Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Камо-
зина, Булевы решетки n -кратно Ω -биканонических классов
Фиттинга, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 3, 47–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:46:07

Булевы решетки n -кратно Ω -биканонических классов Фиттинга

© 2002 г. О. В. Камозина

В работе описаны n -кратно Ω -биканонические классы Фиттинга с булевой решеткой подклассов Фиттинга. В частности, показано, что в этом случае класс Фиттинга прямо разложим с помощью набора всех атомов своей решетки. В данном случае понятие прямого разложения класса играет ключевую роль. Поэтому в работе отдельно изучены прямые разложения классов Фиттинга, при этом рассмотрены Ω -расслоенные классы Фиттинга с более общими направлениями.

В работе описываются n -кратно Ω -биканонические классы Фиттинга с булевой решеткой n -кратно Ω -биканонических подклассов Фиттинга. Подобные исследования проводились в теории формаций [1] и n -кратно ω -локальных классов Фиттинга [2]. Особенно полезной при этом оказалась конструкция прямого произведения классов групп. Приведем ее в следующем виде.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая система непустых классов групп такая, что $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых $i \neq j$, $i, j \in I$. Через $\bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ обозначается совокупность групп вида $A_1 \times \dots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \dots, i_t \in I$. Всякое представление класса групп $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ называется прямым разложением этого класса.

Рассматриваются только конечные группы. Необходимые определения и обозначения можно найти в [1–6]. Приведем лишь некоторые из них. Ω обозначает непустой подкласс класса всех конечных простых групп $\mathfrak{S}$, $\Omega' = \mathfrak{S} \setminus \Omega$. Функция

$$f: \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\},$$

принимая одинаковые значения на изоморфных группах из Ω , называется ΩR -функцией. Функция

$$\varphi: \mathfrak{S} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\},$$

принимая одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathfrak{S}$, называется FR -функцией. Класс Фиттинга

$$\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi) = (G: O^\Omega(G) \in f(\Omega'), G^{\varphi(A)} \in f(A) \forall A \in \Omega \cap K(G))$$

называется Ω -расслоенным, где f и φ — некоторые ΩR -функция и FR -функция соответственно. При этом функция f называется Ω -спутником, функция φ — направлением Ω -расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. При рассмотрении различных направлений получают различные классы Фиттинга. В частности, класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ называется

Ω -свободным или, коротко, ΩFr -классом Фиттинга и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega Fr R(f)$, если $\varphi(A) = \mathbb{G}_{A'}$ для любой $A \in \mathfrak{A}$, его направление будем обозначать через ψ_0 ; класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ называется Ω -каноническим или, коротко, ΩK -классом Фиттинга, и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega KR(f)$, если $\varphi(A) = \mathbb{G}_A \mathbb{G}_{A'}$ для любой $A \in \mathfrak{A}$, его направление будем обозначать через ψ'_2 ; класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ называется Ω -биканоническим или, коротко, ΩB -классом Фиттинга, и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega BR(f)$, если $\varphi(A) = \mathbb{G}_{A'}$ для любой неабелевой $A \in \mathfrak{A}$ и $\varphi(A) = \mathbb{G}_A \mathbb{G}_{A'}$ для любой абелевой $A \in \mathfrak{A}$, его направление будем обозначать через ψ_2 , причем $\psi_0 \leq \psi_2 \leq \psi'_2$. Для Ω -расслоенного класса Фиттинга направление φ называется r -направлением, если $\varphi(A) = \varphi(A) \mathbb{G}_{A'}$ для любой $A \in \mathfrak{A}$; rn -направлением, если φ — r -направление и $\varphi(A)$ не содержит A для любой неабелевой $A \in \mathfrak{A}$.

Всякий класс Фиттинга считается 0-кратно Ω -расслоенным с произвольным направлением φ . Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n -кратно Ω -расслоенным с направлением φ , если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один Ω -спутник, все непустые значения которого являются $(n - 1)$ -кратно Ω -расслоенными классами Фиттинга с тем же направлением φ .

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{S}$ — классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{S} = (1)$. Тогда

$$K(\mathfrak{M}) \cap K(\mathfrak{S}) \cap \mathfrak{A} = \emptyset.$$

Доказательство. Допустим, что $Z_p \in K(\mathfrak{M}) \cap K(\mathfrak{S})$. Так как $Z_p \in K(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{M}_p \subseteq \mathfrak{M}$. Аналогично, $\mathfrak{M}_p \subseteq \mathfrak{S}$. Таким образом, $\mathfrak{M}_p \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{S} = (1)$. Получаем противоречие. Следовательно, $K(\mathfrak{M}) \cap K(\mathfrak{S}) \cap \mathfrak{A} = \emptyset$.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторой системы непустых классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ и $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, φ — rn -направление. Тогда $\mathfrak{F}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$, $i \in I$, где $f_i(A) = \mathfrak{F}_i$, если $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$; $f_i(A) = \emptyset$, если $A \in (\Omega \cap \mathfrak{A}) \setminus K(\mathfrak{F}_i)$; $f_i(A) = f(A)$, если $A \in \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F}_i)$.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{S}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$ и покажем, что $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{S}_i$, $i \in I$.

Предположим, что $\mathfrak{S}_i \not\subseteq \mathfrak{F}_i$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{S}_i \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда G — комонолитическая с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}_i}$.

Пусть $G/M \cong A$ не является Ω -группой. Тогда $G = O^\Omega(G)$ и из включения $G \in \mathfrak{S}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$ следует, что $G = O^\Omega(G) \in f_i(\Omega') = \mathfrak{F}_i$. Получаем противоречие.

Значит, A является Ω -группой. Если A — неабелева группа, то поскольку $G \in \mathfrak{S}_i$, учитывая, что φ — rn -направление, находим, что $G = G^{\varphi(A)} \in f_i(A) = \mathfrak{F}_i$. Получаем противоречие.

Пусть A — абелева группа. Из $G/M \in \mathbb{G}_A$ получаем, что $O^A(G) \subseteq M \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{S}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$, то $G^{\varphi(A)} \in f_i(A)$, то есть $f_i(A) \neq \emptyset$, $A \in K(\mathfrak{F}_i)$, и следовательно, $G^{\varphi(A)} \in f(A)$. Поскольку φ — r -направление, по лемме 12 из [5] $G \in \Omega R(f, \varphi) = \mathfrak{F}$. Ввиду комонолитичности группы G существует $j \in I$ такое, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда $K(G) \subseteq K(\mathfrak{F}_j)$. Допустим, что $i \neq j$. Тогда $A \in K(\mathfrak{F}_j) \cap K(\mathfrak{F}_i) \cap \mathfrak{A} = \emptyset$ в силу леммы 1. Следовательно, $i = j$ и $G \in \mathfrak{F}_i$. Получаем противоречие. Значит, $\mathfrak{S}_i \subseteq \mathfrak{F}_i$, $i \in I$.

Допустим, что $\mathfrak{F}_i \not\subseteq \mathfrak{S}_i$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus \mathfrak{S}_i$. Тогда G — комонолитическая группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{S}_i}$.

Пусть $G/M \cong A$ не является Ω -группой. Тогда $O^\Omega(G) = G \in \mathfrak{F}_i = f_i(\Omega')$. Далее, G/M является B' -группой для любой $B \in \Omega \cap K(G)$. Так как φ является r -направлением, в силу леммы 11 из [5] $G^{\varphi(B)} = M^{\varphi(B)}$. Так как $M \in \mathfrak{S}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$, то $G^{\varphi(B)} = M^{\varphi(B)} \in f_i(B)$. Таким образом, $G \in \Omega R(f_i, \varphi) = \mathfrak{S}_i$. Получаем противоречие.

Значит, A является Ω -группой. Поскольку $O^\Omega(G) \triangleleft G \in \mathfrak{F}_i = f_i(\Omega')$, то $O^\Omega(G) \in f_i(\Omega')$. Как и выше, можно показать, что $G^{\varphi(B)} = M^{\varphi(B)} \in f_i(B)$ для любой $B \in (\Omega \cap K(G)) \setminus (A)$. Если A — неабелева группа, то $G^{\varphi(A)} = G \in \mathfrak{F}_i = f_i(A)$, и значит, $G \in \Omega R(f_i, \varphi) = \mathfrak{F}_i$. Получаем противоречие. Пусть A — абелева группа. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, то $G^{\varphi(A)} \in f(A) \neq \emptyset$. Допустим, что $G^{\varphi(A)} \in f(A) = f_j(A)$, $j \neq i$. Тогда $A \in K(\mathfrak{F}_j)$. Так как $G \in \mathfrak{F}_i$, то $A \in K(G) \subseteq K(\mathfrak{F}_i)$. Получаем, что $A \in K(\mathfrak{F}_j) \cap K(\mathfrak{F}_i) \cap \mathfrak{A} = \emptyset$ в силу леммы 1. Следовательно, $i = j$ и $G^{\varphi(A)} \in f_i(A)$. Таким образом, $G \in \Omega R(f_i, \varphi) = \mathfrak{F}_i$. Получаем противоречие. Значит, $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}_i$, и из доказанного выше, $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторой системы непустых классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$. Если $\mathfrak{F}$ — n -кратно Ω -расслоенный класс Фиттинга с rn -направлением φ , то $\mathfrak{F}_i$ — n -кратно Ω -расслоенный класс Фиттинга с тем же направлением φ для любого $i \in I$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 0$ утверждение, очевидно, верно. При $n = 1$ справедливость леммы вытекает из леммы 2. Пусть утверждение леммы выполняется для любых натуральных чисел, меньших n , и $\mathfrak{F}$ — n -кратно Ω -расслоенный класс Фиттинга с rn -направлением φ . Тогда по определению $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, причем все непустые значения спутника f есть $(n-1)$ -кратно Ω -расслоенные классы Фиттинга с rn -направлением φ . Тогда по лемме 2 $\mathfrak{F}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$, $i \in I$, где $f_i(A) = \mathfrak{F}_i$, если $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$; $f_i(A) = \emptyset$, если $A \in (\Omega \cap \mathfrak{A}) \setminus K(\mathfrak{F}_i)$; $f_i(A) = f(A)$, если $A \in \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F}_i)$.

Так как $\mathfrak{F}$ является $(n-1)$ -кратно Ω -расслоенным классом Фиттинга с направлением φ , по предположению индукции, $\mathfrak{F}_i$ — также $(n-1)$ -кратно Ω -расслоенный класс Фиттинга с направлением φ для любого $i \in I$. Таким образом, все непустые значения спутника f_i являются $(n-1)$ -кратно Ω -расслоенными классами Фиттинга с направлением φ , $i \in I$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая система непустых классов Фиттинга, причем $\mathfrak{F}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$, где f_i — внутренний спутник $\mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых $i \neq j$, $i, j \in I$ и φ — r -направление, причем $\varphi \leq \psi'_2$. Если $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, где $f(A) = \mathfrak{F}$, если $A \in \{\Omega'\}$; $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \cap [\mathfrak{F} \setminus \bigcup_{i \in I} K(\mathfrak{F}_i)]$; $f(A) = f_i(A)$, если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}_i)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть $G/M \cong A$ не является Ω -группой. Тогда $G = O^\Omega(G)$ и из $G \in \mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ следует, что $G = O^\Omega(G) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Получаем противоречие.

Значит, A — Ω -группа. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\varphi(A)} \in f(A)$, то есть $f(A) \neq \emptyset$. Тогда существует $i \in I$ такое, что $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}_i)$ и $G^{\varphi(A)} \in f_i(A)$. Так как

$$G/G^{\varphi(A)} \in \varphi(A) \subseteq \psi'_2(A) = \mathfrak{G}_A \mathfrak{G}_{A'},$$

то $O^{A, A'}(G) \subseteq G^{\varphi(A)}$. Нетрудно показать, что $O^{A, A'}(G) = O^A(G)$. Таким образом, $O^A(G) \in f_i(A) \subseteq \mathfrak{F}_i$. Тогда по лемме 12 из [5] $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Значит, существует $i \in I$ такое, что

$G \in \mathfrak{F}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$. Тогда для любой $B \in \Omega \cap K(G) \subseteq \Omega \cap K(\mathfrak{F}_i)$ и по построению $G^{\varphi(B)} \in f_i(B) = f(B)$. Кроме того, из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Таким образом, $G \in \Omega R(f, \varphi) = \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и из доказанного выше $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — система непустых n -кратно ΩR -классов Фиттинга с r -направлением φ , причем $\varphi \leq \psi'_2$; $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых $i \neq j$, $i, j \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ также является n -кратно ΩR -классом Фиттинга с тем же направлением φ .

Доказательство проводится индукцией по n с применением леммы 4 и леммы 11 из [7].

Следствие 1. Если $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторой системы непустых классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, то $\mathfrak{F}$ является n -кратно ΩFr -классом Фиттинга тогда и только тогда, когда каждый $\mathfrak{F}_i$ — n -кратно ΩFr -класс Фиттинга.

Следствие 2. Если $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторой системы непустых классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, то $\mathfrak{F}$ является n -кратно ΩB -классом Фиттинга тогда и только тогда, когда каждый $\mathfrak{F}_i$ — n -кратно ΩB -класс Фиттинга.

Следствие 3. Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторой системы непустых классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$. Если каждый $\mathfrak{F}_i$ является n -кратно ΩK -классом Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ также является n -кратно ΩK -классом Фиттинга.

Совокупность всех n -кратно Ω -биканонических классов Фиттинга обозначим b_Ω^n . Пересечение всех n -кратно Ω -биканонических классов Фиттинга, содержащих непустое множество групп $\mathfrak{X}$, обозначим $b_\Omega^n \text{ fit } \mathfrak{X}$ и назовем n -кратно Ω -биканоническим классом Фиттинга, порожденным $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $b_\Omega^n \text{ fit } \{G\}$ будем писать $b_\Omega^n \text{ fit } G$ и класс Фиттинга такого вида назовем однопорожденным n -кратно Ω -биканоническим классом Фиттинга.

Лемма 6. Пусть простая группа $A \in b_\Omega^n \text{ fit } \mathfrak{X}$. Тогда $A \cong H/K$, где $H/K \in K(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть $n = 0$. Тогда $b_\Omega^0 \text{ fit } \mathfrak{X} = \text{fit } \mathfrak{X}$, а поскольку $K(\text{fit } \mathfrak{X}) = K(\mathfrak{X})$, утверждение леммы в данном случае выполняется.

Пусть $n > 0$ и при $n - 1$ лемма верна. Пусть $\mathfrak{F} = b_\Omega^n \text{ fit } \mathfrak{X}$ и f — минимальный b_Ω^{n-1} -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Предположим, что A — Ω' -группа. Тогда, учитывая строение спутника f (см. теорему 1 в [8]), находим, что

$$A = O^\Omega(A) \in f(\Omega') = b_\Omega^{n-1} \text{ fit}(O^\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}).$$

По индукции получаем, что $A \cong H/K$, где $H/K \in K(T)$ для некоторой группы $T \in (O^\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$. Поскольку

$$K((O^\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})) \subseteq K(\text{fit } \mathfrak{X}) = K(\mathfrak{X}),$$

то $A \in K(\mathfrak{X})$.

Пусть A — Ω -группа. Предположим, что $A \notin K(\mathfrak{X})$, то есть $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$. Тогда $O^{A, A'}(A) = 1 \in f(A) = \emptyset$, если A — абелева группа, $O^{A'}(A) = A \in f(A) = \emptyset$, если A — неабелева группа. Получаем противоречие. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный n -кратно ΩB -класс Фиттинга. Тогда через $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F})$ обозначим решетку всех его n -кратно ΩB -подклассов Фиттинга.

Лемма 7. Пусть $\mathfrak{F} = b_{\Omega}^n \text{fit } G$ — однопорожденный n -кратно ΩB -класс Фиттинга. Тогда решетка $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F})$ имеет лишь конечное число атомов.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = b_{\Omega}^n \text{fit } A$, где A — простая группа из $\mathfrak{M}$. По лемме 6 $A \in K(G)$. Так как G — конечная группа, у нее имеется конечное число композиционных факторов, и значит, в решетке $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F})$ конечное число атомов.

Лемма 8. Пусть $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ — некоторый набор атомов решетки b_{Ω}^n и

$$\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{M}_i.$$

Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ принадлежит решетке b_{Ω}^n и если $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ — произвольный неединичный n -кратно ΩB -подкласс Фиттинга в $\mathfrak{F}$, то в множестве $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ найдется такое подмножество $\{\mathfrak{M}_j \mid j \in J\}$, что $\mathfrak{M} = \bigotimes_{j \in J} \mathfrak{M}_j$.

Доказательство. Первое утверждение леммы непосредственно вытекает из следствия 2.

По лемме 1 из [2] $\mathfrak{M} = \bigotimes_{i \in I} (\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M})$. Поскольку $\mathfrak{M}_i$ — атом решетки b_{Ω}^n , справедливо включение $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M} \in \{(1), \mathfrak{M}_i\}$.

Пусть J — такое подмножество в I , что $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_j$. Тогда $\mathfrak{M} = \bigotimes_{j \in J} \mathfrak{M}_j$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичный n -кратно ΩB -класс Фиттинга. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) решетка $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F})$ булева;
- (2) $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F})$;
- (3) в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый подкласс Фиттинга, являющийся атомом решетки $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть выполняется условие (3). Покажем справедливость условия (2). Для начала рассмотрим любой однопорожденный n -кратно ΩB -подкласс Фиттинга $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 7 в решетке $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F}_1)$ имеется лишь конечное число атомов. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный атом этой решетки. Тогда, согласно условию (3), в $\mathfrak{F}$ найдется такой подкласс Фиттинга $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\Omega B}^0 \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 3 из [2] $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$. Тогда по лемме 1 из [2]

$$\mathfrak{F}_1 = (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}) \otimes (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{M} \otimes (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H}).$$

Отсюда по следствию 2 $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H}$ — n -кратно ΩB -класс Фиттинга. Так как в решетке $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$ число атомов меньше, чем в $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F}_1)$, по индукции получаем, что

$$\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{M}_t,$$

где $\mathfrak{M}_i$ — атом решетки $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$. Тогда по лемме 2 из [2]

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{M}_t,$$

где $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_t\}$ — набор всех атомов решетки $B_{\Omega}^n(\mathfrak{F}_1)$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{G} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Тогда по следствию 2 $\mathfrak{G}$ — n -кратно ΩB -класс Фиттинга. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. Допустим $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$ и $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{G}$. Тогда

$$\mathfrak{F}_1 = b_\Omega^n \text{ fit } G \subseteq \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{M}_t,$$

где $\{\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_t\}$ — набор всех атомов решетки $B_\Omega^n(\mathfrak{F}_1)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}$. Получаем противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

Покажем, что из (2) вытекает (1). Прежде всего установим, что $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$ является решеткой с дополнениями. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный n -кратно ΩB -подкласс Фиттинга из $\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 8 существует такой набор $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I_1\}$ атомов решетки $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$, что $\mathfrak{M} = \bigotimes_{i \in I_1} \mathfrak{F}_i$. Пусть $I_2 = I \setminus I_1$ и $\mathfrak{G} = \bigotimes_{i \in I_2} \mathfrak{F}_i$. Покажем, что $\mathfrak{G}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$. Очевидно, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\Omega B}^n \mathfrak{G}$. Допустим, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G} \neq (1)$ и $\mathfrak{L}$ — подкласс Фиттинга в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}$, являющийся атомом решетки $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$. Тогда существует такое $i \in I$, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}_i$. Так как $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, по лемме 8 $\mathfrak{L}$ входит только в один из классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{G}$. Получаем противоречие. Значит, $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями.

Покажем, что $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$ — дистрибутивная решетка. Пусть $\mathfrak{M}, \mathfrak{G}, \mathfrak{L}$ — произвольные n -кратно ΩB -подклассы Фиттинга из $\mathfrak{F}$. Применяя лемму 12 из [7], можно проверить включение

$$(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}) \vee_{\Omega B}^n (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{L} \vee_{\Omega B}^n \mathfrak{G}).$$

Предположим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из разности

$$\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{L} \vee_{\Omega B}^n \mathfrak{G}) \setminus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}) \vee_{\Omega B}^n (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}).$$

Тогда G — комонотитическая группа. Так как $G \in \mathfrak{M}$, существует $i \in I$ такое, что $G \in \mathfrak{F}_i$. Так как $\mathfrak{F}_i$ — атом решетки $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$, то

$$\mathfrak{F}_i = b_\Omega^n \text{ fit } G \subseteq \mathfrak{L} \vee_{\Omega B}^n \mathfrak{G}.$$

Тогда в силу условия (2) и леммы 8 $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{L}$ или $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{G}$, то есть $G \in \mathfrak{L} \cup \mathfrak{G}$. Получаем противоречие. Таким образом, решетка $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$ дистрибутивна и из доказанного выше следует, что она является булевой.

Пусть выполнено (1). Покажем справедливость условия (3). При $n = 0$ получается тривиальное утверждение. Пусть $n \geq 1$ и $\mathfrak{M}$ — атом решетки $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$. Ввиду того, что $B_\Omega^n(\mathfrak{F})$ — решетка с дополнениями, существует n -кратно ΩB -подкласс Фиттинга $\mathfrak{G}$ из $\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\Omega B}^n \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G} = (1)$. Пусть

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \vee_{\Omega B}^0 \mathfrak{G} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{G}.$$

Включение $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Для доказательства обратного включения достаточно применить следствие 2. В результате получаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ дополняем в $\mathfrak{F}$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Скиба А. Н., *Алгебра формаций*. Беларуская навука, Минск, 1997.
2. Воробьев Н. Н., Булевы решетки n -кратно ω -локальных классов Фиттинга. Препринт №71, ГГУ, Гомель, 1997.
3. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп*. Наука, Москва, 1978.
4. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., *Формации алгебраических систем*. Наука, Москва, 1989.
5. Vedernikov V. A., Maximal satellites of Ω -foliated formations and Fitting classes. *Proc. Steklov Inst. Math.* (2001) №2, 217–233.
6. Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groups*. De Gruyter, Berlin, 1992.
7. Ведерников В. А., Сорокина М. М., Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискретная математика* (2001) 13, №3, 125–144.
8. Сорокина М. М., О минимальных спутниках кратно Ω -расслоенных классов Фиттинга и формаций конечных групп. В кн.: *Брянск. гос. пед. университету 70 лет. Сб. науч. трудов*. БГПУ, Брянск, 2000, с. 199–203.

Статья поступила 27.11.01.

Переработанный вариант поступил 12.02.02.