Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Скачкова, Булевы решетки кратно Ω -расслоенных формаций, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 3, 42–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:48:03

Булевы решетки кратно Ω -расслоенных формаций

© 2002 г. Ю. А. Скачкова

В рамках нового функционального подхода к изучению классов групп В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной были введены Ω -расслоенные формации, что позволило систематизировать широкий класс формаций конечных групп. В настоящей работе изучены n -кратно Ω -расслоенные формации с r -направлением φ таким, что $\varphi_0 \leq \varphi$, $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для всех $A \in \mathfrak{F}$, у которых решетка всех n -кратно Ω -расслоенных подформаций с направлением φ является булевой.

В 1999 году В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной впервые были рассмотрены Ω -расслоенные формации как обобщение широко известных композиционных формаций. Это понятие позволяет с единых позиций рассматривать бесконечное множество новых типов формаций таких, как Ω -композиционные, Ω -канонические, Ω -биканонические формации [1, 2].

Представляет интерес разработка решеточных подходов к изучению различных типов формаций. В частности, А. Н. Скибой свойства решетки I_n^r всех n -кратно локальных τ -замкнутых формаций были применены к исследованию I_n^r -формаций с заданными системами подформаций [3]. Изучению свойств решетки всех n -кратно Ω -биканонических формаций и решетки всех n -кратно Ω -канонических формаций посвящена работа автора [4]. В настоящей статье описываются n -кратно Ω -расслоенные формации с r -направлением φ таким, что $\varphi_0 \leq \varphi$, $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для всех $A \in \mathfrak{F}$, у которых решетка всех n -кратно Ω -расслоенных подформаций с направлением φ является булевой.

Все группы предполагаются конечными. Необходимые определения и обозначения можно найти в [1–3]. Согласно [1], для непустого подкласса Ω класса всех конечных простых групп $\mathfrak{F}$ формация $\mathfrak{F}$ называется Ω -расслоенной с направлением φ , если

$$\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')\}$$

и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$, где f и φ — некоторые ΩF -функция и FR -функция соответственно. Функцию f называют Ω -спутником формации $\mathfrak{F}$. Будем использовать также понятие кратно Ω -расслоенной формации [2]. Обозначим ΩF_n^φ множество всех n -кратно Ω -расслоенных формаций с направлением φ . Если $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп, то

$$\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi) = \Omega F_n^\varphi \text{ form}(\mathfrak{X})$$

— пересечение всех формаций из ΩF_n^φ , содержащих $\mathfrak{X}$.

Решетку формаций θ назовем ограниченной, если $(1) \in \theta$ и существует формация $\mathfrak{F} \in \theta$ такая, что для произвольной формации $\mathfrak{H} \in \theta$ справедливо включение $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Здесь единичную формацию (1) будем рассматривать в качестве минимального непустого элемента решетки θ . Следуя [5], ограниченную решетку формаций θ будем называть решеткой с дополнениями, если для любой формации $\mathfrak{M} \in \theta$ существует формация $\mathfrak{X} \in \theta$ такая, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{X} = (1)$ и $\mathfrak{M} \vee_{\theta} \mathfrak{X} = \mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I}$ — максимальный элемент решетки θ . Ограниченная решетка формаций называется булевой, если она дистрибутивна и является решеткой с дополнениями. Если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор формаций таких, что

$$\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1), \quad i, j \in I, i \neq j,$$

то согласно [3] формация

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_n} \mid A_{i_j} \in \mathfrak{F}_{i_j}, i_j \in I, j = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Лемма 1. Пусть ΩF_n^{φ} — множество всех n -кратно Ω -расслоенных формаций с направлением φ , $\varphi_0 \leq \varphi$. Непустая неединичная формация из ΩF_n^{φ} содержит лишь тривиальные ΩF_n^{φ} -подформации тогда и только тогда, когда она порождается простой группой.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F_n(A, \varphi)$, где A — простая группа. Индукцией по n покажем, что формация $\mathfrak{F}$ содержит лишь тривиальные ΩF_n^{φ} -подформации.

Если $n = 0$, то $\mathfrak{F} = \text{form } A$ и по следствию 4.4 из [6] утверждение верно. Пусть $n \geq 1$ и утверждение верно для любых натуральных чисел, меньших n . В силу леммы 1 из [4] формация $\mathfrak{F} = \Omega F_n(A, \varphi)$ обладает единственным минимальным ΩF_{n-1}^{φ} -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \Omega F_{n-1}(A/O_{\Omega}(A), \varphi), \quad f(B) = \Omega F_{n-1}(A/A_{\varphi(B)}, \varphi)$$

для любых $B \in \Omega \cap (A)$, и $f(B) = \emptyset$, если $B \in \Omega \setminus (A)$. Предположим, что $\mathfrak{X} \in \Omega F_n^{\varphi}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда, если h — минимальный ΩF_{n-1}^{φ} -спутник $\mathfrak{X}$, то $h \leq f$ и $h(B) = \Omega F_{n-1}^{\varphi}$ -подформация $f(B)$, $B \in \Omega \cup \{\Omega'\}$.

Рассмотрим случай, когда $A \in \Omega$. При $A \notin \varphi(A)$ получаем, что

$$f(\Omega') = (1), \quad f(A) = \Omega F_{n-1}(A, \varphi)$$

и $f(B) = \emptyset$ для $B \in \Omega \setminus (A)$. По предположению индукции $f(A)$ содержит в качестве ΩF_{n-1}^{φ} -подформаций лишь $\emptyset$, (1) и $\Omega F_{n-1}(A, \varphi)$, а значит, $\mathfrak{X}$ есть $\emptyset$, (1) или $\mathfrak{F}$. Аналогичный вывод можно сделать и при $A \in \varphi(A)$, когда спутник f имеет вид $f(\Omega') = f(A) = (1)$ и $f(B) = \emptyset$ для $B \in \Omega \setminus (A)$.

В случае, когда $A \notin \Omega$, получаем, что $f(\Omega') = \Omega F_{n-1}(A, \varphi)$ и $f(B) = \emptyset$ для любого $B \in \Omega$. Рассуждая, как и выше, заключаем, что во всех случаях $\mathfrak{X}$ — тривиальная или пустая подформация $\mathfrak{F}$.

Докажем необходимость. Пусть $\mathfrak{F} \notin \{\emptyset, (1)\}$ и $\mathfrak{F} \in \Omega F_n^{\varphi}$, причем $\mathfrak{F}$ содержит лишь тривиальные ΩF_n^{φ} -подформации. Выберем $1 \neq G \in \mathfrak{F}$. Тогда существует $N \triangleleft G$ такая, что G/N — простая группа. Поскольку $G/N \neq 1$, то $(1) \neq \Omega F_n(G/N, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$, и по условию $\Omega F_n(G/N, \varphi) = \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}$ порождается простой группой. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — система Ω -расслоенных формаций с r -направлением φ таким, что $\varphi_0 \leq \varphi$ и $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любого $A \in \mathfrak{F}$, причем $\mathfrak{F}_i = \Omega F(f_i, \varphi)$, где f_i — внутренний спутник $\mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых $i \neq j$, $i, j \in I$. Если $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = f_i(A)$ для всех $A \in K(\mathfrak{F}_i) \cap \Omega$ и $f(A) = \emptyset$ при $A \in [\mathfrak{F} \setminus \bigcup_{i \in I} K(\mathfrak{F}_i)] \cap \Omega$.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{G} = \Omega F(f, \varphi)$ и покажем, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{G} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом R , причем $K(R) = (A)$. Если $A \notin \Omega$, то $O_\Omega(G) = 1$ и из включения $G \in \mathfrak{G}$ следует, что $G \cong G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Получаем противоречие с выбором G .

Значит, $A \in \Omega$. Так как $G \in \mathfrak{G}$, то $G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \neq \emptyset$. Из строения f заключаем, что $f(A) = f_i(A)$ для некоторого $i \in I$. Поскольку $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$,

$$G/O_A(G) = G/O_{A'.A}(G) \cong (G/G_{\varphi(A)})/(O_{A'.A}(G)/G_{\varphi(A)}) \in f_i(A).$$

Так как f_i — внутренний спутник $\mathfrak{F}_i$, то $G/O_A(G) \in f_i(A) \subseteq \mathfrak{F}_i$ и по лемме 2 из [2], $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, что противоречит выбору G . Отсюда, $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{G}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^\mathfrak{G}$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, найдутся $i_1, \dots, i_t$ такие, что $G = G_1 \times \dots \times G_t$, $G_j \in \mathfrak{F}_{i_j}$, $j = 1, \dots, t$. Из монолитичности G следует, что существует $a \in \{1, \dots, t\}$ такое, что $G = G_a \in \mathfrak{F}_{i_a}$. Следовательно,

$$G/G_{\varphi(A)} \in f_{i_a}(A) = f(A)$$

для любой $A \in \Omega \cap K(G) \subseteq \Omega \cap K(\mathfrak{F}_{i_a})$. Кроме того, $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Таким образом, $G \in \Omega F(f, \varphi) = \mathfrak{G}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. Лемма доказана.

Теорема 1. Формация $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая система n -кратно (тотально) Ω -расслоенных формаций с r -направлением φ таким, что $\varphi_0 \leq \varphi$ и $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любого $A \in \mathfrak{F}$, также является n -кратно (тотально) Ω -расслоенной формацией с направлением φ .

Доказательство проводится индукцией по n , причем справедливость утверждения теоремы при $n = 1$ следует из леммы 2.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой неединичный класс групп, A — простая группа, $A \in \mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$, $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда $A \in K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то $A \in K(\mathfrak{F})$. Если $n = 0$, то

$$\mathfrak{F} = \text{form } \mathfrak{X} = H R_0(\mathfrak{X})$$

и $A \in K(\mathfrak{X}) = K(\mathfrak{F})$. Предположим, что утверждение верно для натуральных чисел, меньших n , и $A \in \mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$.

Если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$, то из теоремы 5 в [1] следует, что $\Omega \cap K(\mathfrak{F}) = \Omega \cap K(\mathfrak{X})$, значит, $A \in K(\mathfrak{X})$. Пусть теперь $A \notin \Omega$. Тогда из $A \in \mathfrak{F}$ вытекает, что

$$A \cong A/O_\Omega(A) \in f(\Omega') = \Omega F_{n-1}((G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \varphi),$$

где f — минимальный ΩF_{n-1}^φ -спутник $\mathfrak{F}$. По предположению индукции,

$$A \in K(G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq K(\mathfrak{X}).$$

Таким образом, в любом случае $A \in K(\mathfrak{X})$. Лемма доказана.

Используя лемму 5 из [2], несложно показать, что множество ΩF_n^φ образует полную решетку формаций. Для формации $\mathfrak{F} \in \Omega F_n^\varphi$ обозначим через $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$ решетку всех ΩF_n^φ -подформаций $\mathfrak{F}$.

Лемма 4. Если $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$, $\varphi_0 \leq \varphi$, то решетка $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$ содержит лишь конечное число атомов.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$. По лемме 1 $\mathfrak{M} = \Omega F_n(A, \varphi)$ для некоторой простой группы A . Поскольку $A \in \mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$, по лемме 3 $A \in K(G)$. Для конечной группы G множество $K(G)$ может содержать только конечное число попарно неизоморфных групп. Значит, $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$ имеет лишь конечное число атомов. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ — некоторый набор атомов решетки ΩF_n^φ и $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i$. Если $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ — произвольная неединичная ΩF_n^φ -подформация $\mathfrak{F}$, то в множестве $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ найдется подмножество $\{\mathfrak{M}_j \mid j \in J\}$ такое, что $\mathfrak{M} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{M}_j$.

Доказательство. Согласно лемме 4.3.4 из [3] $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i \in I} (\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M})$. Так как $\mathfrak{M}_i$ — атом решетки ΩF_n^φ и $\mathfrak{M} \in \Omega F_n^\varphi$, то $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M} \in \{(1), \mathfrak{M}_i\}$. Пусть J — такое подмножество множества I , что $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_j$. Очевидно, что $\mathfrak{M} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{M}_j$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F} \in \Omega F_n^\varphi$, где φ — r -направление такое, что $\varphi_0 \leq \varphi$ и $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{G}_A \mathfrak{G}_A$ для любого $A \in \mathfrak{F}$. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) решетка $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$ булева;
- (2) $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор атомов решетки $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$;
- (3) в $\mathfrak{F}$ каждый элемент решетки $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$ дополняем.

Доказательство. Покажем, что из выполнимости условия (3) следует выполнимость (2). Рассмотрим набор $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ всех атомов решетки $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Очевидно, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и по теореме 1 $\mathfrak{H} \in \Omega F_n^\varphi$. Допустим, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $M = G^\mathfrak{H}$. Из (3) следует, что найдется такая формация $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = (1)$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$. Поскольку $G \notin \mathfrak{H}$, из монолитичности G заключаем, что $G \in \mathfrak{M}$ и $G/M \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Таким образом, $G = M$, G — простая группа и по лемме 1 $\Omega F_n(G, \varphi)$ — атом решетки ΩF_n^φ . Получаем, что $G \in \Omega F_n(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$, что противоречит выбору G . Значит, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Пусть теперь выполняется условие (2). Покажем, что $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями. Рассмотрим $\mathfrak{M} \in \Omega F_n^\varphi$, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ и набор $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I_1\}$ всех тех подформаций формации $\mathfrak{M}$, которые являются атомами решетки ΩF_n^φ . По лемме 5 $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{F}_i$. Пусть $I_2 = I \setminus I_1$ и $\mathfrak{H} = \bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{F}_i$. Покажем, что $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$. Предположим, что это неверно и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \neq (1)$, тогда существует $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}$ — атом решетки ΩF_n^φ . Следовательно, $\mathfrak{N} = \mathfrak{F}_i$ для некоторого $i \in I$, но $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Получаем противоречие. Значит, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$.

Заметим, что если $\mathfrak{F} \in \theta$ и θ — полная решетка формаций, то для любых $\mathfrak{M}, \mathfrak{H}$ из $\theta(\mathfrak{F})$ справедливо равенство $\mathfrak{M} \vee_{\theta(\mathfrak{F})} \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \vee_\theta \mathfrak{H}$. Таким образом,

$$\mathfrak{M} \vee_{\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})} \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \vee_{\Omega F_n^\varphi} \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Очевидно также, что

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \left(\bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{F}_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{F}_i \right) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \vee_{\Omega F_n^\varphi} \mathfrak{H}$$

и $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\Omega F_n^\varphi} \mathfrak{G}$. Итак, $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями. Докажем ее дистрибутивность. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{L}$ — произвольные ΩF_n^φ -подформации $\mathfrak{F}$. Нетрудно показать, что

$$(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}) \vee_{\Omega F_n^\varphi} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{L} \vee_{\Omega F_n^\varphi} \mathfrak{G}).$$

Предположим, что обратное включение неверно, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{L} \vee_{\Omega F_n^\varphi} \mathfrak{G}) \setminus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}) \vee_{\Omega F_n^\varphi} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G})$. Так как G — монолитическая группа, из $G \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}_i$ для некоторого $i \in I$. Поскольку $\mathfrak{F}_i$ является атомом,

$$\mathfrak{F}_i = \Omega F_n(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{L} \vee_{\Omega F_n^\varphi} \mathfrak{G}.$$

В силу леммы 5 $\mathfrak{L} = \bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{F}_i$. Далее,

$$\mathfrak{L} \vee_{\Omega F_n^\varphi} \mathfrak{G} = \Omega F_n((\mathfrak{L} \cup \mathfrak{G}), \varphi) \subseteq \Omega F_n\left(\bigoplus_{i \in I_1 \cup I_2} \mathfrak{F}_i, \varphi\right) = \bigoplus_{i \in I_1 \cup I_2} \mathfrak{F}_i.$$

Следовательно, $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{L}$ либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{G}$. В любом из этих случаев

$$G \in (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}) \vee_{\Omega F_n^\varphi} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}),$$

что противоречит выбору G . Значит, решетка $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$ дистрибутивна.

Докажем, что выполнимость (1) влечет выполнимость (3). При $n = 0$ условие (3), очевидно, выполняется. Пусть $n \geq 1$ и $\mathfrak{M}$ — элемент решетки $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$. Так как $\Omega F_n^\varphi(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями, существует $\mathfrak{G} \in \Omega F_n^\varphi$ такая, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\Omega F_n^\varphi} \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G} = (1)$. По теореме 1 $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{G} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{G} \in \Omega F_n^\varphi$. Значит,

$$\mathfrak{L} = \Omega F_n((\mathfrak{M} \cup \mathfrak{G}), \varphi) = \mathfrak{F}.$$

Следовательно, $\mathfrak{M}$ дополняем в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Направления Ω -свободной, Ω -биканонической, Ω -канонической формаций [2] удовлетворяют условию $\varphi_0 \leq \varphi$, $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{G}_A, \mathfrak{G}_A$ для любого $A \in \mathfrak{F}$ и являются r -направлениями. Таким образом, в качестве множества ΩF_n^φ в теореме 2 можно рассматривать решетки ΩFr_n , ΩB_n , ΩK_n всех n -кратно Ω -свободных, n -кратно Ω -биканонических и n -кратно Ω -канонических формаций соответственно.

Список литературы

1. Ведерников В. А., Сорокина М. М., Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга. *Дискретная математика* (2001) **13**, №3, 125–144.
2. Ведерников В. А., Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга. *Труды ИММ УрО РАН* (2001) **8**, 1–23.
3. Скиба А. Н., *Алгебра формаций*. Беларуская навука, Минск, 1997.
4. Скачкова Ю. А., Решетки Ω -расслоенных формаций. *Дискретная математика* (2002) **14**, №2, 85–94.
5. Грэтцер Г., *Общая теория решеток*. Мир, Москва, 1982.
6. Ведерников В. А., *Элементы теории классов групп*. СПГИ, Смоленск, 1988.

Статья поступила 04.04.2002.