Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Безверхняя, Гиперболичность некоторых 2-
порожденных групп с одним определяющим соотношением,
Дискрет. матем., 2002, том 14, выпуск 3, 54–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm254>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:02:31

УДК 519.4

Гиперболичность некоторых 2-порожденных групп с одним определяющим соотношением

© 2002 г. Н. Б. Безверхняя

В статье дается описание словарно гиперболических групп, которые имеют представление

$$\langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = w(a, b) \rangle.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 00-01-00767.

Пусть $G\langle A; R \rangle$ — конечнопредставленная группа, слово W в алфавите $A^{\pm 1}$ равно единице в группе G тогда и только тогда, когда

$$W = \prod_{i=1}^n S_i R_i^{\pm 1} S_i^{-1} \quad (1)$$

в свободной группе $F = F(A)$, где $S_i \in F$ и $R_i \in R$.

Группа G называется (словарно) гиперболической, если существует функция $n = n(W)$, ограничивающая минимальное число сомножителей в (1), линейно зависящая от длины W .

Вопрос об определении класса гиперболических групп среди всех групп с одним определяющим соотношением является весьма важным, так как гиперболические группы обладают рядом свойств таких, как разрешимость проблемы сопряженности слов [1], обобщенной сопряженности слов [2], SQ -универсальности [3], разрешимости квадратичных уравнений [1, 2]. В [4] выделен некоторый подкласс гиперболических групп с одним определяющим соотношением. И. Капович в [5] доказал гиперболичность групп

$$G = \langle a, t; t^2at^{-1}ata^2t^{-2}a^{-1} = 1 \rangle.$$

Автором из множества групп с одним определяющим соотношением выделен подкласс гиперболических групп, не совпадающий с подклассом гиперболических групп из [4] и содержащий группу Каповича. Автор рассматривает 2-порожденные группы с одним определяющим соотношением, заданные как HNN-расширение некоторой свободной группы ранга 2.

Определим следующие понятия. Пусть

$$G^* = \langle G, t; t^{-1}\alpha_{-1}(c)t = \alpha_1(c), c \in C \rangle \quad (2)$$

— HNN-расширение группы G , соответствующее мономорфизмам $\alpha_{-1}, \alpha_1: C \rightarrow G$ для некоторой группы C .

Определение 1 ([5]). Аннулятором длины $2M + 1$ в (2) будем называть пару $\Sigma = (\bar{p}, \bar{c})$, где

$$\bar{p} = (t^{\varepsilon-M}, h_{-M}, t^{\varepsilon-M+1}, h_{-M+1}, \dots, t^{\varepsilon_0}, h_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_{M-1}}, h_{M-1}, t^{\varepsilon_M}),$$

все h_i для $i \in \{-M, \dots, M-1\}$ принадлежат группе G , $\varepsilon_i = \pm 1$,

$$\bar{c} = (c_{-M}, c_{-M+1}, \dots, c_0, c_1, \dots, c_M),$$

все $c_i \in C$ для $i \in \{-M, \dots, M\}$, причем пара $\Sigma(\bar{p}, \bar{c})$ должна удовлетворять следующему условию: для любого $i \in \{-M, \dots, M-1\}$

$$h_i^{-1} \alpha_{\varepsilon_i}(c_i) h_i = \alpha_{-\varepsilon_{i+1}}(c_{i+1}),$$

то есть

$$(p)^{-1} \alpha_{-\varepsilon_{-M}}(c_{-M}) p = \alpha_{\varepsilon_M}(c_M), \quad (3)$$

где

$$p = (t^{\varepsilon-M} h_{-M} t^{\varepsilon-M+1} h_{-M+1} \dots t^{\varepsilon_0} h_0 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_{M-1}} h_{M-1} t^{\varepsilon_M}).$$

Аннулятор Σ называется существенным, если $\bar{p}$ не содержит подпоследовательностей вида $t^{-1}, \alpha_{-1}(c), t$ или $t, \alpha_1(c), t^{-1}$.

Определение 2 ([5]). Пусть G^* имеет копредставление (2), G и C — конечнопорожденные группы. Обозначим l_C, l_G и l_{G^*} — функции длины соответственно в группах C, G и G^* .

Пусть $\Sigma = (\bar{p}, \bar{c})$ — аннулятор длины $2M + 1$, тогда $l_C(c_0)$ будем называть обхватом аннулятора, а $\max_{-M \leq i \leq M-1} (l_G(h_i))$ его шириной.

Если существует действительное число $\lambda > 1$ такое, что

$$\lambda l_C(c_0) < \max(l_C(c_{-M}), l_C(c_M)),$$

то аннулятор называется λ -гиперболическим.

Определение 3 ([5]). Пусть G — конечнопорожденная группа, X — конечное множество ее образующих и l_X — словарная функция длины в G . Пусть H — конечнопорожденная подгруппа группы G и Y — множество образующих группы H и l_Y — словарная функция длины в H . Будем говорить, что H квазивыпукла в G , если существует $c > 0$ такое, что для любого $h \in H$

$$\frac{1}{c} l_X(h) \leq l_Y(h) \leq c l_X(h).$$

В дальнейшем при доказательстве используется комбинаторная теорема Бествины [6, 7].

Теорема 1 ([6, 7]). Пусть G — гиперболическая конечнопорожденная группа, и пусть $\alpha_{-1}, \alpha_1: C \rightarrow G$ — мономорфизмы такие, что подгруппы $\alpha_{-1}(C), \alpha_1(C)$ квазивыпуклы в G , G^* — HNN-расширение G ,

$$C^* = \langle G, t; t^{-1} \alpha_{-1}(c) t = \alpha_1(c), c \in C \rangle.$$

Если существует действительное число $\lambda > 1$ и целое $M > 0$ такие, что для произвольного $\rho > 0$ существует $H(\rho)$ такое, что всякий существенный аннулятор длины $2M + 1$ с шириной не более ρ и обхватом не менее $H(\rho)$ является λ -гиперболическим, тогда G^* — гиперболическая группа.

Теорема 2 ([8]). Пусть

$$G^* = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = w \rangle$$

— HNN-расширение свободной группы $G = \langle a, b \rangle$. Группа G^* является гиперболической, если

$$\begin{aligned} w &\neq axb^{k_1}x^{-1}a^{-1}, \\ w &\neq axa^{k_2}x^{-1}a^{-1}, \\ w &\neq a^\varepsilon x(a^\mu b^\delta)^p x^{-1}a^{-\varepsilon}b^{-\delta\mu}, \end{aligned}$$

$\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, $p \in \mathbb{N}$ и $w \neq a^m b^n$, где либо $|m| = 1$, либо $|m| = |n| \pm 1$.

Теорема 3. Пусть

$$G^* = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = w \rangle$$

— HNN-расширение свободной группы $G = \langle a, b \rangle$, тогда G^* не является гиперболической, если либо $w = axb^{k_1}x^{-1}a^{-1}$, либо $w = axa^{k_2}x^{-1}a^{-1}$, либо

$$w = a^\varepsilon x(a^\mu b^\delta)^p x^{-1}a^{-\varepsilon}b^{-\delta\mu}, \quad \delta = \pm 1, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad p \in \mathbb{N},$$

либо $w = a^m b^n$, где или $|m| = 1$, или $|m| = |n| \pm 1$.

Доказательство теоремы 2. Предварительно рассмотрим ряд вспомогательных результатов.

Определение 4 ([9]). Подгруппа H группы G антинормальна в G , если для любого $g \in G \setminus H$

$$g^{-1}Hg \cap H = E,$$

где E — единичная подгруппа.

Лемма 1 ([5]). Пусть

$$G^* = \langle G, t; t^{-1}\alpha_{-1}(c)t = \alpha_1(c), c \in C \rangle$$

и $\alpha_{-1}(C)$, $\alpha_1(C)$ антинормальны в G , тогда не существует аннулятора $\Sigma = (\bar{p}, \bar{c})$ такого, что $\bar{p}$ содержит подпоследовательность вида $t^\varepsilon h, t^{-\varepsilon}$, где $\varepsilon = \pm 1$, $h \in G$, то есть всякий существенный аннулятор однонаправлен.

Пусть f — слово свободной группы F , обозначим f^* его произвольную циклическую перестановку.

Лемма 2 ([10]). Пусть $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ — свободная группа, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — ее свободные образующие, $H = \langle a_1, \dots, a_k, f(a_1, \dots, a_n) \rangle$ — собственная подгруппа группы F такая, что $k < n$ и $f^* \notin \langle a_1, \dots, a_k \rangle$. Тогда, если c минимален в HcH , $HcH \neq HH$ и $cHc^{-1} \cap H \neq E$, то $cHc^{-1} \cap H$ — циклическая подгруппа.

Следствие 1 ([10]). Пусть $H = \langle b, w \rangle$ — собственная подгруппа ранга 2 группы $\langle a, b \rangle$. Если для $h \in \langle a, b \rangle$, минимального в HhH , $HhH \neq HH$, $hHh^{-1} \cap H$ — циклическая подгруппа, то либо $w = v^p$ для некоторого $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $hHh^{-1} \cap H = \langle v^p \rangle$ и $h v^p h^{-1} = v^p$, либо существует такое $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, что $wb^k = v^p$, $hHh^{-1} \cap H = \langle v^p \rangle$ и $h(wb^k)^s h^{-1} = (b^k w)^s$, либо $h(wb^k)^s h^{-1} = (wb^k)^s$, $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Лемма 3. Пусть $F_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ — свободная группа,

$$H = \langle a_1, \dots, a_k, f(a_1, \dots, a_n) \rangle, \quad k < n,$$

— подгруппа группы F_n , $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \notin \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ и $f = sf_0s^{-1}$, где $f_0 \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $s = a_v^{\varepsilon_1} s_0 a_\mu^{\varepsilon_2}$, $v, \mu \notin \{1, \dots, k\}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$.

Тогда

$$sHs^{-1} \cap H = \langle f \rangle, \quad s^{-1}Hs \cap H = \langle f_0 \rangle.$$

Лемма 4. Пусть $F_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ — свободная группа,

$$H = \langle a_1, \dots, a_k, f(a_1, \dots, a_n) \rangle, \quad k < n,$$

— подгруппа группы F_n , $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \notin \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ и $f = s^{-1}f_0^p s$, где $s = a_v^{\varepsilon_1} s_0 a_\mu^{\varepsilon_2}$, $v, \mu \notin \{1, \dots, k\}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i \in \{1, 2\}$, $|p| > 1$ и $f_0 \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$.

Тогда

$$(s^{-1}f_0^{-l}s)H(s^{-1}f_0^l s) \cap H = \langle f \rangle,$$

где $l \in \{1, \dots, p-1\}$.

Лемма 5. Пусть $F_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ — свободная группа,

$$H = \langle a_1, \dots, a_k, f(a_1, \dots, a_n) \rangle, \quad k < n,$$

— подгруппа группы F_n , $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \notin \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ и $f = sf_0^p s^{-1}$, где $f_0 \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $s = a_v^{\varepsilon_1} s_0 a_\mu^{\varepsilon_2}$, $v, \mu \notin \{1, \dots, k\}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i \in \{1, 2\}$, $|p| > 1$ и пусть $z \in F_n$ такой, что z — минимален в $H z H$, $H z H \neq H H$ и $z \neq s^{\pm 1}$, $z \neq s^{-1}f_0^l s$ при $|p| > 1$, тогда $z^{-1}H z \cap H = E$.

Доказательства лемм 3–5 проводятся непосредственным вычислением.

Лемма 6. Пусть $F_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ — свободная группа,

$$H = \langle a_1, \dots, a_k, f(a_1, \dots, a_n) \rangle, \quad k < n,$$

— подгруппа группы F_n , $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \notin \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $f = f_0 v$, где $f_0 = a_v^{\varepsilon_1} \tilde{f}_0 a_\mu^{\varepsilon_2}$, $v, \mu \notin \{1, \dots, k\}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i \in \{1, 2\}$, и $v \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$. Пусть для некоторого $z \in F_n$, минимального в $H z H$ и удовлетворяющего условию $H z H \neq H H$, и для некоторого $w_0 \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, справедливо включение $z^{-1}w_0 z \in H$, тогда $z^{-1}w_0 z = f_0^p$ и $f_0 \equiv s^{-1}\tilde{f}_0 s$, где $\tilde{f}_0 \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $s = a_{v_1}^{\varepsilon_1} s_0 a_{\mu_1}^{\varepsilon_2}$, где $v_1, \mu_1 \notin \{1, \dots, k\}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i \in \{1, 2\}$.

Доказательство очевидно.

Следствие 2. Пусть $F_2 = \langle a, b \rangle$ — свободная группа ранга 2, $H = \langle b, f \rangle$ — подгруппа группы F_2 , $f \notin \langle b \rangle$, $f = a^\varepsilon f_0 a^r b^k$, $\varepsilon, r \in \{\pm 1\}$. Пусть для некоторого z , минимального в $H z H$ и удовлетворяющего условию $H z H \neq H H$, и некоторого b^p справедливо включение $z^{-1}b^p z \in H$, тогда $z^{-1}b^p z = (a^\varepsilon f_0 a^r)^s$, где $a^\varepsilon f_0 a^r \equiv a^\varepsilon x b^p x^{-1} a^{-\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$, $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Лемма 7. Пусть $F_2 = \langle a, b \rangle$ — свободная группа ранга 2, $H = \langle b, f \rangle$ — подгруппа группы F_2 , $f = a^{\varepsilon_1} f_0 a^{\varepsilon_2}$, $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $f \in \langle b \rangle$, и пусть $w = (b^k a^\mu)^r$, $k \neq 0$, $\mu \neq 0$, $r \neq 0$. Пусть z минимален в $H z H$, $H z H \neq H H$.

Тогда

- если $w^* \notin H$, но $z^{-1}w^*z \in H$, то $z^{-1}w^*z = f^q$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- если существует циклическая перестановка w^* слова w такая, что $w^* \in H$, то $w^* \equiv f^s$, либо $w^* = (fb^k)^s$, либо $w^* = (b^kf)^s$, $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Доказательство очевидно.

Следствие 3. Пусть F_2 и H такие, как в лемме 7, и $w = a^\mu$. Тогда, если $a^\mu \in H$, то $a^\mu = f^s$, если $a^\mu \notin H$ и z минимально в $H z H$, $H z H \neq H H$ и $z^{-1}a^\mu z \in H$, то $z^{-1}a^\mu z = f^s$, $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Лемма 8. Пусть $H = \langle b, w \rangle$, где

$$\begin{aligned} w &\neq axb^{k_1}x^{-1}a^{-1}, \\ w &\neq axa^{k_2}x^{-1}a^{-1}, \\ w &\neq a^\varepsilon x(a^\mu b)^{\pm p}x^{-1}a^{-\varepsilon}b^{-\mu}, \\ w &\neq a^\varepsilon x(a^\mu b^{-1})^{\pm p}x^{-1}a^{-\varepsilon}b^\mu. \end{aligned}$$

Тогда всякий аннулятор длины, большей 3, однонаправлен.

Доказательство. Так как $\alpha_{-1}(C) = G$, то если неоднаправленный аннулятор существует, то он имеет вид $\Sigma = (\bar{p}, \bar{c})$, где

$$\bar{p} = (t, \dots, h_{i-1}, t, h_i, t^{-1}, h_{i+1}, \dots, t^{-1}).$$

Согласно леммам 2–5, группа H не антинормальна, если $w = v^p$, либо $w b^k = v^p$, $|p| > 1$, поэтому рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $w = v^p$.

Предположим, что неоднаправленный аннулятор существует, но тогда он обязан удовлетворять соотношению (3) и, следовательно, должно выполняться условие

$$h_i^{-1}\alpha_{-1}(c_i)h_i = \alpha_1(c_{i+1}) \in H.$$

По следствию 1 оно выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_{-1}(c_i) = (v^p)^s, \quad \alpha_1(c_{i+1}) = (v^p)^s.$$

Далее, чтобы аннулятор произвольной длины удовлетворял условию (3), должно выполняться соотношение

$$h_{i+1}^{-1}t(v^p)^s t^{-1}h_{i+1} = h_{i+1}^{-1}b^s h_{i+1} \in H.$$

Если $h_{i+1} \notin H$, то, выбирая h_{i+1} минимальным в $H h_{i+1} H$, по следствию 2 получаем, что

$$w = a^\varepsilon x b^{k_1} x^{-1} a^{-\varepsilon}$$

и в этом случае существует неоднаправленный аннулятор любой длины. Пусть

$$w \neq a^\varepsilon x b^{k_1} x^{-1} a^{-\varepsilon}$$

и $h_{i+1} \in H$. Для неоднаправленного аннулятора произвольной длины должно выполняться условие

$$h_{i+2}^{-1}t h_{i+1}^{-1}b^s h_{i+1} t^{-1} h_{i+2} = h_{i+2}^{-1}(h'_{i+1})^{-1}a^s h'_{i+1} h_{i+2} \in H, \quad (4)$$

где $h'_{i+1} = th_{i+1}t^{-1}$. По следствию 3 условие (4) справедливо тогда и только тогда, когда

$$w = a^\varepsilon x a^{k_2} x^{-1} a^{-\varepsilon}.$$

В этом случае может существовать неоднаправленный аннулятор любой длины. Если

$$w \neq a^\varepsilon x a^{k_2} x^{-1} a^{-\varepsilon}$$

или

$$w \neq a^\varepsilon x b^{k_1} x^{-1} a^{-\varepsilon},$$

то предполагаемый аннулятор любой длины должен иметь вид

$$\Sigma_j = (\bar{p}_j, \bar{c}_j), \quad j \in \{1, 2\},$$

где $p_1 = (t, \dots, t, h_i, t^{-1}, h_{i+1}, t^{-1})$ и $p_2 = (t, \dots, t, h_i, t^{-1})$. С другой стороны, если аннуляторы $\Sigma_1 = (\bar{p}_1, \bar{c}_1)$ и $\Sigma_2 = (\bar{p}_2, \bar{c}_2)$ существуют, то существуют и обратные к ним аннуляторы $\Sigma_1^{-1} = (\bar{p}_1^{-1}, \bar{c}_1^{-1})$ и $\Sigma_2^{-1} = (\bar{p}_2^{-1}, \bar{c}_2^{-1})$, где

$$\bar{p}_1^{-1} = (t, h_{i+1}^{-1}, t, h_i^{-1}, t^{-1}, \dots, t^{-1}), \quad \bar{p}_2^{-1} = (t, h_i^{-1}, t^{-1}, \dots, t^{-1}).$$

Из вышеприведенных рассуждений следует, что число отрицательных t в векторе $\bar{p}$ не может быть более двух, поэтому все неоднаправленные аннуляторы исчерпываются множеством

$$\{\Sigma_1 = (\bar{p}_1, \bar{c}_1), \quad \Sigma_2 = (\bar{p}_2, \bar{c}_2)\},$$

где

$$\bar{p}_1 = (t, h_{-1}, t^{-1}, h_0, t^{-1}), \quad \bar{p}_2 = \bar{p}_1^{-1}.$$

Следовательно, кроме случаев, исключенных условием леммы, все аннуляторы длины более трех являются одинаправленными.

2. Пусть $wb^{\pm k} = v^p$, $k \in \mathbb{N}$, где $w = a^\varepsilon w_0 b^\mu$ и $(a^\varepsilon w_0)^* \notin \langle b \rangle$.

Рассмотрим подслучай $wb^k = v^p$.

Если предположить, что неоднаправленный аннулятор существует, то, рассуждая аналогично вышеописанному, получаем, что должно выполняться равенство

$$h_i^{-1}(wb^k)^s h_i = (wb^k)^s$$

с точностью до сопряжения элементом b^k (см. следствие 1).

Выясним теперь, в каких случаях

$$h_{i+1}^{-1}t(wb^k)^s t^{-1}h_{i+1} = h_{i+1}^{-1}(ba^k)^s h_{i+1} \in H.$$

Если любая циклическая перестановка $((ba^k)^s)^* \notin H$, но вместе с тем

$$h_{i+1}^{-1}(ba^k)^s h_{i+1} \in H,$$

где h_{i+1} минимально в $Hh_{i+1}H$ и $Hh_{i+1}H \neq HH$, то согласно первому утверждению леммы 7

$$h_{i+1}^{-1}((ba^k)^s)^* h_{i+1} = (wb^k)^s,$$

то есть, когда $w = ax(a^k b)^s x^{-1} a^{-1} b^{-k}$, либо $w = ax(a^{-k} b^{-1})^s x^{-1} a^{-1} b^{-k}$, аннулятор произвольной длины может быть неоднаправленным. Если существует циклическая перестановка $((ba^k)^s)^* \in H$, то согласно второму утверждению леммы 7 $w = (a^k b)^s b^{-k}$, либо

$w = (a^{-k}b^{-1})^s b^{-k}$. Во всех остальных случаях всякий аннулятор длины более трех может быть только однонаправленным.

В подслучае $wb^{-k} = v^p$ аналогично предыдущему подслучаю получаем, что неоднаправленный аннулятор любой длины существует лишь тогда, когда либо $w = ax(a^{-k}b)^s x^{-1}a^{-1}b^k$, либо $w = ax(a^k b^{-1})^s x^{-1}a^{-1}b^k$.

3. В тех случаях, когда $w = aw_0 b^k$, группа H порождается множеством $\langle b, aw_0 \rangle$. Поэтому случаи, когда никакая циклическая перестановка $(aw_0)^*$ не принадлежит $\langle b \rangle$ относятся к вышеописанным. Рассмотрим случай, когда существует циклическая перестановка $(aw_0)^* \in \langle b \rangle$. Это возможно, если $w = axb^{k_1}x^{-1}a^{-1}$, либо $w = axb^{k'}x^{-1}a^{-1}b^k$. Предположим, что неоднаправленный аннулятор любой длины существует, тогда он обязан удовлетворять соотношению (3), то есть должно выполняться условие

$$h_i^{-1}\alpha_{-1}(c_i)h_i = \alpha_1(c_{i+1}) \in H. \quad (5)$$

В этом соотношении h_i выбираем минимальным в Hh_iH и $HH \neq Hh_iH$. В силу леммы 5, если $h_i \neq (ax)^{\pm 1}$ и $h_i \neq axb^l x^{-1}a^{-1}$, где $l \in \{1, \dots, k' - 1\}$, то

$$h_i^{-1}Hh_i \cap H = E$$

и равенство (5) невозможно.

Пусть $h_i = ax$, тогда по лемме 3 $\alpha_1(c_{i+1}) \in \langle b^{k'} \rangle$, то есть $\alpha_1(c_{i+1}) = b^{k's}$. Далее необходимо выполнение условия

$$h_{i+1}^{-1}tb^{k's}t^{-1}h_{i+1} \in H,$$

то есть $h_{i+1}^{-1}a^{k's}h_{i+1} \in H$, что невозможно (см. леммы 3–5).

Пусть $h_i = axb^l x^{-1}a^{-1}$, либо $h_i = (ax)^{-1}$. Тогда по лемме 4

$$\alpha_1(c_{i+1}) = ax(b^{k'})^s x^{-1}a^{-1}.$$

Далее, необходимо выполнение условия

$$h_{i+1}^{-1}tax(b^{k'})^s x^{-1}a^{-1}th_{i+1} = h_{i+1}^{-1}(ba^{-k})^s h_{i+1}.$$

Так как любая циклическая перестановка $((ba^{-k})^s)^* \notin \langle b, axb^{k'}x^{-1}a^{-1} \rangle$, в силу первого утверждения леммы 7

$$h_{i+1}^{-1}(ba^{-k})^s h_{i+1} = (axb^{k'}x^{-1}a^{-1})^{s_1},$$

чего не может быть, так как число вхождений a в левую часть равенства отлично от нуля, а в правую часть равенства равно нулю.

Таким образом, в этом случае всякий аннулятор длины более трех является однонаправленным.

Лемма доказана.

Продолжая доказательство теоремы 2, заметим, что группа $G = \langle a, b \rangle$ гиперболична как свободная группа ранга 2, подгруппы $\alpha_{-1}(C)$, $\alpha_1(C)$ квазивыпуклы в G как подгруппы свободной группы. Теперь достаточно показать, что всякий существенный однонаправленный аннулятор длины k , $k \in \mathbb{N}$, с шириной, не большей ρ , и обхватом, не меньшим $H(\rho)$, является λ -гиперболическим.

Рассмотрим следующие три возможности.

1. Пусть $G = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = aw_0a \rangle$.

Положим

$$C = G = \langle a, b \rangle, \quad \alpha_{-1}(C) = C, \quad \alpha_1(C) = \langle b, w \rangle,$$

причем

$$\alpha_{-1}(a) = a, \quad \alpha_{-1}(b) = b, \quad \alpha_1(a) = b, \quad \alpha_1(b) = w.$$

Пусть φ — эндоморфизм $\langle a, b \rangle \rightarrow \langle b, w \rangle$ такой, что $\varphi(a) = b, \varphi(b) = w$.

Пусть f — свободноприведенное слово из $\langle a, b \rangle$. Так как $w^{\pm 1}$ начинается и заканчивается соответственно символом $a^{\pm 1}$, то $\varphi^k(f)$ — тоже свободноприведенное слово, кроме того, верны неравенства

$$l(\varphi^2(f)) \geq l(w)l(f), \quad l(\varphi(f)) \leq l(w)l(f). \quad (6)$$

Заметим, что $l_G(f) = l_C(f)$, так как $G = C$. Положим $\lambda = 3/2$, $H(\rho) = 8\rho l(w)$. Можем считать, что если $\Sigma = (\bar{p}, \bar{c})$, то

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (t, h_{-2}, t, h_{-1}, t, h_0, t, h_1, t), & h_i &\in \langle a, b \rangle, & i &\in \{-2, \dots, 1\}, \\ \bar{c} &= (c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2), & c_i &\in C, & i &\in \{-2, \dots, 2\}. \end{aligned}$$

В силу выбора Σ

$$l(c_0) \geq H(\rho) = 8\rho l(w), \quad l(h_i) \leq \rho, \quad i \in \{-2, \dots, 1\}.$$

По определению аннулятора $h_{-1}^{-1}\varphi(c_1)h_1 = c_2$. Следовательно,

$$l(c_2) \geq l(\varphi(c_1)) - 2l(h_1) \geq l(\varphi(c_1)) - 2\rho.$$

По определению аннулятора

$$h_0^{-1}\varphi(c_0)h_0 = c_1.$$

Действуя на обе части равенства эндоморфизмом φ , получаем, что

$$\varphi(h_0^{-1})\varphi^2(c_0)\varphi(h_0) = \varphi(c_1).$$

Отсюда,

$$l(\varphi(c_1)) \geq l(\varphi^2(c_0)) - 2l(\varphi(h_0)).$$

Из (6) следует, что

$$2l(\varphi(h_0)) \leq 2l(w)l(h_0) \leq 2l(w)\rho,$$

поэтому

$$l(\varphi(c_1)) \geq l(\varphi^2(c_0)) - 2l(w)\rho.$$

Используя еще раз соотношение (6), получаем, что

$$l(\varphi^2(c_0)) \geq l(w)l(c_0),$$

поэтому

$$l(c_2) \geq l(w)l(c_0) - 2(l(w) + 1)\rho,$$

и так как $l(w) > 2$, то

$$l(c_2) \geq (3/2)l(c_0) + (l(w) - 3/2)l(c_0) - 2(l(w) + 1)\rho.$$

Из соотношений $l(w) > 2$ и $l(c_0) \geq H(\rho) = 8\rho l(w)$ получаем, что

$$\begin{aligned} l(c_2) &\geq \frac{3}{2}l(c_0) + \frac{1}{2}l(c_0) - 2(l(w) + 1)\rho \\ &\geq \frac{3}{2}l(c_0) + 4l(w)\rho - 2l(w)\rho - 2\rho > \frac{3}{2}l(c_0). \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае всякий существенный аннулятор длины 5, ширины, не большей ρ , и обхвата, не меньшего $H(\rho)$, является $(3/2)$ -гиперболическим.

2. Пусть $G^* = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = axw_0x^{-1}a^{-1} \rangle$, где $x = x(a, b)$, $\|w_0\| \geq 2$.

Группа C такая же, как и в предыдущем случае, а эндоморфизм φ задается соотношениями $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = axw_0x^{-1}a^{-1}$.

Пусть f — свободноприведенное слово от $a^{\pm 1}$ и $b^{\pm 1}$. Из того, что $w^{\pm 1}$ начинается с a и заканчивается на a^{-1} следует, что в произведениях $\varphi(a)\varphi(b)$ или $\varphi(b)\varphi(a)$ нет сокращений, потому верны неравенства

$$l(\varphi^2(f)) \geq l(w_0)l(f), \quad (7)$$

$$l(\varphi(f)) \leq l(w)l(f). \quad (8)$$

Полагая $\lambda = 3/2$, $H(\rho) = 4l(w)\rho + 5\rho$, аналогично предыдущему случаю, получаем, что

$$l(c_2) \geq l(\varphi^2(c_0)) - 2l(\varphi(h_0)) - 2l(h_1) \geq l(\varphi^2(c_0)) - 2l(\varphi(h_0)) - 2\rho.$$

Используя неравенство (8), получаем, что

$$l(c_2) \geq l(\varphi^2(c_0)) - 2l(w)\rho - 2\rho.$$

Используя неравенство (7), получаем оценку

$$l(c_2) \geq l(w_0)l(c_0) - 2l(w)\rho - 2\rho.$$

Так как $\|w_0\| \geq 2$, то $l(w_0) \geq 2$. Поэтому

$$l(c_2) \geq 2l(c_0) - 2l(w)\rho - 2\rho = \frac{3}{2}l(c_0) + \frac{1}{2}l(c_0) - 2l(w)\rho - 2\rho.$$

Используя соотношение $l(c_0) \geq 4l(w)\rho + 5\rho$, получаем, что

$$l(c_2) \geq \frac{3}{2}l(c_0) + 2l(w)\rho + \frac{5}{2}\rho - 2l(w)\rho - 2\rho = \frac{3}{2}l(c_0) + \frac{1}{2}\rho,$$

то есть $l(c_2) > (3/2)l(c_0)$.

Таким образом, всякий существенный аннулятор длины 5, ширины, не большей ρ , и обхвата, не меньшего $H(\rho)$, является $(3/2)$ -гиперболическим.

3. Пусть

$$G^* = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = a^{m_1}w_0a^{m_2}b^{\mu} \rangle,$$

где $w \neq ax(a^{\mu}b^{\delta})^p x^{-1}a^{-1}b^{-\delta\mu}$, $\delta = \pm 1$ и $\|w_0\| \geq 2$, либо $w = a^m b^n$ и $|m| \geq |n| + 2$.

В качестве группы C возьмем группу, порожденную элементами a и $\tilde{c} = ba^{-\mu}$. Пусть φ — эндоморфизм вида $\varphi(a) = \tilde{c}a^{\mu}$, $\varphi(\tilde{c}) = a^{m_1}w_0a^{m_2}$.

Пусть $f(a, b)$ — свободноприведенное слово в образующих a и b группы G . Обозначим $\tau(f(a, b))$ результат переписывания слова $f(a, b)$ в образующих группы C . Тогда $\tau(a^{m_1}w_0a^{m_2})$ — слово $a^{m_1}w_0a^{m_2}$, записанное в образующих a и $\tilde{c}$.

Лемма 9. Пусть $G = \langle a, b \rangle$ — свободная группа ранга 2, f — свободноприведенное слово в алфавите $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$, и пусть v_1 и v_2 — элементы группы G такие, что в произведениях $v_1^\varepsilon v_2^\delta v_1^\nu$ и $v_2^\varepsilon v_1^\delta v_2^\nu$, где $\varepsilon, \delta, \nu = \pm 1$, слова v_2^δ и v_1^δ в соответствующих произведениях не сокращаются полностью. Тогда слово f' , полученное из f подстановкой вместо каждого $a^{\pm 1}$ слова $v_1^{\pm 1}$, вместо каждого $b^{\pm 1}$ слова $v_2^{\pm 1}$, имеет длину, не меньшую длины слова f .

Доказательство леммы очевидно.

Продолжим рассмотрение случая 3. Нетрудно показать, что слова $\tau(a^{m_1} w_0 a^{m_2})$ и $\tilde{c} a^\mu$ удовлетворяют условиям леммы 9. В противном случае выполнялось бы либо равенство $a^{m_1} w_0 a^{m_2} \equiv b^{-1} w_0$, либо $a^{m_1} w_0 a^{m_2} \equiv w_0 b$, чего не может быть.

Получаем, что

$$l(\varphi(\tau(f(a, b)))) \geq l(\tau(f(a, b))). \quad (9)$$

Равенство в соотношении (9) достигается тогда и только тогда, когда

$$\tau(a^{m_1} w_0 a^{m_2}) = a^{-\mu} \tilde{c}.$$

Рассмотрим слова $\varphi(a^{-\mu} \tilde{c}) = (\tilde{c} a^\mu)^{-\mu} a^{-\mu} \tilde{c}$ и $\varphi(\tilde{c} a^\mu) = a^{-\mu} \tilde{c} (\tilde{c} a^\mu)^\mu$. Видно, что при любых сокращениях от каждого из слов $\varphi(a^{-\mu} \tilde{c})$ и $\varphi(\tilde{c} a^\mu)$ останутся по меньшей мере по две буквы, поэтому, так как $\varphi^2(a) = \varphi(\tilde{c} a^\mu)$ и $\varphi^2(\tilde{c}) = \varphi(a^{-\mu} \tilde{c})$, для этого случая верно неравенство

$$l(\varphi^2(\tau(f))) \geq 2l(\tau(f)). \quad (10)$$

Пусть теперь (9) есть строгое неравенство. Это значит, что от какого-то из слов $\tilde{c} a^\mu$ и $\tau(a^{m_1} w_0 a^{m_2})$ при всевозможных сокращениях остались минимум две буквы, но тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} l(\varphi(\tau(f(a, b)))) &\geq (3/2)l(\tau(f(a, b))), \\ l(\varphi^2(\tau(f(a, b)))) &\geq (9/4)l(\tau(f(a, b))). \end{aligned} \quad (11)$$

Объединяя неравенства (10) и (9), получим неравенство

$$l(\varphi^2(\tau(f(a, b)))) \geq 2l(\tau(f(a, b))). \quad (12)$$

Нетрудно также убедиться в справедливости неравенства

$$l(\varphi(\tau(f(a, b)))) \leq l(w)l(\tau(f(a, b))). \quad (13)$$

Выберем $\lambda = 3/2$, $H(\rho) = 4l(w)\rho + 5\rho$. В силу выбора аннулятора $\Sigma = (\bar{p}, \bar{c})$

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (t, h_{-2}, t, h_{-1}, t, h_0, t, h_1, t), & h_i &\in \langle a, b \rangle, & i &\in \{-2, \dots, 1\}, \\ \bar{c} &= (c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2), & c_i &\in C, & i &\in \{-2, \dots, 2\}, \end{aligned}$$

причем $l(c_0) \geq H(\rho)$ и $l(h_i) \leq \rho$ для $i \in \{-2, \dots, 1\}$. По определению аннулятора $h_{-1}^{-1} \varphi(c_1) h_1 = c_2$. Следовательно,

$$l(c_2) \geq l(\varphi(c_1)) - 2l(h_1) \geq l(\varphi(c_1)) - 2\rho.$$

Аналогично, из определения аннулятора следует, что $h_0^{-1} \varphi(c_0) h_0 = c_1$. Действуя на обе части равенства эндоморфизмом φ , находим, что

$$\varphi(h_0^{-1}) \varphi^2(c_0) \varphi(h_0) = \varphi(c_1).$$

Отсюда получаем неравенство

$$l(\varphi(c_1)) \geq l(\varphi^2(c_0)) - 2l(\varphi(h_0)).$$

Из соотношения (13) следует, что

$$2l(\varphi(h_0)) \leq 2l(w)l(h_0) \leq 2l(w)\rho,$$

откуда

$$l(\varphi(c_1)) \geq l(\varphi^2(c_0)) - 2l(w)\rho.$$

Из неравенства (12) следует, что $l(\varphi^2(c_0)) \geq 2l(c_0)$, поэтому

$$l(c_2) \geq 2l(c_0) - 2(l(w) + 1)\rho,$$

откуда

$$l(c_2) \geq (3/2)l(c_0) + ((1/2)l(c_0) - 2(l(w) + 1)\rho),$$

то есть

$$\begin{aligned} l(c_2) &\geq (3/2)l(c_0) + 2l(w)\rho + (5/2)\rho - 2l(w)\rho - 2\rho = (3/2)l(c_0) + (1/2)\rho, \\ l(c_2) &> (3/2)l(c_0). \end{aligned}$$

Таким образом, всякий существенный аннулятор длины 5, ширины, не большей ρ и обхвата, не меньшего $H(\rho)$, является $(3/2)$ -гиперболическим, следовательно, по теореме Бествины рассматриваемые группы являются гиперболическими.

4. Пусть теперь

$$G^* = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = a^m b^n \rangle,$$

где $|m| < |n| + 1$ и $|m| \neq |n| - 1$ и $|m| \neq 1$.

Введем обозначение $H = \langle b, w \rangle$, где $w = a^m b^n$, $H_i = t^{-i} H t^i$. Пусть f — свободно-приведенное слово в группе $G = \langle a, b \rangle$ и $\varphi: G \rightarrow G$ — эндоморфизм такой, что $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = w$. Оценим длину слова

$$\varphi(f) = \varphi(a^{x_1} b^{y_1} a^{x_1} b^{y_2} \dots a^{x_j} b^{y_j}).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} x &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_j|, \\ y &= |y_1| + |y_2| + \dots + |y_j|. \end{aligned}$$

Тогда $l(f) = x + y$. Очевидно, что в слове $\varphi(f)$ сократиться может только некоторая степень b . Поэтому, если $x \geq |n|y$, то

$$\begin{aligned} l(\varphi(f)) &\geq x + y(|m| + |n|) - 2|n|j \\ &\geq x + y(|m| + |n|) - 2|n|y = x_1 + y|m|, \end{aligned}$$

где $x = x_1 + |n|y$, и если $x < |n|y$, то

$$l(\varphi(f)) \geq x + y(|m| + |n|) - 2x > y|m|.$$

Поэтому

$$\frac{l(\varphi(f))}{l(f)} = \frac{x_1 + y|m|}{x + y} = \frac{x_1 + y|m|}{x_1 + y(|n| + 1)}.$$

Так как $|m| < |n| + 1$, то

$$\frac{x_1 + y|m|}{x_1 + y(|n| + 1)} > \frac{y|m|}{y(|n| + 1)}.$$

Тогда

$$\frac{l(\varphi(f))}{l(f)} > \frac{y|m|}{y(|n| + 1)} = \frac{|m|}{|n| + 1}.$$

Таким образом,

$$l(\varphi(f)) > \frac{|m|}{|n| + 1} l(f). \quad (14)$$

Из тех же соображений получаем, что

$$l(\varphi^2(f)) \geq \left(\frac{|m|}{|n| + 1} \right)^2 l(f). \quad (15)$$

Рассмотрим группу $H_1 = \langle w, w_1 \rangle$, где $w_i = t^{-i} w t^i$. Нетрудно показать, что всякое свободноприведенное слово $f_1 \in H_1$ есть слово от элементов $a^{\pm m}$, b^{α} , где $\alpha \in \{\pm m, \pm n, \pm(n \pm m)\}$, причем либо $n \pm m = 0$, либо $n \pm m \geq 2$.

Пусть $l(f_1) = x + y$, где x — длина по a , y — длина по b . Тогда если

$$f_1 = (a^m)^{x_1} \dots (b^{\alpha})^{y_j},$$

то x кратно m , а $y \geq 2j$.

Оценим длину слова $\varphi^2(f_1)$. Поскольку $\varphi^2(f_1)$ есть слово из элементов $(a^m b^n)^m$ и $(b^m (a^m b^n)^n)^{\alpha}$, в слове $\varphi^2(f_1)$ максимальное сократимое подслово имеет вид $(b^m (a^m b^n)^n)$. Тогда

$$l(\varphi^2(f_1)) \geq x(|m| + |n|) + y(|m| + |n|)|n| + y|m| - 2j((|m| + |n|)|n| + |m|).$$

Рассмотрим следующие два случая.

Пусть $j = y/2$. Справедливо неравенство

$$2x \geq y. \quad (16)$$

Действительно, максимальное значение для y есть $y = 2j$, а минимальное значение для x есть $x = 2j$, если $f_1 = (a^m)^{x_1} \dots (b^{\alpha})^{y_j}$, либо $x = 2(j-1)$, если $f = (b^{\alpha})^{y_1} (a^m)^{x_1} \dots (b^{\alpha})^{y_j}$, и так как при $j \geq 2$ неравенство $4(j-1) \geq 2j$ справедливо, справедливо и неравенство (16). Тогда

$$\begin{aligned} l(\varphi^2(f_1)) &> x(|m| + |n|) + y(|m| + |n|)|n| + y|m| - y((|m| + |n|)|n| + |m|) \\ &= x(|m| + |n|) \end{aligned}$$

и

$$\frac{l(\varphi^2(f_1))}{l(f_1)} > \frac{x(|m| + |n|)}{x + y} > \frac{x(|m| + |n|)}{2x + x} = \frac{|m| + |n|}{3} \geq 4/3. \quad (17)$$

Пусть теперь $j < y/2$. Представим y как $y = y_1 + 2j$, где $2x \geq 2j$, тогда

$$l(\varphi^2(f_1)) > x(|m| + |n|) + y_1((|m| + |n|)|n| + |m|)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{l(\varphi^2(f_1))}{l(f_1)} &> \frac{x(|m| + |n|) + y_1((|m| + |n|)|n| + |m|)}{x + y_1 + 2j} \\ &> \frac{x(|m| + |n|)}{x + 2j} \geq 4/3. \end{aligned}$$

Таким образом, $l(\varphi^2(f_1)) > (4/3)l(f_1)$. Из тех же соображений следует, что

$$l(\varphi^{2k}(f_1)) > (4/3)^k l(f_1). \quad (18)$$

Объединяя неравенства (17) и (18), получим, что

$$l(\varphi^{2k}(f)) > \left(\frac{4}{3}\right)^k \left(\frac{|m|}{|n| + 1}\right)^2 l(f),$$

где $f_1 = \varphi^2(f)$. Поэтому при

$$k \geq \log_{4/3} \left(2 \left(\frac{|n| + 1}{m} \right)^2 \right) + 1$$

справедлива оценка

$$l(\varphi^{2k}(f)) > 2l(f). \quad (19)$$

Положим теперь

$$C = G = \langle a, b \rangle, \quad \alpha_{-1}(C) = C, \quad \alpha_1(C) = H,$$

причем $\alpha_{-1}(a) = a$, $\alpha_{-1}(b) = b$, $\alpha_1(a) = b$, $\alpha_1(b) = w$. Кроме того считаем, что

$$l(\varphi(f)) \leq l(w)l(f). \quad (20)$$

Заметим, что $l_G(f) = l_C(f)$, так как $G = C$. Положим

$$\lambda = \frac{3}{2}, \quad H(\rho) = 16\rho \frac{l^{2k}(w) - 1}{l(w) - 1},$$

и так как любой аннулятор длины, большей трех, однонаправлен, считаем, что $\Sigma = (\bar{p}, \bar{c})$, где

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (t, h_{-2k}, t, h_{-2k+1}, t, \dots, t, h_0, \dots, t, h_{2k-1}, t), \quad h_i \in G, \quad i \in \{-2k, \dots, 2k-1\}, \\ \bar{c} &= (c_{-2k}, c_{-2k+1}, \dots, c_0, \dots, c_{2k}), \quad c_i \in C, \quad i \in \{-2k, \dots, 2k\}. \end{aligned}$$

В силу выбора Σ

$$l(c_0) \geq H(\rho), \quad l(h_i) \leq \rho, \quad i \in \{-2k, \dots, 2k-1\}.$$

Из определения аннулятора следует, что

$$h_{2k-1}^{-1} \varphi(c_{2k-1}) h_{2k-1} = c_{2k}.$$

Следовательно,

$$l(c_{2k}) \geq l(\varphi(c_{2k-1})) - 2l(h_{2k-1}) \geq l(\varphi(c_{2k-1})) - 2\rho. \quad (21)$$

Аналогично, из определения аннулятора следует, что

$$h_{2k-2}^{-1}\varphi(c_{2k-2})h_{2k-2} = c_{2k-1}.$$

Действуя на обе части равенства эндоморфизмом φ , получаем, что

$$\varphi(h_{2k-2}^{-1})\varphi^2(c_{2k-2})\varphi(h_{2k-2}) = \varphi(c_{2k-1}).$$

Поэтому верно неравенство

$$l(\varphi(c_{2k-1})) \geq l(\varphi^2(c_{2k-2})) - 2l(\varphi(h_{2k-2})). \quad (22)$$

Из определения аннулятора следует, что

$$h_{2k-3}^{-1}\varphi(c_{2k-3})h_{2k-3} = c_{2k-2}.$$

Действуя на обе части равенства эндоморфизмом φ^2 , получим равенство

$$\varphi^2(h_{2k-3}^{-1})\varphi^3(c_{2k-3})\varphi^2(h_{2k-3}) = \varphi^2(c_{2k-2}).$$

Следовательно,

$$l(\varphi^2(c_{2k-2})) \geq l(\varphi^3(c_{2k-3})) - 2l(\varphi^2(h_{2k-3})). \quad (23)$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем неравенства

$$\begin{aligned} l(\varphi^3(c_{2k-3})) &\geq l(\varphi^4(c_{2k-4})) - 2l(\varphi^3(h_{2k-4})), \\ &\dots \\ l(\varphi^{2k-1}(c_1)) &\geq l(\varphi^{2k}(c_0)) - 2l(\varphi^{2k-1}(h_0)). \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя теперь в неравенство (21) неравенство (22), получим, что

$$l(c_{2k}) \geq l(\varphi^2(c_{2k-2})) - 2l(\varphi(h_{2k-2})) - 2\rho. \quad (25)$$

Затем, подставляя в неравенство (25) последовательно неравенство (23) и неравенства (24), получим неравенство

$$\begin{aligned} l(c_{2k}) &\geq l(\varphi^{2k}(c_0)) - 2l(\varphi^{2k-1}(h_0)) \\ &\quad - 2l(\varphi^{2k-2}(h_1)) - \dots - 2l(\varphi^2(h_{2k-3})) - 2l(\varphi(h_{2k-2})) - 2\rho. \end{aligned}$$

Используя неравенства (19) и (20), получим неравенство

$$\begin{aligned} l(c_{2k}) &> 2l(c_0) - 2l^{2k-1}(w)l(h_0) \\ &\quad - 2l^{2k-2}(w)l(h_1) - \dots - 2l^2(w)l(h_{2k-3}) - 2l(w)l(h_{2k-2}) - 2\rho. \end{aligned}$$

Учитывая неравенства $l(h_i) \leq \rho$, получим, что

$$l(c_{2k}) \geq 2l(c_0) - 2\rho \frac{l^{2k}(w) - 1}{l(w) - 1}.$$

Используя неравенство

$$l(c_0) \geq H(\rho) = 16\rho \frac{l^{2k}(w) - 1}{l(w) - 1},$$

получим, что

$$\begin{aligned} l(c_{2k}) &\geq \frac{3}{2}l(c_0) + 8\rho \frac{l^{2k}(w) - 1}{l(w) - 1} - 2\rho \frac{l^{2k}(w) - 1}{l(w) - 1} \\ &= \frac{3}{2}l(c_0) + 6\rho \frac{l^{2k}(w) - 1}{l(w) - 1} > \frac{3}{2}l(c_0). \end{aligned}$$

Таким образом, всякий аннулятор длины $4k + 1$ является $(3/2)$ -гиперболическим. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Используя тот факт, что гиперболическая группа не содержит подгруппу, изоморфную группе Баумслага

$$G(m, n) = \langle a, t; t^{-1}a^mt = a^n \rangle,$$

где $m \neq 0, n \neq 0$ (см. [11]), либо 2-порожденную абелеву подгруппу (см. [12]), нетрудно показать, что если

$$w \in \{axb^{k_1}x^{-1}a^{-1}, axa^{k_2}x^{-1}a^{-1}, ax(a^\mu b^\delta)^p x^{-1}a^{-1}b^{-\delta\mu}\},$$

где $\delta = \pm 1$, то группа G^* содержит подгруппу, изоморфную группе Баумслага. Пусть, к примеру,

$$w = ax(a^\mu b)^p x^{-1}a^{-1}b^{-\mu}.$$

Тогда, так как $t^{-1}ba^\mu t = ax(a^\mu b)^p x^{-1}a^{-1}$, положив $ba^\mu = b', d = taxb^{-1}$, получим, что G^* содержит подгруппу

$$\langle b', d; d^{-1}b'd = (b')^p \rangle.$$

Пусть теперь

$$w = ax(a^\mu b)^{\pm p} x^{-1}a^{-1}b^{-\mu},$$

тогда при $p = 1$ и $ax = 1$ получаем, что $w = a^\mu b^{1\pm\mu}$. Если

$$w = ax(a^\mu b^{-1})^{\pm p} x^{-1}a^{-1}b^\mu,$$

то при $p = 1$ и $ax = 1$ получаем, что $w = a^\mu b^{\pm\mu-1}$.

Таким образом, когда $w = a^m b^n$, где $|m| = |n| \pm 1$, рассматриваемые группы не гиперболические.

Рассмотрим группу

$$G^* = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = a^{\pm 1}b^n \rangle$$

В случае $w = ab^n$ группа G^* содержит абелеву подгруппу, а именно,

$$\langle bab^{-1}a^{-1}, t^2; t^{-2}bab^{-1}a^{-1}t^2 = bab^{-1}a^{-1} \rangle.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} t^{-1}bab^{-1}t &= ab^n bb^{-n}a^{-1} = aba^{-1}, \\ t^{-1}ba^{-1}b^{-1}t &= ab^n b^{-1}b^{-n}a^{-1} = ab^{-1}a^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$t^{-2}baba^{-1}t^2 = t^{-1}aba^{-1}b^{-1}t = t^{-1}att^{-1}ba^{-1}b^{-1}t = bab^{-1}a^{-1}.$$

В случае $w = a^{-1}b^n$ группа G^* содержит абелеву подгруппу, а именно,

$$\langle bab^{-1}a^{-1}, t^2b^{-1}a^{-1}; (t^2b^{-1}a^{-1})^{-1}bab^{-1}a^{-1}(t^2b^{-1}a^{-1}) = bab^{-1}a^{-1} \rangle.$$

Действительно,

$$t^{-1}bab^{-1}t = a^{-1}b^nbb^{-n}a = a^{-1}ba.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} abt^{-2}bab^{-1}a^{-1}t^2b^{-1}a^{-1} &= abt^{-1}a^{-1}bab^{-1}tb^{-1}a^{-1} \\ &= abb^{-1}a^{-1}bab^{-1}a^{-1} = bab^{-1}a^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Лысенко И. Г., О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп. *Изв. АН СССР, Сер. мат.* (1989) **53**, №4, 814–832.
2. Григорчук Р. И., Курчанов П. Ф., Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией. *Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фунд. напр.* (1990) **58**, 191–256.
3. Ольшанский А. Ю., SQ -универсальность гиперболических групп. *Матем. сб.* (1995) **186**, №8, 119–132.
4. Ivanov S. V., Schupp P. E., On the hyperbolicity of small concellation groups and one-relator groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1999) **350**, №5, 1851–1894.
5. Kapovich I., Howson property and one-relator groups. *Commun. Algebra* (1999) **27**, №3, 1057–1072.
6. Bestvina M., Feighn M., The combination theorem for negatively curved groups. *J. Diff. Geometry* (1992) **35**, №1, 85–101.
7. Bestvina M., Feighn M., Addendum and correction to: “A combination theorem for negatively curved groups.” *J. Diff. Geom.* (1996) **43**, №4, 783–788.
8. Щепетьева Н. Б., Гиперболичность некоторых двупорожденных групп с одним определяющим соотношением. В сб.: *Всероссийская науч. конф. “Современные проблемы математики, механики и информатики”, посвя. 70-летию ТулГУ. Тезисы докладов.* Тульский госунив., Тула, 2000, с. 64–65.
9. Линдон Р., Шупп П., *Комбинаторная теория групп.* Мир, Москва, 1980.
10. Безверхний В. Н., Решение проблем сопряженности слов в одном классе групп. В сб.: *Алгоритмич. проблемы теории групп и подгрупп. Межвуз. сб.* Тула, 1997, с. 4–38.
11. Gersten S. M., Short H., Rational subgroups of biautomatic groups. *Ann. Math.* (1991) **134**, 125–158.
12. Gromov M., Hyperbolic groups. In: *Essays in group theory.* Springer, Berlin, 1987, 75–263.
13. Alonso I., Brady T., Cooper D., Ferlini V., Lustig M., Mihalik M., Shapiro M., Short H., Notes on hyperbolic groups. Group theory from a geometric view point. In: *Proc. ICTP Trieste.* World Scientific, Singapore, 1991, pp. 3–63.

Статья поступила 06.11.2001.