Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, Об асимптотических свойствах распределения числа пар H -связанных цепочек, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 3, 122–129

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:50:24

Об асимптотических свойствах распределения числа пар H -связанных цепочек

© 2002 г. В. Г. Михайлов

Основной результат статьи — теорема о сходимости к пуассоновскому распределению распределения числа пар H -связанных s -цепочек в двух независимых последовательностях независимых одинаково распределенных величин. Понятие H -связанности обобщает использованное рядом авторов понятие H -эквивалентности цепочек. Указаны достаточные условия сходимости, получена явная оценка скорости сходимости. При доказательстве использован локальный вариант метода Чена–Стейна оценивания точности пуассоновской аппроксимации для распределения набора зависимых случайных индикаторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02–01–00266, и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект 00–15–96136.

Пусть $X = (X_1, \dots, X_m)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ — две последовательности независимых одинаково (внутри каждой последовательности) распределенных случайных величин, принимающих значения в множестве $\{1, 2, \dots\}$,

$$p_k = \mathbf{P}\{X_1 = k\}, \quad q_k = \mathbf{P}\{Y_1 = k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ p = \max_k p_k, \quad q = \max_k q_k, \quad P = mp^s, \quad Q = nq^s.$$

Пусть задан некоторый конечный набор H взаимно однозначных отображений

$$h: \{1, 2, \dots\} \rightarrow \{1, 2, \dots\}.$$

Две цепочки $(x_1, \dots, x_s)$ и $(y_1, \dots, y_s)$ знаков алфавита $\{1, 2, \dots\}$ будем называть H -связанными, если найдется подстановка $h \in H$, для которой

$$y_i = h(x_i), \quad i = 1, \dots, s.$$

В этом определении было бы естественным считать, что $\{e\} \in H$ (e — тождественная подстановка) и $h^{-1} \in H$ для всех $h \in H$. Однако все утверждения и доказательства настоящей работы справедливы без этих предположений, поэтому мы их не используем.

Введем обозначения

$$E(i, j; h) = \{(h(X_i), \dots, h(X_{i+s-1})) = (Y_j, \dots, Y_{j+s-1})\}, \\ E(i, j) = \bigcup_{h \in H} E(i, j; h).$$

Число пар H -связанных цепочек из последовательностей X и Y выражается формулой

$$N(s, m, n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I(E(i, j))$$

(здесь и далее выражение $I(\cdot)$ обозначает индикатор случайного события или неслучайного множества). В этом определении считается, что

$$X_{m+i} = X_i, \quad Y_{n+i} = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Это предположение позволяет отчасти упростить выкладки, но не влияет на вид предельного распределения.

Рассмотрим случай, когда с ростом m, n параметры p_k, q_k, s меняются так, что математическое ожидание случайной величины $N(s, m, n)$ сходится к некоторому конечному пределу.

Введем обозначение

$$D_k = \mathbf{P}\{E(1, 1)E(1+k, 1+k)\}, \quad k = 0, 1, \dots, s-1.$$

В частности,

$$D_0 = \mathbf{P}\{E(1, 1)E(1, 1)\} = \mathbf{P}\{E(1, 1)\}.$$

Пусть

$$D = D_1 + \dots + D_{s-1}.$$

Распределение Пуассона с параметром λ условимся обозначать $\text{Po}(\lambda)$.

Теорема 1. Пусть параметры схемы $m, n \rightarrow \infty$, а $p_k, q_k, k = 1, 2, \dots$, меняются так, что

$$\mathbf{E}N(s, m, n) = mnD_0 \rightarrow \lambda < \infty, \quad (1)$$

$$mnD + s|H|(P + Q) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Тогда

$$\mathcal{L}(N(s, m, n)) \rightarrow \text{Po}(\lambda).$$

Если же

$$mnD_0 \rightarrow \infty, \quad DD_0^{-1} + s|H|(P + Q) \rightarrow 0,$$

то функция распределения случайной величины

$$(N(s, m, n) - mnD_0)(mnD_0)^{-1/2}$$

сходится к стандартной нормальной функции распределения.

Следующая теорема дает оценку близости распределения случайной величины $N(s, m, n)$ к сопровождающему пуассоновскому распределению. Обозначим через $\rho(F, G)$ расстояние по вариации между распределениями F и G . Для распределений, сосредоточенных на $\{0, 1, \dots\}$, оно выражается формулой

$$\rho(F, G) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |F\{k\} - G\{k\}|.$$

Теорема 2. Пусть $m, n \geq 2s - 1$. Тогда

$$\rho(\mathcal{L}(N(s, m, n)), \text{Po}(mnD_0)) \leq (1 - e^{-mnD_0})(2mnD(mnD_0))^{-1} + 2(2s - 1)|H|(P + Q) + (2s - 1)^2(mnD_0)^{-1}|H|^2PQ. \quad (3)$$

Замечание 1. Можно рассматривать пары H -связанных цепочек в одной единственной последовательности X . Эти события будем называть H -повторениями. Число $M(s, m)$ H -повторений s -цепочек в последовательности X выражается формулой

$$M(s, m) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} I(\exists h \in H: (h(X_i), \dots, h(X_{i+s-1})) = (X_j, \dots, X_{j+s-1})).$$

Можно показать, что при аналогичных предположениях предельные распределения случайных величин $N(s, m, n)$ и $M(s, m)$ совпадают. А именно, для числа $M(s, m)$ имеет место следующий аналог теоремы 1 (приводим его без доказательства).

Теорема 3. Пусть $m \rightarrow \infty$, а $p_k, k = 1, 2, \dots$, меняются так, что

$$\binom{m}{2} D_0 \rightarrow \lambda < \infty, \quad m^2 D + s|H|P \rightarrow 0 \quad (4)$$

с естественными изменениями в определениях D_0 и D . Тогда

$$\mathcal{L}(M(s, m)) \rightarrow \text{Po}(\lambda).$$

Если же

$$\binom{m}{2} D_0 \rightarrow \infty, \quad DD_0^{-1} + s|H|P \rightarrow 0,$$

то функция распределения случайной величины

$$(M(s, m) - m^2 D_0 / 2)(m^2 D_0 / 2)^{-1/2}$$

сходится к стандартной нормальной функции распределения.

Замечание 2. В работах С. М. Буравлева [2–4] и А. М. Шойтова [5, 6] рассматривалось отношение эквивалентности на N^s такое, что эквивалентными считаются цепочки, для которых найдется перестановка букв алфавита N из некоторого заданного подмножества $H = \{Z_1, \dots, Z_k\}$ множества (группы) всех подстановок на N , которая переводит одну цепочку в другую. В [5] такие цепочки были названы H -эквивалентными. При $H = \{e\}$ (напомним, что e — тождественная подстановка), H -эквивалентными будут только совпадающие цепочки. Этот случай рассматривался в работах [8–10]. В работах [2–5] исследовалось число $\xi(H; s, n)$ пар H -эквивалентных s -цепочек в последовательности $X = (X_1, \dots, X_m)$ в случае, когда H является набором из k подстановок, нижние строки которых (будучи выписаны одна под другой) образуют латинский прямоугольник.

Замечание 3. Предположение о том, что H является группой, необходимо для того, чтобы индуцируемое множеством подстановок H отношение было отношением эквивалентности.

Замечание 4. Из величин, участвующих в формулировках теорем 1 и 2, наиболее сложно вычисляются D_0 и D . Чтобы обсудить способы их оценивания, рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть распределения $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ сосредоточены на множестве $\{1, \dots, N\}$, причем распределение $\{q_k\}$ на нем равновероятно: $q_1 = \dots = q_N = 1/N$. Тогда

$$D_k \leq \frac{|H|}{N^{s+k}}, \quad k = 0, 1, \dots, s-1, \quad D < \frac{|H|}{N^s(N-1)}.$$

Если при этом множество H удовлетворяет условию

$$|\{h \in H : h(x) = y\}| \leq 1, \quad x, y \in \{1, \dots, N\}, \quad (5)$$

то

$$D_k = |H|N^{-s-k}, \quad k = 0, 1, \dots, s-1.$$

Используя эти свойства, из теоремы 1 нетрудно получить следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть элементы последовательностей X и Y распределены на множестве $\{1, \dots, N\}$ равновероятно:

$$p_k = q_k = 1/N, \quad k = 1, \dots, N,$$

а множество H удовлетворяет условию (5). Если

$$\frac{mn|H|}{N^s} \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad \frac{s}{m} + \frac{s}{n} \rightarrow 0, \quad (6)$$

то

$$\mathcal{L}(N(s, m, n)) \rightarrow \text{Po}(\lambda).$$

Замечание 5. Последнее соотношение в (6) будет выполнено, если выполнено первое соотношение и

$$\frac{\ln n}{m} + \frac{\ln m}{n} = o(\ln N). \quad (7)$$

Условие (7) является своего рода условием соразмерности длин последовательностей.

Вернемся к задаче об H -связанных цепочках. Каждому набору

$$(i, j), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

сопоставим случайную величину

$$W(i, j) = I(E(i, j)). \quad (8)$$

Тогда

$$N(s, m, n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W(i, j). \quad (9)$$

Обозначим через W набор случайных величин $\{W(i, j)\}_{\Gamma}$ на множестве

$$\Gamma = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Пусть $\Pi = \{\Pi(i, j)\}_{\Gamma}$ — набор независимых случайных величин, имеющих распределения Пуассона с параметрами $\mathbf{E}\Pi(i, j) = \mathbf{E}W(i, j)$.

Теорема 4. Пусть параметры $m, n \geq 2s - 1$. Тогда

$$\rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\Pi)) \leq 2mnD + 2(2s - 1)\lambda|H|(P + Q) + (2s - 1)^2|H|^2PQ. \quad (10)$$

Доказательство. Для элементов $(i, j) \in \Gamma$ будем использовать обозначение $a = (i, j)$. Рассмотрим множество

$$\Gamma_a^{\text{ind}} = \{a' \in \Gamma: |i' - i| \geq s, |j' - j| \geq s\}.$$

Нетрудно проверить, что случайная величина $W(a)$ не зависит от совокупности случайных величин $\{W(a'), a' \in \Gamma_a^{\text{ind}}\}$. Положим

$$\Gamma_a = (\Gamma \setminus \{a\}) \setminus \Gamma_a^{\text{ind}}. \quad (11)$$

Воспользуемся теоремой 10.A из [11], из которой следует, что

$$\rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\Pi)) \leq \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a)(\mathbf{E}W(a) + \mathbf{E}U(a)) + \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a)U(a), \quad (12)$$

где

$$U(a) = \sum_{a' \in \Gamma_a} W(a').$$

Чтобы оценить первую сумму в правой части (12), заметим, что

$$|\{a\} \cup \Gamma_a| = |\Gamma \setminus \Gamma_a^{\text{ind}}| = mn - (m - 2s + 1)(n - 2s + 1).$$

Кроме того,

$$\lambda(m, n) = mn\mathbf{E}W(a) = mnD_0, \quad mD_0 \leq |H|P, \quad nR_0 \leq |H|Q.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a)(\mathbf{E}W(a) + \mathbf{E}U(a)) &\leq (2s - 1)\lambda(m, n)^2(m^{-1} + n^{-1}) \\ &\leq (2s - 1)\lambda|H|(P + Q). \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим вторую сумму в правой части (12). Введем множества

$$\begin{aligned} \Gamma_a^s &= \{a' = (i', j') \in \Gamma_a: -s < i' - i = j' - j < s\}, \\ \Gamma_a^* &= \Gamma_a \setminus \Gamma_a^s, \\ \Gamma_a^{**} &= \{a' \in \Gamma_a^*: 0 < |i' - i| < s, 0 < |j' - j| < s\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Лемма 1. Пусть $a \in \Gamma$. При $a' \in \Gamma_a^* \setminus \Gamma_a^{**}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}W(a)W(a') &\leq |H|q^s\mathbf{E}W(a), \quad \text{если } 0 < |i' - i| < s, \\ \mathbf{E}W(a)W(a') &\leq |H|p^s\mathbf{E}W(a), \quad \text{если } 0 < |j' - j| < s. \end{aligned}$$

При $a' \in \Gamma_a^{**}$ имеет место неравенство

$$\mathbf{E}W(a)W(a') \leq |H|^2p^sq^s.$$

Доказательство леммы 1. Первое утверждение почти очевидно. Поэтому мы ограничимся доказательством второго утверждения.

Воспользуемся схемой доказательства леммы 2 из работы [8]. Выберем некоторые $a = (i, j) \in \Gamma$ и $a' = (i', j') \in \Gamma_a^{**}$. Рассмотрим двудольный граф $G = G(a, a')$ с множеством вершин

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2, \\ V_1 &= \{i + 1, \dots, i + s - 1\} \cup \{i' + 1, \dots, i' + s - 1\}, \\ V_2 &= \{j + 1, \dots, j + s - 1\} \cup \{j' + 1, \dots, j' + s - 1\}, \end{aligned}$$

и множеством из $2s$ ребер

$$E = \{(i + k - 1, j + k - 1), (i' + k - 1, j' + k - 1) : k = 1, \dots, s\}.$$

Граф $G = G(a, a')$ не имеет циклов и состоит из связных компонент, представляющих собой простые цепи, в которых чередуются вершины из V_1 и V_2 . Обозначим через N_{s_1, s_2} число цепей с s_1 вершинами в V_1 и с s_2 вершинами в V_2 , $|s_1 - s_2| \leq 1$. Цепь с s_1 вершинами в V_1 и с s_2 вершинами в V_2 имеет $s_1 + s_2 - 1$ ребер, поэтому

$$\sum_{s_1, s_2} (s_1 + s_2 - 1) N_{s_1, s_2} = 2s. \quad (15)$$

Докажем неравенство

$$\mathbf{E}W(i, j; h)W(i', j'; h') = \mathbf{P}\{E(i, j; h)E(i', j'; h')\} \leq p^s q^s. \quad (16)$$

Событие, указанное в (16), состоит в выполнении системы равенств

$$Y_{j+k} = h(X_{i+k}), \quad Y'_{j'+k} = h'(X'_{i'+k}), \quad k = 1, \dots, s. \quad (17)$$

Равенства в этой системе можно разбить на группы равенств, каждая из которых соответствует своей цепи графа G . А именно, цепи

$$\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_r, \beta_r, \alpha_{r+1}$$

в графе G (в этом случае $s_1 = r + 1, s_2 = r$) отвечает набор равенств

$$h(X_{\alpha_k}) = Y_{\beta_k}, \quad Y_{\beta_k} = h'(X_{\alpha_{k+1}}), \quad k = 1, \dots, r. \quad (18)$$

В этой системе значение X_{α_1} однозначно определяет остальные значения всех переменных системы. Поэтому вероятность выполнения этой системы равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k q_{\phi_1(k)} \dots q_{\phi_{2r-1}} p_{\phi_{2r}} \leq (pq)^r \sum_{k=1}^{\infty} p_k = (pq)^{(s_1+s_2-1)/2}.$$

Здесь использованы обозначения

$$\phi_1 = h, \quad \phi_2 = h(h')^{-1}, \dots, \phi_{2r} = h(h')^{-1} \dots h(h')^{-1}.$$

Такая же оценка получается и для случая $s_2 = s_1 + 1$. При $s_1 = s_2 = r$ для цепи вида

$$\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_r, \beta_r$$

получаем набор равенств, аналогичный набору (18), но без последнего равенства. В этом случае вероятность выполнения такого набора равенств равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k q_{\phi_1(k)} \cdots q_{\phi_{2r-1}(k)} \leq (pq)^{r-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{p_k q_{\phi_1(k)}} \leq (pq)^{(s_1+s_2-1)/2}.$$

Аналогично рассматриваются цепочки, начинающиеся с β_1 .

События, относящиеся к разным подсистемам (18), независимы. Поэтому вероятность выполнения системы (17) равна произведению вероятностей выполнения подсистем типа (18), отвечающих цепям графа G . Поэтому в силу (15) получаем (16):

$$\mathbf{P}\{E(i, j; h)E(i', j'; h')\} \leq \prod_{s_1, s_2} (pq)^{(s_1+s_2-1)/2} = p^s q^s.$$

Осталось воспользоваться очевидным неравенством

$$\mathbf{E}W(i, j)W(i', j') \leq \sum_{h, h' \in H} \mathbf{E}W(i, j; h)W(i', j'; h').$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 4. Из определений следует неравенство

$$\sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_a^s} \mathbf{E}W(a)W(a') \leq 2mn(D_1 + \dots + D_{s-1}) = 2mnR.$$

Используя лемму 1, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_a^* \setminus \Gamma_a^{**}} \mathbf{E}W(a)W(a') &\leq (2s-1)|H|\lambda(mp^s + nq^s), \\ \sum_{a \in \Gamma} \sum_{a' \in \Gamma_a^{**}} \mathbf{E}W(a)W(a') &\leq (2s-1)^2|H|^2 mnp^s q^s. \end{aligned}$$

Подставив эти оценки вместе с (13) в (12), приходим к неравенству (10). Теорема 4 доказана.

Теорема 2 доказывается аналогично, но ее доказательство опирается не на неравенство (12), а на неравенство

$$\begin{aligned} &\rho(\mathcal{L}(N(s, m, n))), \text{Po}(\lambda(m, n)) \\ &\leq \frac{1 - e^{-\lambda(m, n)}}{\lambda(m, n)} \left(\sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a)(\mathbf{E}W(a) + \mathbf{E}U(a)) + \sum_{a \in \Gamma} \mathbf{E}W(a)U(a) \right) \end{aligned}$$

(см. [11], теорема 1.A).

Теорема 1 является очевидным следствием теоремы 2.

Список литературы

1. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний. *Дискретная математика* (1999) **11**, №1, 53–75.
2. Буравлев С. М., Предельные теоремы для случайных величин от числа пар отрезков, связанных подстановками из латинского прямоугольника. *Тезисы докл. Третьей Всероссийской школы-коллоквиум по стохастическим методам*. ТВП, Москва, 1996, 37–40.
3. Буравлев С. М., Локальная асимптотическая нормальность числа пар отрезков последовательности, связанных подстановками из латинского прямоугольника. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1998) **5**, №2, 205–207.
4. Буравлев С. М., Уточнение одного предельного распределения. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1999) **6**, №1, 127–128.
5. Шойтов А. М., Предельные распределения числа наборов H -эквивалентных отрезков в последовательности независимых испытаний. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1999) **6**, №1, 218–220.
6. Шойтов А. М., Связь отрезков отношением H -эквивалентности в схеме серий. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1999) **6**, №1, 220–221.
7. Михайлов В. Г., Предельная теорема Пуассона для числа H -совпадений цепочек. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (2000) **7**, №1, 123–124.
8. Зубков А. М., Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) **19**, №1, 173–181.
9. Зубков А. М., Михайлов В. Г., О повторениях s -цепочек в последовательности независимых величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1979) **24**, №2, 267–279.
10. Михайлов В. Г., Оценка точности сложной пуассоновской аппроксимации для распределения числа совпадающих цепочек. *Теория вероятностей и ее применения* (2001) **46**, №4, 713–723.
11. Barbour A. D., Holst L., Janson S., *Poisson approximation*. Oxford University Press, Oxford, 1992.

Статья поступила 08.01.2002.