех

(+)-вершин и множества всех (-)-вершин состоит из изолированных вершин. Объединение этих двух множеств состоит из так называемых ($\pm$)-вершин.

Последовательность A называется (+)-последовательностью (соответственно (-)-последовательностью, ($\pm$)-последовательностью) в ориентации Λ , если a_1 — (+)-вершина ((-)-вершина, ($\pm$)-вершина) в Λ и a_i — (+)-вершина (соответственно (-)-вершина, ($\pm$)-вершина) в $s_{a_{i-1}} \dots s_{a_1} \Lambda$, $i = 2, \dots, k$.

Нам удобно использовать термин цикл в гомологическом смысле: множество c ребер называется циклом, если $\partial c = 0$. Цикл называется простым, если каждая вершина цикла инцидентна не более чем паре его ребер (в частности, простым является нулевой цикл — пустое множество ребер).

Два ребра простого цикла ориентированы однородно, если двигаясь вдоль цикла по направлению одной стрелки, мы достигаем второе ребро в его начале. Ориентация называется ациклической, если для любого простого цикла не все его ребра ориентированы однородно (иными словами, в графе нет контуров).

Лемма 3. ([1]) Следующие условия эквивалентны:

- ориентация Λ ациклическа,
- для Λ существует полная (+)-единица,
- для Λ существует полная (-)-единица,
- для Λ существует полная ($\pm$)-единица.

Лемма 4. Если $A = \{a_i\}_{i=0}^k$ есть ($\pm$)-последовательность в ориентации Λ , то $A' = \{a'_{k-i}\}_{i=0}^k$ есть ($\pm$)-последовательность в ориентации $s_A \Lambda$.

Пусть Λ — ациклическая ориентация, A — ($\pm$)-последовательность. Существует (+)-последовательность B и (-)-последовательность C такие, что

$$s_A(\Lambda) = S_B(\Lambda) = s_C(\Lambda).$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго достаточно доказать следующее утверждение. Если u — (-)-вершина для ациклической ориентации Λ , то найдется (+)-последовательность U такая, что $s_U \Lambda = s_u \Lambda$. Удалим вершину u , в качестве U возьмем полную (+)-единицу оставшегося графа.

Лемма 5. Отношения $\sim_+$, $\sim_-$, $\sim_{\pm}$ такие, что

- $\Lambda \sim_+ \Lambda'$, если существует (+)-последовательность A , для которой $S_A(\Lambda) = \Lambda'$,
- $\Lambda \sim_- \Lambda'$, если существует (-)-последовательность A , для которой $S_A(\Lambda) = \Lambda'$,
- $\Lambda \sim_{\pm} \Lambda'$, если существует ($\pm$)-последовательность A такая, что $S_A(\Lambda) = \Lambda'$,

являются равносильными друг другу отношениями эквивалентности на множестве всех ациклических ориентаций графа.

Отношение эквивалентности из предыдущей леммы будем обозначать $\sim_{\text{sgn}}$.

Циркуляцией простого цикла называется задание (одного из двух) направления последовательного обхода его ребер. Будем считать, что для каждого графа циркуляция каждого простого цикла фиксирована.

Для простого цикла c и ориентации Λ интегралом $\oint_c d\Lambda$ называется разность числа ребер цикла c , направленных вдоль циркуляции, и числа ребер цикла c , направленных против циркуляции. Интеграл по нулевому циклу считается равным нулю. Отображение $c \rightarrow \oint_c d\Lambda$ обозначим $\oint d\Lambda$.

Если B — базис (в Z_2 -пространстве) циклов, состоящий из простых циклов, то сужение отображения $\oint d\Lambda$ на B обозначим $\oint_B d\Lambda$.

Лемма 6. *Существуют целые числа $k(G, B, c', c)$ и нечетное число $k(G, B, c')$ такие, что для всех Λ*

$$k(G, B, c') \oint_{c'} d\Lambda = \sum_{c \in B} k(G, B, c', c) \oint_c d\Lambda.$$

Доказательство. Нетривиален случай $c' \notin B$. Для произвольных ориентаций Λ, Λ' и произвольного простого цикла c определим вещественные функции $\delta_{\Lambda}^{\Lambda'}$ и δ_c^{Λ} на множестве ребер графа, полагая

$$i_c^{\Lambda}(l) = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } l \in c \text{ ориентировано вдоль циркуляции на } c, \\ 0, & \text{если } l \notin c, \\ -1, & \text{если ребро } l \in c \text{ ориентировано против ориентации на } c, \end{cases}$$

$$\delta_{\Lambda}^{\Lambda'}(l) = \begin{cases} 1, & \text{если } l \text{ ориентировано одинаково в } \Lambda \text{ и } \Lambda', \\ -1, & \text{если } l \text{ ориентировано различно в } \Lambda \text{ и } \Lambda'. \end{cases}$$

Ранг системы $\{\delta_c^{\Lambda}\}_c$ равен $|B|$ (см. [3], теорема 6.7). Обозначим $n \rightarrow \bar{n}$ канонический эпиморфизм $\mathbf{Z} \rightarrow Z_2$. Система $\{\bar{i}_c^{\Lambda}\}_c$ состоит из характеристических (со значениями в Z_2) функций системы $\{c\}_{c \in B}$ из Z_2 -пространства циклов графа. Поэтому обе системы линейно независимы. Значит, система $\{i_c^{\Lambda}\}_{c \in B}$ линейно независима над $\mathbf{Z}$, а стало быть и над $\mathbf{R}$. Итак,

$$\text{rank}\{i_c^{\Lambda}\}_c = \text{rank}\{i_c^{\Lambda}\}_{c \in B}.$$

Отсюда, для всех l

$$i_c^{\Lambda}(l) = \sum_{c \in B} \gamma(G, B, \Lambda, c', c) i_c^{\Lambda'}(l).$$

Коэффициенты γ не зависят от Λ , так как $i_c^{\Lambda'} = \delta_{\Lambda}^{\Lambda'} i_c^{\Lambda}$. Эти коэффициенты рациональны. Избавившись от знаменателей, получаем, что для всех Λ и l

$$k(G, B, c', c) = \sum_{c \in B} k(G, B, c', c) i_c^{\Lambda}(j). \quad (1)$$

Коэффициенты k есть целые числа, среди которых есть хотя бы одно нечетное. Переходя к суммированию по l , получаем, что для всех Λ

$$k(G, B, c') \oint_{c'} d\Lambda = \sum_{c \in B} k(G, B, c', c) \oint_c d\Lambda.$$

Число $k(G, B, c')$ нечетно, так как в противном случае мы получили бы равенство

$$0 = \bar{k}(G, B, c') \bar{i}_{c'}^{\Lambda} = \sum_{c \in B} \bar{k}(G, B, c', c) \bar{i}_c^{\Lambda},$$

в правой части которого не все коэффициенты равны нулю, что противоречит линейной независимости системы $\{\bar{i}_c^{\Lambda}\}_{c \in B}$.

Следствие 1. Пусть m — четное число. Если

$$\oint_B d\Lambda \equiv \oint_B d\Lambda' \pmod{m},$$

то

$$\oint d\Lambda \equiv \oint d\Lambda' \pmod{m}.$$

Теорема 1. Справедливы соотношения

$$\Lambda \sim \Lambda' \iff \oint d\Lambda \equiv \oint d\Lambda' \pmod{4} \iff \oint_B d\Lambda \equiv \oint_B d\Lambda' \pmod{4}$$

и для ациклических ориентаций

$$\Lambda \sim_{\text{sgn}} \Lambda' \iff \oint d\Lambda = \oint d\Lambda' \iff \oint_B d\Lambda = \oint_B d\Lambda'.$$

Доказательство. Если G — лес, то, как показано в [1], для любых его ориентаций $\Lambda \sim_{\text{sgn}} \Lambda'$ и тем более $\Lambda \sim \Lambda'$. Поэтому будем далее предполагать, что G — не лес. В обоих случаях импликации $\Leftarrow$ тривиальны. Справедливость противоположных импликаций во втором случае вытекает из следствия 1 при $m = 4$ и $m = 0$.

Докажем, что

$$\Lambda \sim \Lambda' \implies \oint d\Lambda \equiv \oint d\Lambda' \pmod{4}.$$

Достаточно найти ориентацию $\Delta \sim \Lambda$, отличающуюся от Λ' на меньшее число ребер, чем Λ от Λ' . Отметим в G ребра, на которых $\Lambda \neq \Lambda'$ и удалим их. В полученном графе G^* не может быть компоненты связности, содержащей концы одного из отмеченных ребер, так как в противном случае, двигаясь в графе G по этой стрелке и стрелкам графа G^* , принадлежащим данной компоненте, можно было бы получить простой цикл c , в котором отмечено ровно одно ребро и оно ориентировано по-разному в ориентациях Λ и Λ' , и следовательно,

$$\left| \oint_c d\Lambda - \oint_c d\Lambda' \right| = 2.$$

Поэтому найдется компонента F , для которой все отмеченные ранее ребра, инцидентные ей (как подграфу графа G), соединяют F и $G \setminus F$. Пусть A — полная последовательность для F . Поэтому $\Delta = s_A \Lambda$ — искомая ориентация.

Доказательство того, что

$$\Lambda \sim_{\text{sgn}} \Lambda' \implies \oint d\Lambda = \oint d\Lambda'$$

мы воспроизведем из депонированной статьи [2] (с некоторым обобщением). Достаточно найти ориентацию $\Delta \sim_{\text{sgn}} \Lambda$, отличающуюся от Λ' на меньшее число ребер, чем Λ от Λ' . Отметим в G ребра, на которых $\Lambda \neq \Lambda'$, и удалим их. В полученном графе G^* зафиксируем компоненты связности, которым инцидентно хотя бы одно отмеченное ребро. Среди этих компонент найдется компонента F , для которой все стрелки, инцидентные ей (как подграфу графа G), направлены от $G \setminus F$ к F в ориентации Λ , так как иначе для каждой компоненты нашлась бы стрелка с началом в этой компоненте и, двигаясь в графе G по этим стрелкам и стрелкам графа G^* , мы получили бы простой цикл, в котором

все отмеченные ребра ориентированы однородно в ориентации λ , а в ориентации Λ' они ориентированы также однородно, но в другом направлении. Отсюда

$$\oint d\Lambda \neq \oint d\Lambda'.$$

Пусть A — полная $(+)$ -единица для $(F, \Lambda|_F)$. Все ребра, инцидентные F , направлены к F в ориентации Λ , поэтому A — $(+)$ -последовательность в Λ , и $\Delta = s_A \Lambda$ — искомая ориентация.

Список литературы

1. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А., Функторы Кокстера и теорема Габриеля. *Успехи матем. наук* (1973) **28**, №2, 19–33.
2. Колмыков В. А., Меньших В. В., Субботин В. Ф., Сумин М. В., Некоторые свойства ациклических графов и связанных с ними многочленов. Деп. ВИНТИ 12.12.83, №6707-83.
3. Свами М., Тхуласираман К., *Графы, сети и алгоритмы*. Мир, Москва, 1984.

Статья поступила 23.06.2000.