Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Бабаш, Автоматные отображения слов, размножающие искажения в метриках Хемминга и Левенштейна не более, чем в K раз, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 3, 78–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:41:55

Автоматные отображения слов, размножающие искажения в метриках Хемминга и Левенштейна не более, чем в K раз

© 2002 г. А. В. Бабаш

Пусть I и O — конечные алфавиты. Для конечного алфавита Ω будем обозначать через Ω^* множество всех слов конечных длин в алфавите Ω . В статье дается полное описание всех автоматных отображений множества I^* в O^* , которые размножают ошибки типа замены букв в словах не более, чем в K раз. Дается полное описание инъективных автоматных отображений множества I^* в O^* , которые размножают ошибки типа пропуска букв не более, чем в K раз. Аналогичный результат получен для метрики выпадений и вставок букв.

1. Введение

Пусть I^* , O^* и Ω^* — множества всех слов конечных длин в конечных алфавитах I , O и Ω соответственно. В работе продолжаются исследования, связанные с проблемой описания отображений множества I^* в множество O^* , которые размножают ошибки типа замены букв не более, чем в K раз. Данная проблема была поставлена А. А. Марковым в 1956 году. Началом исследований явилась неопубликованная работа А. А. Маркова, о которой сообщалось в [1]. Им были описаны все биективные преобразования множества слов Ω^* , сохраняющие длины слов и не увеличивающие расстояния Хемминга между словами одной длины, то есть не размножающие искажения типа замены букв в словах. Дальнейшие исследования по указанной проблеме, связанные с исследованием инъективных отображений, а также с рассмотрением и других искажений слов, например, искажений типа выпадений или вставки букв в слова, были проведены в [1]. Описание же всех инъективных отображений множества I^* в O^* , не размножающих ошибки типа пропуска букв, было дано в [2]. Таким образом, говоря о конечных результатах исследований по указанной проблеме А. А. Маркова, можно сказать, что она решена пока в частном случае $K = 1$, при этом описаны лишь биективные отображения с требуемым свойством. В данной работе дается полное описание произвольных (то есть возможно не инъективных) конечно-автоматных отображений множества I^* в O^* , которые размножают ошибки типа замены букв не более, чем в K раз. Дается и полное описание инъективных конечно-автоматных отображений множества I^* в O^* , которые размножают ошибки типа пропуска букв не более, чем в K раз. Аналогичный результат получен для метрики выпадений и вставок букв (см. [3]).

2. Обозначения и основные понятия

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $|\Omega|$ — мощность множества Ω ; I, O — конечные алфавиты $|I| > 1, |O| > 1$; I^* и O^* — множества всех слов конечной длины алфавитов I и O , соответственно, считаем, что пустое слово $\emptyset$ принадлежит I^* и O^* ; для слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^k, \mathfrak{Z} = i_1 \dots i_k, \mathfrak{Z}' = i'_1 \dots i'_k$, будем обозначать $\rho(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}')$ расстояние Хемминга между словами $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^k$.

Определение 1. Отображение $\varphi: I^* \rightarrow O^*$ называется отображением, увеличивающим метрику ρ не более, чем в K раз, если для любых слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ выполняются условия

$$|\mathfrak{Z}| = |\mathfrak{Z}'| \implies |\varphi(\mathfrak{Z})| = |\varphi(\mathfrak{Z}')|, \quad (1)$$

$$K\rho(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') \geq \rho(\varphi(\mathfrak{Z}), \varphi(\mathfrak{Z}')). \quad (2)$$

При $K = 1$ такое отображение называют не увеличивающим метрику ρ (не размножающим искажения типа замены букв [1]).

Множество всех отображений $\varphi: I^* \rightarrow O^*$, увеличивающих метрику ρ не более, чем в K раз, обозначим через $G(I^*, O^*, \rho, K)$. Множество всех инъективных отображений из $G(I^*, O^*, \rho, 1)$ полностью описано в [1].

Через $A = (I, S, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$ обозначим конечный автомат с входным алфавитом I , множеством состояний S , выходным алфавитом O , частичными функциями переходов $\delta_i: S \rightarrow S, i \in I$, и частичными функциями выхода $\beta_i: S \rightarrow O, i \in I$. Выходное слово автомата A , соответствующее входному слову $\mathfrak{Z} \in I^*$ и начальному состоянию $s \in S$, обозначим через $A(s, \mathfrak{Z})$; при $\mathfrak{Z} = i_1 \dots i_k$ слово

$$A(s, \mathfrak{Z}) = y_1 \dots y_k = \beta_{i_1} s \beta_{i_2} \delta_{i_1} s \dots \beta_{i_k} \delta_{i_{k-1}} \dots \delta_{i_1} s, \quad i_j \in I, \quad y_j \in O, \quad j = 1, \dots, k.$$

Автоматным отображением назовем отображение $A_s: I^* \rightarrow O^*$, задаваемое равенством $A_s(\mathfrak{Z}) = A(s, \mathfrak{Z})$. Для описания автоматного отображения A_s будем использовать подавтомат $A[s]$ автомата A , порожденный состоянием $s \in S$. Множеством состояний автомата $A[s]$ является подмножество S_s множества S , состоящее из состояния s и всех состояний, достижимых из s в графе переходов автомата A . Подграф Γ_s графа автомата A , соответствующий множеству S_s , определяет подавтомат

$$A[s] = (I, S_s, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$$

автомата A . Здесь для простоты обозначений ограничения отображений $(\delta_i)_{i \in I}$ и $(\beta_i)_{i \in I}$ на множество S_s обозначены теми же символами.

Через $A((I^*, O^*, \rho, K))$ обозначим множество всех автоматных отображений

$$A_s: I^* \rightarrow O^*,$$

увеличивающих метрику ρ не более, чем в K раз, то есть отображений A_s , для которых

$$K\rho(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') \geq \rho(A_s(\mathfrak{Z}), A_s(\mathfrak{Z}'))$$

при любых словах $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ одинаковой длины ($A_s(\emptyset) = \emptyset$).

Полное описание множества $A(I^*, O^*, \rho, K)$ дано в разделе 3.

Обозначим через ε бинарное отношение на множестве I^* . Запись $\mathfrak{Z} \varepsilon \mathfrak{Z}'$ означает, что слово $\mathfrak{Z}'$ получено из $\mathfrak{Z}$ удалением одного вхождения некоторой его буквы (ε —

бинарное отношение выпадения буквы); ε^t — t -я степень бинарного отношения ε . Через ε^{-1} обозначим обратное к ε бинарное отношение, именно,

$$\mathfrak{Z}' \varepsilon^{-1} \mathfrak{Z}' \iff \mathfrak{Z} \varepsilon \mathfrak{Z}',$$

ε^{-1} есть бинарное отношение вставки буквы.

Бинарное отношение ε будет иметь тот же смысл и на множестве слов O^* .

Определение 2. Отображение $\varphi: I^* \rightarrow O^*$ называется отображением, увеличивающим бинарное отношение ε не более, чем в K раз, если для любых слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ и любого $n = 1, \dots, |\mathfrak{Z}|$ найдется число $m \in \{1, \dots, Kn\}$ такое, что выполняется импликация

$$\mathfrak{Z} \varepsilon^n \mathfrak{Z}' \implies \varphi(\mathfrak{Z}) \varepsilon^m \varphi(\mathfrak{Z}').$$

При $K = 1$ такое отображение φ будем называть не размножающим искажений типа пропуска букв (см. [1]).

Через $AG(I^*, O^*, \varepsilon, K)$ обозначим множество всех автоматных инъективных отображений $A_s: I^* \rightarrow O^*$, увеличивающих бинарное отношение не более, чем в K раз. Описание множества $AG(I^*, O^*, \varepsilon, K)$ дается в разделе 4.

Обозначим через D метрику Левенштейна на множестве $I^*(O^*)$ (см. [3]); $D(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}')$ означает минимальное число выпадений и вставок букв, требуемое для получения из слова $\mathfrak{Z}$ слова $\mathfrak{Z}'$.

Определение 3. Отображение $\varphi: I^* \rightarrow O^*$ называется отображением, увеличивающим метрику D не более, чем в K раз, если для любых слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ выполняется условие

$$KD(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') \geq D(\varphi(\mathfrak{Z}), \varphi(\mathfrak{Z}'))$$

Через $AG(I^*, O^*, D, K)$ обозначим множество всех автоматных инъективных отображений $A_s: I^* \rightarrow O^*$, увеличивающих метрику D не более, чем в K раз. Описание множества $AG(I^*, O^*, D, K)$ дается в разделе 5.

3. Описание множества $A(I^*, O^*, \rho, K)$

Определение 4. B -шестеркой автомата $A = (I, S, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$ называется набор

$$(s, i, i', y, s_1, s'_1) \in S \times I \times I \times O \times S \times S,$$

для компонент которого выполняются условия

$$\delta_i s = s_1, \quad \delta_{i'} s = s'_1, \quad s_1 \neq s'_1, \quad \beta_i s = \beta_{i'} s = y, \quad i \neq i'.$$

B -шестерке (s, i, i', y, s_1, s'_1) в графе переходов автомата A соответствует фрагмент

Для $\mathfrak{S} \in I^k$, $\mathfrak{S} = i_1 i_2 \dots i_k$ положим $\delta_{\mathfrak{S}} = \delta_{i_k} \dots \delta_{i_2} \delta_{i_1}$ и $\delta_{\emptyset} s = s$ при любом $s \in S$.

Определение 5. Приемником B -шестерки (s, i, i', y, s_1, s'_1) автомата A называется тройка $(i'', s_L, s'_L) \in I \times S \times S$, для элементов которой выполняются условия

- либо $s_L = s_1$, $s'_L = s'_1$ и $\beta_{i''} s_L \neq \beta_{i''} s'_L$,
- либо $s_L = \delta_{\mathfrak{S}} s_1$, $s'_L = \delta_{\mathfrak{S}} s'_1$ для некоторого $\mathfrak{S} \in I^* \setminus \emptyset$ и $\beta_{i''} s'_L \neq \beta_{i''} s'_L$.

При этом приемник (i'', s_L, s'_L) называется особым, если $\delta_{i''} s_L = \delta_{i''} s'_L$; в противном случае приемник (i'', s_L, s'_L) называется неособым.

B -шестерке и ее приемнику в графе переходов автомата A соответствует фрагмент

Определение 6. B -семеркой автомата A называется набор

$$(s, i, i', y, y', s_1, s'_1) \in S \times I \times I \times O \times O \times S \times S,$$

для компонент которого выполняются условия

$$i \neq i', \quad y \neq y', \quad \delta_i s = s_1, \quad \delta_{i'} s = s'_1, \quad s_1 \neq s'_1, \quad \beta_i s = y, \quad \beta_{i'} s = y'.$$

B -семерке автомата A в его графе переходов соответствует фрагмент

При описании множества $A(I^*, O^*, \rho, K)$ рассмотрим два случая $K = 1$ и $K \geq 2$, которым соответствуют множество $A(I^*, O^*, \rho, K = 1)$ всех автоматных отображений I^* в O^* , не увеличивающих метрику ρ , и множество $A((I^*, O^*, \rho, K \geq 2))$ автоматных отображений I^* в O^* , увеличивающих метрику не более, чем в K раз, $K \geq 2$.

Определение 7. Автомат A называется внутренне автономным автоматом, если для любого состояния $s \in S$ и любых $i, i' \in I$ справедливо равенство $\delta_i s = \delta_{i'} s$.

Согласно определению, переходы состояний внутренне автономного автомата не зависят от входного слова:

$$\delta_{\mathfrak{Z}} s = \delta_{\mathfrak{Z}'} s, \quad s \in S.$$

Напомним, что автомат $A = (I, S, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$ называется приведенным, если для любых различных состояний $s, s' \in S$ найдется входное слово $\mathfrak{Z} \in I^*$, при котором $A(s, \mathfrak{Z}) \neq A(s', \mathfrak{Z})$.

Описание первого множества $A(I^*, O^*, \rho, K = 1)$ дается следующей теоремой.

Теорема 1. Автоматное отображение A_{s_0} не увеличивает метрику ρ тогда и только тогда, когда в приведенном автомате

$$A[s_0] = (I, S_{s_0}, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I}),$$

реализующем отображение A_{s_0} , во-первых, отсутствуют B -семерки и, во-вторых, либо автомат $A[s_0]$ является внутренне автономным автоматом, либо каждый из приемников любой B -шестерки автомата является особым.

Для описания множества $A(I^*, O^*, \rho, K \geq 2)$ введем дополнительные определения.

Определение 8. K -м приемником ($K \geq 1$) B -шестерки $(s, i_1, i'_1, y, s_1, s'_1)$ автомата A (B -семерки $(s, i_1, i'_1, y, y', s_1, s'_1)$) называется тройка (i, s_L, s'_L) , компоненты которой удовлетворяют условиям $s_L = \delta_{\mathfrak{Z}} s_1$, $s'_L = \delta_{\mathfrak{Z}} s'_1$ для некоторого слова $\mathfrak{Z} \in I^*$, $\beta_i s_L \neq \beta_i s'_L$ и $\rho(A(s_1, \mathfrak{Z}i), A(s'_1, \mathfrak{Z}i)) = K$.

B -шестерке $(s, i_1, i'_1, y, s_1, s'_1)$ и ее K -му приемнику в графе переходов автомата A соответствует фрагмент

Определение 9. K -й приемник (i, s_L, s'_L) B -шестерки $(s, i_1, i'_1, y, s_1, s'_1)$ автомата A (B -семерки $(s, i_1, i'_1, y, y', s_1, s'_1)$) называется особым, если $\delta_i s_L = \delta_i s'_L$.

В противном случае, K -й приемник (i, s_L, s'_L) называется неособым.

Теорема 2. Автоматное отображение A_{s_0} увеличивает метрику ρ не более, чем в K раз ($K \geq 2$), тогда и только тогда, когда для приведенного автомата

$$A[s_0] = (I, S_{s_0}, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I}),$$

реализующего отображение A_{s_0} выполнены условия:

– либо автомат $A[s_0]$ является внутренне автономным;

– либо все K -приемники любой B -шестерки особые и все $(K - 1)$ -приемники любой B -семерки особые.

Конструктивность условий теорем 1, 2 будет показана позднее. Перейдем к их доказательствам.

Для доказательства теоремы 2 приведем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Отображение $\varphi: I^* \rightarrow O^*$ увеличивает метрику ρ не более, чем в K раз, тогда и только тогда, когда для любых слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ одинаковой длины из условия $\rho(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') = 1$ следует, что*

$$\rho(\varphi(\mathfrak{Z}), \varphi(\mathfrak{Z}')) \leq K.$$

Доказательство. Если отображение φ увеличивает метрику не более, чем в K раз, то про определению 1 для слов одинаковой длины справедлива импликация

$$\rho(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') = 1 \implies \rho(\varphi(\mathfrak{Z}), \varphi(\mathfrak{Z}')) \leq K.$$

Предположим теперь, что эта импликация верна. Рассмотрим слова $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_m \in I^*$ одинаковой длины, для которых $\rho(\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_m) = m$, $m \geq 2$. Для слов $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_m$ найдутся слова $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots, \mathfrak{Z}_{m-1} \in I^*$, при которых

$$\rho(\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1) = \rho(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) = \dots = \rho(\mathfrak{Z}_{m-1}, \mathfrak{Z}_m) = 1.$$

Согласно импликации получаем, что

$$\rho(\varphi(\mathfrak{Z}_0), \varphi(\mathfrak{Z}_1)) \leq K, \quad \rho(\varphi(\mathfrak{Z}_1), \varphi(\mathfrak{Z}_2)) \leq K, \dots, \rho(\varphi(\mathfrak{Z}_{m-1}), \varphi(\mathfrak{Z}_m)) \leq K,$$

откуда, согласно метрическим свойствам расстояния Хемминга следует, что

$$\rho(\varphi(\mathfrak{Z}_0), \varphi(\mathfrak{Z}_m)) \leq mK.$$

Лемма доказана.

Для слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ будем через $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'$ обозначать конкатенацию слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ (слово $\mathfrak{Z}$ является началом слова $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'$).

Лемма 2. *Если автоматное отображение A_{s_0} увеличивает метрику ρ не более, чем в K раз, то при любом состоянии $s \in S_{s_0}$ автомата*

$$A[s_0] = (I, S_{s_0}, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$$

автоматное отображение $A[s_0]_s = A_s$ увеличивает метрику не более, чем в K раз.

Доказательство. Предположим противное. Пусть при выполнении условий леммы нашлось состояние $s \in S_{s_0}$, при котором отображение $A[s_0]_s$ не является увеличивающим метрику ρ не более, чем в K раз. Тогда найдутся $\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}'' \in I^*$, при которых

$$\rho(A(s, \mathfrak{Z}'), A(s, \mathfrak{Z}'')) > K\rho(\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}'').$$

Из определения автомата $A[s_0]$ следует, что найдется слово $\mathfrak{Z} \in I^*$, при котором $\delta_{\mathfrak{Z}}s_0 = s$. Для конкатенаций $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'$ и $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}''$ слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}''$ получаем неравенство

$$\rho(A(s_0, \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'), A(s_0, \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'')) > K\rho(\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}''),$$

что противоречит условиям леммы.

Доказательство теоремы 2. Пусть автоматное отображение A_{s_0} увеличивает метрику ρ не более, чем в K раз, и автомат

$$A[s_0] = (I, S_{s_0}, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$$

не является внутренне автономным автоматом. Предположим, что в множестве всех K -приемников некоторой B -шестерки $(s, i_1, i'_1, y_1, s_1, s'_1)$ имеется неособенный K -приемник (i_L, s_L, s'_L) , то есть в графе переходов автомата $A[s_0]$ существует диаграмма вида

где

$$i_1 \neq i'_1, \quad s_1 \neq s'_1, \quad s_L \neq s'_L, \quad s_{L+1} \neq s'_{L+1}, \quad y_L \neq y'_L, \quad \rho(A(s_1, \mathfrak{S}i_L), A(s'_1, \mathfrak{S}i_L)) = K.$$

Так как $A[s_0]$ — приведенный автомат, для не равных состояний s_{L+1}, s'_{L+1} найдется слово $\hat{\mathfrak{S}} \in I^*$, при котором

$$A(s_{L+1}, \hat{\mathfrak{S}}) \neq A(s'_{L+1}, \hat{\mathfrak{S}}).$$

По этой причине

$$\rho(A(s, i_1 \mathfrak{S}i_L \hat{\mathfrak{S}}), A(s, i'_1 \mathfrak{S}i_L \hat{\mathfrak{S}})) \geq K + 1.$$

С другой стороны,

$$\rho(i_1 \mathfrak{S}i_L \hat{\mathfrak{S}}, i'_1 \mathfrak{S}i_L \hat{\mathfrak{S}}) = 1.$$

Следовательно, автоматное отображение A_s не является отображением, увеличивающим метрику ρ не более, чем в K раз. Из леммы 2 вытекает, что и автоматное отображение A_{s_0} не является отображением, увеличивающим метрику ρ не более, чем в K раз. Таким образом, получено противоречие с предположением о том, что в множестве всех K -приемников некоторой B -шестерки $(s, i_1, i'_1, y_1, s_1, s'_1)$ имеется неособенный K -приемник (i_L, s_L, s'_L) .

Аналогично получается противоречие, если предположить, что в множестве всех $(K - 1)$ -приемников некоторой B -семерки $(s, i_1, i'_1, y, y', s_1, s'_1)$ имеется неособенный $(K - 1)$ -приемник (i_L, s_L, s'_L) , то есть в графе переходов автомата $A[s_0]$ существует диаграмма вида

где

$$i_1 \neq i'_1, \quad y \neq y', \quad s_1 \neq s'_1, \quad s_L \neq s'_L, \quad s_{L+1} \neq s'_{L+1}, \quad y_L \neq y'_L, \\ \rho(A(s_1, \mathfrak{Z}i_L), A(s'_1, \mathfrak{Z}i_L)) = K - 1.$$

В этом случае

$$\rho(A(s, i_1 \mathfrak{Z}i_L \hat{\mathfrak{S}}), A(s, i'_1 \mathfrak{Z}i_L \hat{\mathfrak{S}})) \geq K + 1,$$

а с другой стороны, $\rho(i_1 \mathfrak{Z}i_L \hat{\mathfrak{S}}, i'_1 \mathfrak{Z}i_L \hat{\mathfrak{S}}) = 1$. Получаем противоречие.

Докажем теперь обратное утверждение теоремы 2.

Если автомат $A[s_0]$ внутренне автономен, то его отображение A_{s_0} представимо в виде

$$A_{s_0}(i_1 i_2 \dots i_k) = \beta_{i_1} s_0 \beta_{i_2} s_1 \dots \beta_{i_k} s_{k-1}$$

для некоторых состояний $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ из S , не зависящих от $i_1, i_2, \dots, i_k$. Поэтому отображение A_{s_0} увеличивает ρ не более, чем в один раз, и следовательно, не более, чем в K раз при любом K . Предположим, что выполнены условия:

- (1) автомат A_{s_0} не является внутренне автономным,
- (2) любой K -приемник (если он существует) каждой B -шестерки является особым,
- (3) любой $(K - 1)$ -приемник (если он существует) каждой B -семерки является особым.

Из леммы 1 вытекает, что для доказательства достаточности условий теоремы 2 достаточно доказать, что из условия $\rho(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') = 1$, $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ вытекает оценка

$$\rho(A(s_0, \mathfrak{Z}), A(s_0, \mathfrak{Z}')) \leq K.$$

Докажем эту импликацию. Пусть $\rho(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') = 1$, $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$. Представим слова $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ в виде $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 i_j \mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}_1 i'_j \mathfrak{Z}_2$, где $i_j \neq i'_j$. Априори возможны лишь следующие три случая, приведенные на рисунках.

В первом случае $\delta_{ij}s_{j-1} = \delta_{i'j}s_{j-1} = s_j$:

Во втором случае $\delta_{ij}s_{j-1} \neq \delta_{i'j}s_{j-1}$, $\beta_{ij}s_{j-1} = \beta_{i'j}s_{j-1} = y$:

В третьем случае $\delta_{ij}s_{j-1} \neq \delta_{i'j}s_{j-1}$, $\beta_{ij}s_{j-1} = y \neq \beta_{i'j}s_{j-1} = y'$:

В первом случае очевидно, что

$$\rho(A(s_0, \mathfrak{Z}_1 i_j \mathfrak{Z}_2), A(s_0, \mathfrak{Z}_1 i_j' \mathfrak{Z}_2)) \leq 1 \leq K.$$

Рассмотрим оставшиеся два случая. Пусть имеет место второй случай. Предположим, что

$$\rho(A(s_0, \mathfrak{Z}_1 i_j \mathfrak{Z}_2), A(s_0, \mathfrak{Z}_1 i_j' \mathfrak{Z}_2)) \geq K + 1.$$

Тогда

$$\rho(A(s_j, \mathfrak{Z}_2), A(s_j', \mathfrak{Z}_2)) \geq K + 1.$$

Рассмотрим номера позиций, на которых элементы последовательностей $A(s_j, \mathfrak{Z}_2)$, $A(s_j', \mathfrak{Z}_2)$ различны. Пусть $y_c = \beta_i s_c$, $y'_c = \beta_{i'} s'_c$ — K -ые несовпадающие элементы в последовательностях $A(s_j, \mathfrak{Z}_2)$, $A(s_j', \mathfrak{Z}_2)$. Тогда состояния s_{c+1} , s'_{c+1} , отвечающие моменту времени $c + 1$ функционирования автомата A , начинающегося с состояний s_j , s'_j , при входной последовательности $\mathfrak{Z}_2$ не совпадают, так как в последовательностях $A(s_j, \mathfrak{Z}_2)$, $A(s'_j, \mathfrak{Z}_2)$ имеется $(K + 1)$ -я позиция несовпадения их элементов. Таким образом, доказано существование неособенного K -приемника B -шестерки

$(s_{j-1}, i_j, i'_j, y, s_j, s'_j)$, что противоречит условию (2). Итак, для второго случая доказано неравенство

$$\rho(A(s_0, \mathfrak{F}_1 i_j \mathfrak{F}_2), A(s_0, \mathfrak{F}_1 i'_j \mathfrak{F}_2)) \leq K.$$

Для третьего случая это неравенство доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 1. Для автомата $A[s_0]$ априори возможны два случая:

- (1) автомат $A[s_0]$ внутренне автономен, что равносильно тому, что множество всех B -шестерок и множество всех B -семерок являются пустыми множествами,
- (2) хотя бы одно из указанных множеств не является пустым, то есть автомат $A[s_0]$ не является автономным.

Предположим, что автоматное отображение A_{s_0} не увеличивает метрику ρ . Если в автомате $A[s_0]$ имеется B -семерка $(s, i, i', y, y', s_1, s'_1)$, то в его графе переходов имеется диаграмма вида

где $i \neq i'$, $y \neq y'$, $s_1 \neq s'_1$.

Так как $A[s_0]$ — приведенный автомат, найдется слово $\mathfrak{F}_2 \in I^*$, при котором $A(s_1, \mathfrak{F}_2) \neq A(s'_1, \mathfrak{F}_2)$. Тогда

$$\rho(\mathfrak{F}_1 i \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_1 i' \mathfrak{F}_2) = 1, \quad \rho(A(s_0, \mathfrak{F}_1 i \mathfrak{F}_2), A(s_0, \mathfrak{F}_1 i' \mathfrak{F}_2)) \geq 2,$$

что противоречит предположению о том, что автоматное отображение A_{s_0} не увеличивает метрику ρ . Таким образом, если автоматное отображение A_{s_0} не увеличивает метрику ρ , то в автомате $A[s_0]$ отсутствуют B -семерки.

Пусть отображение A_{s_0} не увеличивает метрику ρ и автомат $A[s_0]$ не является внутренне автономным. Предположим, что в множестве всех приемников некоторой B -шестерки (s, i, i', y, s_1, s_2) имеется неособый приемник, то есть в графе переходов автомата $A[s_0]$ имеется диаграмма вида

где $s_1 \neq s'_1, i \neq i', \mathfrak{Z} \in I^*, y_L \neq y'_L, s_{L+1} \neq s'_{L+1}$.

Из приведенности автомата $A[s_0]$ следует существование слова $\hat{\mathfrak{Z}} \in I^*$, при котором

$$A(s_{L+1}, \hat{\mathfrak{Z}}) \neq A(s'_{L+1}, \hat{\mathfrak{Z}}).$$

Тогда

$$\rho(i\mathfrak{Z}_L\hat{\mathfrak{Z}}, i'\mathfrak{Z}_L\hat{\mathfrak{Z}}) = 1, \quad \rho(A(s, i\mathfrak{Z}_L\hat{\mathfrak{Z}}), A(s, i'\mathfrak{Z}_L\hat{\mathfrak{Z}})) \geq 2.$$

Следовательно, отображение A_s не является отображением, не увеличивающим ρ . Тогда по лемме 2 и отображение A_{s_0} не является отображением, не увеличивающим ρ , что противоречит начальному предположению. Таким образом, доказано, что если автомат $A[s_0]$ не является внутренне автономным и у него отсутствуют B -семерки и отображение A_{s_0} не увеличивает ρ , то каждый приемник любой B -шестерки является особым.

Перейдем теперь к доказательству достаточности условий теоремы 1. Очевидно, что при внутренне автономном автомате $A[s_0]$ автоматное отображение A_{s_0} не увеличивает метрику ρ .

Предположим, что $A[s_0]$ не является внутренне автономным автоматом, в нем отсутствуют B -семерки и каждый приемник любой B -шестерки особый. Согласно лемме 1 для доказательства того, что отображение A_{s_0} не увеличивает ρ , достаточно доказать, что выполняется импликация

$$\{\rho(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') = 1, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*\} \implies \{\rho(A(s_0, \mathfrak{Z}), A(s_0, \mathfrak{Z}')) \leq 1\}.$$

Пусть $\rho(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') = 1$ для некоторых $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$. Представим $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ в виде

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 i_j \mathfrak{Z}_2, \quad \mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}_1 i'_j \mathfrak{Z}_2,$$

где $i_j \neq i'_j, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2 \in \mathfrak{S}^*$. Рассмотрим пути в графе переходов автомата $A[s_0]$, отвечающие состоянию s_0 и входным словам $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$. Априори возможны лишь следующие случаи.

В первом случае

Во втором случае, где $s_j \neq s'_j$,

Второй случай распадается на два подслучая:

$$\beta_{ij}s_{j-1} = \beta'_{ij}s_{j-1}, \quad \beta_{ij}s_{j-1} \neq \beta'_{ij}s_{j-1}.$$

В первом подслучае, используя условие, что каждый приемник любой B -шестерки является особым, заключаем, что

$$\rho(A(s_0, \mathfrak{S}_1 i_j \mathfrak{S}_2), A(s_0, \mathfrak{S}_1 i'_j \mathfrak{S}_2)) \leq 1.$$

Второй подслучай невозможен, так как по условию у автомата $A[s_0]$ отсутствуют B -семерки. Таким образом, доказана достаточность условий теоремы 1.

Напомним, что автомат $A = (I, S, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$ называется перестановочным, если его частичные функции перехода $(\delta_i)_{i \in I}$ осуществляют биекции S в S .

В классе автоматных отображений выделим два подкласса: множество всех инъективных автоматных отображений I^* в O^* и множество всех автоматных отображений A_s , для которых автомат $A[s]$ является перестановочным.

Для этих подклассов автоматных отображений приведем некоторые следствия доказанных теорем 1 и 2. Для автомата

$$A[s_0] = (I, S_{s_0}, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$$

через β_s , $s \in S$, обозначим отображение I в O , задаваемое равенствами $\beta_s(i) = \beta_i(s)$, $i \in I$. Очевидно следующее утверждение.

Предложение 1. Автоматное отображение A_{s_0} инъективно тогда и только тогда, когда все отображения β_s , $s \in S_{s_0}$, инъективны.

Отметим, что наличие B -шестерки у автомата A_{s_0} является достаточным условием не инъективности отображения A_{s_0} . Из этого факта, предложения 1 и теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть A_{s_0} — инъективное отображение и $A[s_0]$ — приведенный автомат. Отображение A_{s_0} не увеличивает метрику ρ тогда и только тогда, когда автомат $A[s_0]$ является внутренне автономным.

Из теоремы 1 и определения перестановочности автомата A вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть $A[s_0]$ — приведенный перестановочный автомат. Отображение A_{s_0} не увеличивает метрику ρ тогда и только тогда, когда автомат $A[s_0]$ является внутренне автономным.

Из теоремы 2 несложно получить следующие следствия.

Следствие 3. Пусть A_{s_0} — инъективное отображение и $A[s_0]$ — приведенный автомат. Отображение A_{s_0} увеличивает метрику ρ не более, чем в K раз, $K \leq 2$, тогда и только тогда, когда либо автомат $A[s_0]$ является внутренне автономным, либо все его $(K-1)$ -приемники любой B -семерки являются особыми.

Следствие 4. Пусть $A[s_0]$ — приведенный перестановочный автомат. Отображение A_{s_0} увеличивает метрику ρ не более, чем в K раз, $K \geq 2$, тогда и только тогда, когда автомат $A[s_0]$ является внутренне автономным.

Отметим тот факт, что расширения класса автоматных отображений, осуществляемых инициальными приведенными перестановочными автоматами, увеличивающих метрику ρ не более, чем в один раз, при переходе к автоматным отображениям, увеличивающим метрику ρ строго более, чем в один раз, не происходит.

Замечание 1. Для проверки условий теорем 1, 2 требуется проверить наличие или отсутствие в графе переходов автомата $A[s_0]$ некоторых диаграмм (фрагментов). Сложность такой проверки выражается через максимальную длину входных слов, характеризующих диаграмму. Несложно доказать, что для проверки приемника B -шестерки на его особенность достаточно рассматривать входные слова $\mathfrak{Z}$ (см. определение 5) длины, не превосходящей

$$M = \frac{|S|(|S| - 1)}{2} - 1.$$

Для проверки K -приемника B -шестерки на его особенность достаточно рассматривать входные слова $\mathfrak{Z}$ (см. определение 9) длины, не превосходящей KM . Аналогично, для $(K - 1)$ -приемника B -семерки — слова длины не более, чем $(K - 1)M$. Получение минимальных оценок длин указанных слов $\mathfrak{Z}$ представляет собой отдельную задачу. Приведенные оценки доказывают лишь конструктивность условий теорем 1 и 2.

4. Описание множества $AG(I^*, O^*, \varepsilon, K)$

Предположим, что некоторое автоматное отображение $A_{s_0}: I^* \rightarrow O^*$ увеличивает бинарное отношение ε не более, чем в K раз, то есть для любых $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ и любого $n \in \{1, \dots, |\mathfrak{Z}|\}$ имеется число $m \in \{1, \dots, Kn\}$ такое, что выполняется импликация

$$\mathfrak{Z} \varepsilon^n \mathfrak{Z}' \implies A(s_0, \mathfrak{Z}) \varepsilon^m A(s_0, \mathfrak{Z}').$$

Так как автоматное отображение сохраняет длины слов, из этого соотношения следует, что $m = n$. В частности, A_{s_0} не размножает искажений типа пропуска букв. Обратно, если A_{s_0} не размножает искажения типа пропуска букв, то, очевидно, A_{s_0} увеличивает бинарное отношение ε не более, чем в K раз, при любом K . Таким образом, множество $AG(I^*, O^*, \varepsilon, K)$ всех автоматных инъективных отображений $A_s: I^* \rightarrow O^*$, увеличивающих бинарное отношение ε не более, чем в K раз, совпадает с множеством $AG(I^*, O^*, \varepsilon, 1)$. Описание последнего множества дается в следующей теореме.

Теорема 3. *Инъективное автоматное отображение A_{s_0} не размножает искажения типа пропуска букв тогда и только тогда, когда для автомата*

$$A[s_0] = (I, S_{s_0}, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$$

при любом $s \in S_{s_0}$ отображение β_s не зависит от выбора $s \in S_{s_0}$.

Отметим, что данное утверждение, по-видимому можно доказать, используя результаты работ М. М. Глухова [4, 5] по описанию инъективных отображений, не распространяющих искажения. Ниже дается теоретико-автоматное доказательство теоремы 3.

Приведем вспомогательные утверждения, представляющие и самостоятельный интерес. Следующее утверждение очевидно.

Предложение 2. Инъективное отображение $\varphi: I^* \rightarrow O^*$ не размножает искажения типа пропуска букв тогда и только тогда, когда из $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$, следует, что $\varphi(\mathfrak{Z}) \in \varphi(\mathfrak{Z}')$.

Пусть $A[s_0] = (I, S_{s_0}, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$ — автомат, реализующий автоматное отображение A_{s_0} . Ниже мы допускаем, что автомат $A[s_0]$ может быть и неприведенным автоматом.

Предложение 3. Если автоматное отображение A_{s_0} не размножает искажения типа пропуска букв, то при любом $s \in S_{s_0}$ автоматное отображение A_s не размножает искажения типа пропуска букв.

Доказательство. Пусть для $s \in S_{s_0}$ автоматное отображение A_s не размножает искажения типа пропуска букв. Тогда при любых $i \in I$, $\mathfrak{Z} \in I^*$, $\mathfrak{Z} \neq \emptyset$ и $\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{Z}'$, для которого $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}'$, справедливы отношения $i\mathfrak{Z} \in i\mathfrak{Z}'$ и $A(s, i\mathfrak{Z}) \in A(s, i\mathfrak{Z}')$. Учитывая, что первые символы в словах $A(s, i\mathfrak{Z})$, $A(s, i\mathfrak{Z}')$ равны, получаем, что

$$A(\delta_i s, \mathfrak{Z}) \in A(\delta_i s, \mathfrak{Z}'),$$

то есть (см. предложение 2) отображение $A_{s'}$, задаваемое равенствами $s' = \delta_i s$, не размножает искажения типа пропуска букв. Следовательно, при любом $s \in S_{s_0}$ автоматное отображение A_s не размножает искажения типа пропуска букв.

Доказательство теоремы 3. Пусть инъективное отображение A_{s_0} не размножает искажения типа пропуска букв. Тогда (см. предложение 3) при любом $s \in S_{s_0}$ автоматное отображение A_s не размножает искажения типа пропуска букв. При этом отображение A_s инъективно (см. предложение 1).

Покажем, что при любых различных $i_1, i_2 \in I$ выходное слово $A(s, i_1, i_2) = y_1 y_2$ таково, что $y_1 \neq y_2$. Предположим, что $A(s, i_1, i_2) = yu$. Тогда $i_1 i_2 \in i_2$, $yu \in A(s, i_2)$. Отсюда получаем, что $A(s, i_2) = y$, что противоречит инъективности отображения A_s , так как $A(s, i_1) = y$.

Итак, при любом $i \in I$, $i \neq i'$,

$$ii' \in i', \quad A(s, ii') = yy',$$

где $y \neq y'$. Откуда получаем, что $yy' \in A(s, i')$, $A(s, i) = y$. Следовательно, $\beta_s(i') = y'$, а из $A(s, ii') = yy'$ следует, что $\beta_{s_1}(i') = y'$, $s_1 = \delta_i s$. Поэтому

$$\beta_{s_1}(i') = y' = \beta_s(i')$$

для всех i' из I , не равных i . Так как любое отображение $A_{s'}$, $s' \in S_{s_0}$, не размножает искажения типа пропуска букв, для любых $i \in I$, $s' \in S_{s_0}$ получаем, что

$$\beta_{s'_1}(i') = \beta_{s'}(i'), \quad s'_1 = \delta_i s' \quad (3)$$

для всех $i' \neq i$.

Покажем теперь, что эти равенства выполняются и при $i' = i$. Очевидно, для этого достаточно доказать, что $\beta_{s_1}(i) = \beta_s(i)$, $s_1 = \delta_i s$, при любом $i \in I$. Для доказательства последних равенств, в свою очередь, достаточно доказать, что при любом $i \in I$

$$A(s, ii) = yy$$

при некотором $y \in O$, зависящем от i .

Предположим, что нашлось $i \in I$, при котором $A(s, ii) = y_1 y_2$, $y_1 \neq y_2$. Тогда при некотором $i' \in I$, $i \neq i'$, получаем, что

$$A(s, iii') = y_1 y_2 y'$$

при некотором $y' \in O$. Используя равенства (3), находим, что

$$\beta_s(i') = \beta_{s_1}(i') = \beta_{s_2}(i') = y', \quad s_1 = \delta_i s, \quad s_2 = \delta_i \delta_i s.$$

Следовательно, учитывая инъективность отображения, получаем, что $y' \neq y_1$, $y' \neq y_2$. Если $|O| = 2$, то получено противоречие, и следовательно, доказано, что $y_1 = y_2$, то есть доказана необходимость условий теоремы 2.

Пусть $|O| \geq 3$. Нами доказано, что элементы $y_1, y_2, y_3 = y'$ различны. Справедливы равенства

$$A(s, iii') = y_1 y_2 y_3, \quad \beta_s(i') = \beta_{s_1}(i') = \beta_{s_2}(i') = y', \quad s_1 = \delta_i s, \quad s_2 = \delta_i \delta_i s.$$

Из этих равенств получаем, что

$$\begin{aligned} A(s, ii') &= y_1 y_3, \\ A(s, ii'i) &= y_1 y_3 (\beta_i \delta_{i'} \delta_i s) = y_1 y_3 \beta_{\delta_{i'} \delta_i s}(i) = y_1 y_3 \beta_{s_1}(i) = y_1 y_3 y_2, \quad s_1 = \delta_i s, \\ A(s, i'i) &= y_3 (\beta_i \delta_{i'} s) = y_3 \beta_{s'}(i) = y_3 \beta_s(i) = y_3 y_1, \quad s'_1 = \delta'_{i'} s. \end{aligned}$$

Из отношения $ii'i \varepsilon i'i$ следует отношение

$$A(s, ii'i) \varepsilon A(s, i'i),$$

однако слово $A(s, ii'i) = y_1 y_3 y_2$ не находится в бинарном отношении ε со словом $A(s, i'i) = y_3 y_1$. Полученное противоречие завершает доказательство промежуточного утверждения о том, что $y_1 = y_2$, которое, как раньше было показано, достаточно для завершения доказательства необходимости условий теоремы 3. Достаточность ее условий очевидна.

Следствие 5. Если инъективное отображение A_{s_0} не размножает искажений типа пропусков букв и $A[s_0] = (I, S_{s_0}, O, (\delta_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I})$ — приведенный автомат, то $|S_{s_0}| = 1$.

5. Описание множества $AG(I^*, O^*, D, K)$

Обозначим D метрику Левенштейна [3] на множестве $I^*(O^*)$, пусть $D(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}')$ означает минимальное число выпадений и вставок букв для получения из слова $\mathfrak{Z}$ слова $\mathfrak{Z}'$.

Определение 10. Отображение $\varphi: I^* \rightarrow O^*$ называется отображением, увеличивающим метрику D не более, чем в K раз, если для любых слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ выполняется условие

$$K D(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') \geq D(\varphi(\mathfrak{Z}), \varphi(\mathfrak{Z}')).$$

Через $AG(I^*, O^*, D, K)$ обозначим множество всех автоматных инъективных отображений $A_s: I^* \rightarrow O^*$, увеличивающих метрику D не более, чем в K раз.

Предположим, что некоторое автоматное отображение $A_{s_0}: I^* \rightarrow O^*$ увеличивает метрику D не более, чем в K раз, то есть для любых слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ выполняется условие

$$K D(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') \geq D(A_{s_0}(\mathfrak{Z}), A_{s_0}(\mathfrak{Z}')). \quad (4)$$

Следующая лемма доказывается так же, как лемма 1.

Лемма 3. *Отображение $\varphi: I^* \rightarrow O^*$ увеличивает метрику D не более, чем в K раз, тогда и только тогда, когда для любых слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' \in I^*$ из условия $D(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') = 1$ следует, что*

$$D(\varphi(\mathfrak{Z}), \varphi(\mathfrak{Z}')) \leq K.$$

Ниже дается описание множества $AG(I^*, O^*D, K)$ для $K = 1$ и $K = 2$. Случай $K \geq 3$ остается открытым.

Предложение 4. *Автоматное отображение $A_{s_0}: I^* \rightarrow O^*$ увеличивает метрику D не более, чем в 1 раз, тогда и только тогда, когда оно увеличивает бинарное отношение ε не более, чем в 1 раз.*

Доказательство. Предположим, что автоматное отображение $A_{s_0}: I^* \rightarrow O^*$ увеличивает метрику D не более, чем в 1 раз. Пусть для слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ выполняется равенство $D(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') = 1$, то есть либо $\mathfrak{Z} \varepsilon \mathfrak{Z}'$, либо $\mathfrak{Z}' \varepsilon \mathfrak{Z}$. Так как автоматное отображение сохраняет длины слов, то в первом случае из неравенства $D(A_{s_0}(\mathfrak{Z}), A_{s_0}(\mathfrak{Z}')) \leq 1$ получаем, что $A_{s_0}(\mathfrak{Z}) \varepsilon A_{s_0}(\mathfrak{Z}')$. Во втором случае получаем, что $A_{s_0}(\mathfrak{Z}') \varepsilon A_{s_0}(\mathfrak{Z})$. Следовательно (см. лемму 3), если отображение $A_{s_0}: I^* \rightarrow O^*$ увеличивает метрику D не более, чем в 1 раз, то оно увеличивает бинарное отношение ε не более, чем в 1 раз. Обратное утверждение очевидно.

Предложение 5. *Автоматное отображение $A_{s_0}: I^* \rightarrow O^*$ увеличивает метрику D не более, чем в 2 раза, тогда и только тогда, когда оно увеличивает бинарное отношение ε не более, чем в 1 раз.*

Доказательство. Предположим, что автоматное отображение $A_{s_0}: I^* \rightarrow O^*$ увеличивает метрику D не более, чем в 2 раза. Пусть для слов $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ выполняется равенство $D(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}') = 1$, то есть либо $\mathfrak{Z} \varepsilon \mathfrak{Z}'$, либо $\mathfrak{Z}' \varepsilon \mathfrak{Z}$. Так как автоматное отображение сохраняет длины слов, то в первом случае из неравенства $D(A_{s_0}(\mathfrak{Z}), A_{s_0}(\mathfrak{Z}')) \leq 2$ получаем, что $A_{s_0}(\mathfrak{Z}) \varepsilon A_{s_0}(\mathfrak{Z}')$. Во втором случае получаем, что $A_{s_0}(\mathfrak{Z}') \varepsilon A_{s_0}(\mathfrak{Z})$. Следовательно (см. лемму 3), если отображение $A_{s_0}: I^* \rightarrow O^*$ увеличивает метрику D не более, чем в 2 раза, то оно увеличивает бинарное отношение ε не более, чем в 1 раз. Обратное утверждение очевидно.

Таким образом, множества $AG(I^*, O^*, D, 1)$ и $AG(I^*, O^*, D, 2)$ совпадают с множеством автоматных инъективных отображений, сохраняющих бинарное отношение ε (см. теорему 3).

Автор благодарен С. В. Полину за полезные замечания, позволившие улучшить качество работы.

Список литературы

1. Бабаи А. В., Глухов М. М., Шанкин Г. П., О преобразованиях множества слоев в конечном алфавите, не размножающих искажений. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 3–19.
2. Глухов М. М., Инъективные отображения слов, не размножающие искажений типа пропуска букв. *Дискретная математика* (1999) **11**, №2, 20–39.
3. Левенштейн В. И., О совершенных кодах в метрике выпадений и вставок. *Дискретная математика* (1991) **3**, №1, 3–20.
4. Глухов М. М., Инъективные отображения слов, не размножающие искажений. *Матем. вопросы киберн.* (1998) **7**, 349–350.
5. Глухов М. М., Инъективные отображения слов, не размножающие искажений. *Труды по дискретной математике* (2001) **4**, 17–32.

Статья поступила 18.09.2001.