Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Селиванов, Семейство многомерных статистик хи-квадрат, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 3, 130–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:02:04

Семейство многомерных статистик хи-квадрат

© 2002 г. Б. И. Селиванов

Рассматривается последовательность независимых испытаний, которая согласно гипотезе H_0 есть реализация некоторой полиномиальной схемы. Определяется семейство многомерных статистик хи-квадрат, включающее в себя статистики последовательного критерия хи-квадрат. Сформулированы условия, обеспечивающие сходимость распределений рассматриваемых статистик к предельным как при гипотезе H_0 , так и при альтернативах, континуальных к H_0 . Найден вид преобразований Лапласа предельных распределений статистик введенного семейства.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований при Президенте РФ по грантам и государственной поддержке ведущих научных школ, проект 00-15-96136.

1. Введение

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \quad (1)$$

принимающих N значений $1, 2, \dots, N$. Число N в дальнейшем предполагаем фиксированным. Будем предполагать фиксированной также нулевую гипотезу H_0 , согласно которой каждая из случайных величин имеет полиномиальное распределение с вероятностями исходов, равными соответственно $p_1, \dots, p_N$, где

$$0 < p_i < 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

В работах [1, 2] в связи с задачей проверки гипотезы H_0 введены две различные многомерные статистики хи-квадрат. При условии, что справедлива гипотеза H_0 , в [1, 2] с использованием метода, предложенного в [1], для рассматриваемых статистик доказано существование предельных распределений и найдены их преобразования Лапласа. В обоих случаях предельные распределения принадлежат известному классу многомерных центральных распределений хи-квадрат. Для статистики последовательного критерия хи-квадрат, определенной в [1], для альтернатив, сближающихся с H_0 , в [1] получено предельное распределение, принадлежащее классу нецентральных многомерных распределений хи-квадрат. Определение многомерных распределений хи-квадрат, как центральных, так и нецентральных, можно найти, например, в [3]. Близкое к нему определение приведено ниже в разделе 3.

В разделе 2 настоящей работы определено семейство многомерных статистик хи-квадрат, включающее упомянутые статистики из работ [1, 2], и введены альтернативы к H_0 , порождающие, в общем случае, неоднородные последовательности (1) независимых случайных величин. Из множества всех этих альтернатив выделяются альтернативы, контигуальные в смысле Ле Кама (см., например, [4], гл. 6) к гипотезе H_0 . В разделе 2 формулируются также некоторые условия, которые накладываются на параметры статистик семейства хи-квадрат, и доказываются вспомогательные утверждения, используемые в разделе 3 при доказательстве предельных теорем.

В разделе 3 найдены также преобразования Лапласа для предельных распределений статистик рассматриваемого семейства. Показано, что полученные предельные распределения принадлежат классу многомерных распределений хи-квадрат, центральных, если справедлива гипотеза H_0 , и нецентральных, если выполняются альтернативы, контигуальные к H_0 . При этом используется подход, описанный в параграфах 2, 3 работы [1] и применяются некоторые известные результаты о распределениях квадратичных форм от нормальных случайных величин.

2. Определения и вспомогательные результаты

Зададим $r \geq 1$ конечных непустых множеств натуральных чисел $A_1, \dots, A_r$. Положим

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r, \quad A_{kl} = A_k \cap A_l, \\ \Delta = |A|, \quad \Delta_k = |A_k|, \quad \Delta_{kl} = |A_{kl}|, \quad k, l = 1, \dots, r,$$

где $|M|$ — число элементов множества M . Пусть далее v_{ki} — число появлений исхода $i \in \{1, \dots, N\}$ в испытаниях (1) с номерами $m \in A_k$, $k = 1, \dots, r$. Введем случайные величины

$$\tilde{\xi}_{ki} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k p_i}} (v_{ki} - \Delta_k p_i), \quad k = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

и случайный вектор

$$\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_{11}, \dots, \tilde{\xi}_{1N}; \dots; \tilde{\xi}_{r1}, \dots, \tilde{\xi}_{rN}), \quad (3)$$

составленный из r блоков

$$(\tilde{\xi}_{k1}, \dots, \tilde{\xi}_{kN}), \quad k = 1, \dots, r.$$

С использованием случайных величин (2) определим r -мерную статистику хи-квадрат

$$\chi^2 = (\chi_1^2, \dots, \chi_r^2) \quad (4)$$

с компонентами

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_{ki}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Delta_k p_i} (v_{ki} - \Delta_k p_i)^2, \quad k = 1, \dots, r. \quad (5)$$

Компоненты статистики χ^2 зависят от выбора множеств $A_1, \dots, A_r$. Задавая различные наборы этих множеств, получим семейство r -мерных статистик хи-квадрат. В дальнейшем, говоря, что задана r -мерная статистика χ^2 , будем иметь ввиду, что заданы и множества $A_1, \dots, A_r$, определяющие компоненты χ^2 .

При $r \geq 2$ статистика (4) позволяет построить, как и в [1], последовательный r -кратный критерий хи-квадрат. Частными случаями векторной статистики (4) являются

- классическая статистика χ^2 К. Пирсона (при $r = 1$, $A_1 = \{1, \dots, n\}$);
- статистика, введенная в [1], в этом случае

$$A_k = \{1, \dots, n_k\}, \quad k = 1, \dots, r, \quad i \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r, \quad r \geq 2;$$

- статистика, введенная в [2] и названная скользящим хи-квадрат, где

$$A_k = \{n(t_k - 1) + 1, \dots, n(t_k + s - 1)\}, \quad k = 1, \dots, r,$$

$r \geq 2$, $1 \leq t_1 < \dots < t_r$, $n \geq 1$ и $s \geq 2$ – фиксированные целые числа.

Если множества $A_1, \dots, A_r$ попарно не пересекаются, то компоненты статистики (4) независимы.

Рассмотрим последовательность полиномиальных схем с векторами вероятностей

$$\bar{p} = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n, \dots\}, \quad (6)$$

где для $n = 1, 2, \dots$

$$\bar{p}_n = (p_1(n), \dots, p_N(n)), \quad 0 \leq p_i(n) \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N p_i(n) = 1. \quad (7)$$

Будем говорить, что выполняется (простая) гипотеза $H(\bar{p})$, если в n -м испытании (1) реализуется полиномиальная схема (7), $n = 1, 2, \dots$

В случае

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \dots = \bar{p}_n = \dots = p, \quad p = (p_1, \dots, p_N)$$

выполняется гипотеза $H(\bar{p}) = H_0$. Если же в (6) $\bar{p}_n \neq p$ для некоторого $n \geq 1$, то гипотезу $H(\bar{p}) \neq H_0$ будем называть альтернативой к нулевой гипотезе. В настоящей работе в качестве альтернатив $H(\bar{p})$ мы будем рассматривать лишь те, которые континуальны в смысле Ле Кама [4] к гипотезе H_0 .

Имеет место следующее предложение, частными случаями которого являются равенства (2), (4) из [1] и лемма 1 из [2].

Лемма 1. Пусть последовательность (1) получена при гипотезе $H(\bar{p})$. Тогда для случайных величин (2) выполняются равенства

$$\mathbb{E}\tilde{\xi}_{ki} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k p_i}} \sum_{m \in A_k} (p_i(m) - p_i), \quad (8)$$

$$\text{cov}(\tilde{\xi}_{ki}, \tilde{\xi}_{lj}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k \Delta_l p_i p_j}} \sum_{m \in A_{kl}} p_i(m)(\delta_{ij} - p_j(m)), \quad (9)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $k, l = 1, \dots, r$, $i, j = 1, \dots, N$.

В частности,

$$\mathbb{D}\tilde{\xi}_{ki} = \frac{1}{\Delta_k p_i} \sum_{m \in A_k} p_i(m)(1 - p_i(m)).$$

Доказательство. Равенства (8) следуют непосредственно из (2). Далее заметим, что

$$\text{cov}(\tilde{\xi}_{ki}, \tilde{\xi}_{lj}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k p_i \Delta_l p_j}} \mathbf{E}(v_{ki} - \mathbf{E}v_{ki})(v_{lj} - \mathbf{E}v_{lj}), \quad (10)$$

и

$$\mathbf{E}(v_{ki} - \mathbf{E}v_{ki})(v_{lj} - \mathbf{E}v_{lj}) = \sum_{m \in A_k, n \in A_l} \mathbf{E}(I\{X_m = i\} - p_i(m))(I\{X_n = j\} - p_j(n)), \quad (11)$$

где $I\{B\}$ — индикатор события B . Если $m \neq n$, то выражение под знаком суммы в правой части (11) равно нулю, и (11) приводится к виду

$$\mathbf{E}(v_{ki} - \mathbf{E}v_{ki})(v_{lj} - \mathbf{E}v_{lj}) = \sum_{m \in A_{kl}} \mathbf{E}(I\{X_m = i\} - p_i(m))(I\{X_m = j\} - p_j(m)).$$

Отсюда и из (10) следует (9). Лемма доказана.

Следствие 1. Если выполняется гипотеза H_0 , то для случайных величин (2) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tilde{\xi}_{ki} &= 0, \\ \text{cov}(\tilde{\xi}_{ki}, \tilde{\xi}_{lj}) &= \frac{\Delta_{kl}}{\sqrt{\Delta_k \Delta_l}} (\delta_{ij} - \sqrt{p_i p_j}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $i, j = 1, \dots, N$, $k, l = 1, \dots, r$.

Будем предполагать, что имеет место следующая схема серий: каждое из множеств A_k зависит от переменной ω , пробегающей значения $1, 2, \dots$. Следовательно, от ω зависят также величины Δ , Δ_k , Δ_{kl} , множество A и статистика (4). Кроме того, будем предполагать, что от ω зависят вероятности $p_i(m)$, $i = 1, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots$, (см. (7)) и тем самым альтернативы $H(\bar{p})$ к нулевой гипотезе. Эту зависимость от ω мы не всегда будем явно указывать. Нас интересуют асимптотические при $\omega \rightarrow \infty$ распределения статистик (4) как при гипотезе H_0 , так и при альтернативах $H(\bar{p})$ к гипотезе H_0 .

Пусть выполняются следующие условия F_1 , F_2 и F_3 .

(F_1) Если $\omega \rightarrow \infty$, то $\Delta_k \rightarrow \infty$, $k = 1, \dots, r$.

(F_2) Существуют пределы

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{kl}}{\sqrt{\Delta_k \Delta_l}} = \rho_{kl}, \quad 0 \leq \rho_{kl} \leq 1, \quad k, l = 1, \dots, r, \quad k \neq l.$$

Заметим, что если $k = l$, то $\rho_{kk} = 1$, $k = 1, \dots, r$, и условие F_2 заведомо выполняется.

(F_3) Выполняется соотношение

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\Delta} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} (p_i(m) - p_i)^2 < \infty.$$

Смысл условия F_3 заключается в том, что в силу конечности числа исходов N в испытаниях (1) альтернатива $H(\bar{p})$ будет контигуальна к H_0 тогда и только тогда, когда выполняется это условие (см., например, [5], §7). Величина

$$\Delta = \left| \bigcup_{k=1}^r A_k \right|$$

фактически является объемом выборки, с использованием которой строится статистика (4).

Лемма 2. Пусть случайные величины (1) получены в предположении, что верна гипотеза H_0 , и выполняются условия F_1 и F_2 . Тогда при $\omega \rightarrow \infty$ случайный вектор с компонентами (2) сходится по распределению к rN -мерному нормальному случайному вектору

$$\xi = (\xi_{11}, \dots, \xi_{1N}; \dots; \xi_{r1}, \dots, \xi_{rN}), \quad (13)$$

имеющему нулевой вектор средних значений и ковариационную матрицу $D = ||d_{k,i,l,j}||$ порядка rN с элементами

$$d_{k,i,l,j} = \text{cov}(\xi_{ki}, \xi_{lj}) = \rho_{kl}(\delta_{ij} - \sqrt{p_i p_j}), \quad k, l = 1, \dots, r, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Доказательство. Для каждого $k = 1, \dots, r$ зададим N векторов вида

$$\begin{aligned} z_{k1} &= \left(\frac{1-p_1}{\sqrt{\Delta_k p_1}}, -\frac{p_2}{\sqrt{\Delta_k p_2}}, \dots, -\frac{p_N}{\sqrt{\Delta_k p_N}} \right), \\ z_{k2} &= \left(-\frac{p_1}{\sqrt{\Delta_k p_1}}, \frac{1-p_2}{\sqrt{\Delta_k p_2}}, \dots, -\frac{p_N}{\sqrt{\Delta_k p_N}} \right), \\ &\dots \\ z_{kN} &= \left(-\frac{p_1}{\sqrt{\Delta_k p_1}}, -\frac{p_2}{\sqrt{\Delta_k p_2}}, \dots, \frac{1-p_N}{\sqrt{\Delta_k p_N}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, для каждого $n = 1, 2, \dots$ определим множество

$$M(n) \subseteq J_r = \{1, \dots, r\},$$

включив в $M(n)$ элемент $k \in J_r$ тогда и только тогда, когда $n \in A_k$. Ясно, что $M(n) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $n \in A$, и имеет место равенство

$$\tilde{\xi} = \sum_{n \in A} \zeta_n \quad (16)$$

(напомним, что $\tilde{\xi}$ — случайный вектор (3)). Каждый вектор ζ_n из правой части (16), как и $\tilde{\xi}$, имеет r блоков по N компонент. Ненулевыми в ζ_n являются лишь $t_n = |M(n)|$ блоков с номерами $k \in M(n)$. Если в (1) $X_n = i$, то в ζ_n блок с номером $k \in M(n)$ полагаем равным z_{ki} -му из векторов (15). Остальные блоки ζ_n нулевые. Таким образом, векторы ζ_n в сумме (16) с вероятностями $p_1, \dots, p_N$ принимают N значений, зависящих от множеств $M(n)$.

В силу условия F_1 число слагаемых в сумме (16) неограниченно возрастает и к вектору $\tilde{\xi}$ применима многомерная центральная предельная теорема (см., например, [6]). Используя лемму 1 и условие F_2 , убеждаемся в справедливости леммы 2.

Лемма 3. Пусть случайные величины (1) получены в предположении, что верна некоторая альтернатива (6) к H_0 и справедливы условия F_1, F_2 , и F_3 . Тогда при $\omega \rightarrow \infty$ случайный вектор

$$\xi = (\xi_{11}^{(1)}, \dots, \xi_{1N}^{(1)}; \dots; \xi_{r1}^{(1)}, \dots, \xi_{rN}^{(1)}) \quad (17)$$

с компонентами

$$\xi_{ki}^{(1)} = \frac{v_{ki} - \sum_{m \in A_k} p_i(m)}{\sqrt{\Delta_k p_i}}, \quad k = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, N, \quad (18)$$

сходится по распределению к rN -мерному нормальному случайному вектору (13), определенному в формулировке леммы 2.

Доказательство. Покажем, что для случайных величин (18) выполняются соотношения

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{cov}(\xi_{ki}^{(1)}, \xi_{lj}^{(1)}) = d_{k,i,l,j}, \quad k, l = 1, \dots, r, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (19)$$

где величины $d_{k,i,l,j}$ определяются равенствами (14). Зафиксировав k, l, i и $j, 1 \leq k, l \leq r, 1 \leq i, j \leq N$, напомним неравенство

$$\begin{aligned} |\text{cov}(\xi_{ki}^{(1)}, \xi_{lj}^{(1)}) - d_{k,i,l,j}| &\leq \left| \text{cov}(\xi_{ki}^{(1)}, \xi_{lj}^{(1)}) - \frac{\Delta_{kl}}{\sqrt{\Delta_k \Delta_l}} (\delta_{ij} - \sqrt{p_i p_j}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{\Delta_{kl}}{\sqrt{\Delta_k \Delta_l}} - \rho_{kl} \right| |\delta_{ij} - \sqrt{p_i p_j}|. \end{aligned} \quad (20)$$

В силу условия F_2 при $\omega \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{\Delta_{kl}}{\sqrt{\Delta_k \Delta_l}} - \rho_{kl} \right| |\delta_{ij} - \sqrt{p_i p_j}| \rightarrow 0. \quad (21)$$

Далее, учитывая, что $\text{cov}(\xi_{ki}^{(1)}, \xi_{lj}^{(1)}) = \text{cov}(\tilde{\xi}_{ki}, \tilde{\xi}_{lj})$, где случайные величины $\xi_{ki}^{(1)}, \xi_{lj}^{(1)}$ и $\tilde{\xi}_{ki}, \tilde{\xi}_{lj}$ определяются равенствами (18) и (2), соответственно, и используя лемму 1, получим для первого слагаемого из правой части неравенства (20) оценку

$$\left| \text{cov}(\xi_{ki}^{(1)}, \xi_{lj}^{(1)}) - \frac{\Delta_{kl}}{\Delta_k \Delta_l} (\delta_{ij} - \sqrt{p_i p_j}) \right| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad (22)$$

где

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k \Delta_l p_i p_j}} \sum_{m \in A_{kl}} p_i(m) |p_j(m) - p_j|,$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k \Delta_l p_i p_j}} \sum_{m \in A_{kl}} p_j(m) |p_i(m) - p_i|,$$

$$\Sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k \Delta_l p_i p_j}} \sum_{m \in A_{kl}} \delta_{ij} |p_i(m) - p_i|.$$

Докажем, что правая часть неравенства (22) при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Рассмотрим, например, слагаемое Σ_1 . Применяя неравенство Коши–Буняковского и учитывая, что $\Delta_{kl}/\Delta_k \leq 1$, получаем оценку

$$\Sigma_1 \leq \left(\frac{K_0}{\Delta_l} \sum_{m \in A_{kl}} \frac{1}{p_j} (p_j(m) - p_j)^2 \right)^{1/2}, \quad (23)$$

где

$$K_0 = \max_{1 \leq i \leq N} (1/p_i), \quad 0 < K_0 < \infty.$$

Воспользуемся теперь условием F_3 , из которого следует существование константы $K > 0$ такой, что для всех $j = 1, \dots, N$ выполняются неравенства

$$\sum_{m \in A_{kl}} \frac{1}{p_j} (p_j(m) - p_j)^2 < K.$$

Отсюда в силу F_1 и оценки (23) вытекает, что при $\omega \rightarrow \infty$

$$\Sigma_1 \rightarrow 0. \quad (24)$$

Аналогично доказываем, что при $\omega \rightarrow \infty$

$$\Sigma_2 \rightarrow 0, \quad \Sigma_3 \rightarrow 0. \quad (25)$$

В итоге из (20), (21), (22), (24) и (25) следует справедливость соотношения (19).

Оставшаяся часть доказательства леммы 3, касающаяся асимптотической нормальности вектора (17), проводится так же, как и в лемме 2.

3. Предельные теоремы

Приведем определение многомерного распределения хи-квадрат, аналогичное определению из [3].

Обозначим через $N_r(a, R)$ r -мерное нормальное распределение с вектором средних значений a и ковариационной матрицей R . Пусть даны $s \geq 1$ независимых случайных векторов $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{ir})$, $i = 1, \dots, s$, и u_i имеет распределение $N_r(a_i, R)$, где матрица R неотрицательно определена и $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{ir})$, $i = 1, \dots, r$. Тогда, если $a_1 = \dots = a_s = 0$, то распределение вектора

$$v = (v_1, \dots, v_r), \quad v_k = \sum_{i=1}^s u_{ik}^2, \quad k = 1, \dots, r, \quad (26)$$

называется r -мерным центральным распределением хи-квадрат. Если же не все векторы $a_1, \dots, a_s$ являются нулевыми, то распределение v называется нецентральным распределением хи-квадрат.

Отличие данного определения от того, которое можно найти в [3], заключается в отсутствии требования положительной определенности ковариационной матрицы случайного вектора $u_1, \dots, u_s$.

Обозначим I единичную матрицу порядка r и пусть $T = \text{diag}\{t_1, \dots, t_r\}$, где $t_k \geq 0$, $k = 1, \dots, r$. Определитель матрицы B будем обозначать $|B|$, а штрих у вектора будет означать его транспонирование.

Лемма 4. Для преобразования Лапласа

$$l(t_1, \dots, t_r) = \mathbf{E} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^r t_k v_k \right\} \quad (27)$$

случайного вектора (26) справедливы представления

$$l(t_1, \dots, t_r) = |I + 2TR|^{-s/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^s a_i Q a_i' \right\} \quad (28)$$

$$= |I + 2TR|^{-s/2} \exp \left\{ - \sum_{k,l=1}^r \alpha_{kl} q_{kl} \right\}, \quad (29)$$

где

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=1}^r a_{ik} a_{il}, \quad k, l = 1, \dots, r, \quad (30)$$

$$Q = \|q_{kl}\|_{k,l=1}^r = (I + 2TR)^{-1} T. \quad (31)$$

Доказательство. В силу независимости случайных векторов $u_1, \dots, u_s$ из (26) и (27) вытекает, что

$$l(t_1, \dots, t_r) = \prod_{i=1}^s \mathbf{E} e^{-u_i T u_i'}. \quad (32)$$

Применим к сомножителям из правой части (32) теорему из [7] (см. [7], с. 103) и получим равенство (28), где Q_r — матрица (31). Так как

$$a_i Q a_i' = \sum_{k,l=1}^r a_{ik} a_{il} q_{kl}, \quad i = 1, \dots, s,$$

из (28) следует (29).

Формулу (28) в случае положительной определенности матрицы R можно найти в [3].

Согласно лемме 4 многомерное центральное распределение хи-квадрат задается параметрами r, s и матрицей R , а многомерное нецентральное хи-квадрат распределение, кроме того, зависит от $r(r+1)/2$ величин α_{kl} , удовлетворяющих соотношениям (30). Эти соотношения, если их рассматривать как уравнения относительно неизвестных a_{ik} , $i = 1, \dots, s$, $k = 1, \dots, r$, могут быть несовместны или иметь несколько решений, каждому из которых соответствует набор нормальных случайных векторов $u_1, \dots, u_s$ с ковариационной матрицей R .

Теорема 1. Пусть случайные величины (1) получены в предположении, что верна гипотеза H_0 , и выполняются условия F_1 и F_2 . Тогда при $\omega \rightarrow \infty$ статистика (4) имеет предельное распределение, преобразование Лапласа которого имеет вид

$$L_r(t_1, \dots, t_r) = |I + 2TR|^{-(N-1)/2}, \quad (33)$$

где $t_1, \dots, t_r \geq 0$, $R = \|\rho_{kl}\|_{k,l=1}^r$ и числа ρ_{kl} определены условием F_2 .

Доказательство. Используя лемму 2 и векторную версию предложения XII из [8] (см. [8], п. 2, с. 4), заключаем, что при $\omega \rightarrow \infty$ статистика χ^2 имеет некоторое предельное распределение, для преобразования Лапласа которого имеет место равенство

$$\begin{aligned} L_r(t_1, \dots, t_r) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{E} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^r t_k \chi_k^2 \right\} \\ &= \mathbf{E} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^r t_k \sum_{i=1}^N \xi_{ki}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

где ξ_{ki} — компоненты вектора (13). Действуя, как в [1], зададим ортогональную матрицу $C = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^N$ порядка N , элементы последней строки которой определяются равенствами $c_{Nj} = \sqrt{p_j}$, $j = 1, \dots, N$, и рассмотрим случайные векторы

$$\eta_i = (\eta_{i1}, \dots, \eta_{ir}), \quad i = 1, \dots, N,$$

где

$$\eta_{ik} = \sum_{j=1}^N c_{ij} \xi_{kj}, \quad k = 1, \dots, r. \quad (35)$$

В условиях теоремы 6 выполняется гипотеза H_0 и верна лемма 2. В силу этой леммы вектор η_N с вероятностью 1 равен нулю, а векторы $\eta_1, \dots, \eta_{N-1}$ независимы, и каждый из них имеет распределение $N_r(0, R)$, так что матрица R неотрицательно определена. Это вытекает из того, что аналогично формуле (14) из [2] справедливы равенства

$$\text{cov}(\eta_{ik}, \eta_{jl}) = \rho_{kl}(\delta_{ij} - \delta_{iN}\delta_{jN}), \quad k, l = 1, \dots, r, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Из (34) и ортогональности матрицы C находим, что

$$L_r(t_1, \dots, t_r) = \mathbf{E} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^r t_k \sum_{i=1}^{N-1} \eta_{ik}^2 \right\}. \quad (36)$$

Применяя к векторам $\eta_1, \dots, \eta_{N-1}$ лемму 4, из (36) получаем представление (33). Теорема доказана.

Из (33) и леммы 4 следует, что предельное распределение статистики χ^2 , полученное в теореме 1, есть r -мерное центральное распределение хи-квадрат с параметрами $r, N-1$ и матрицей $R = \|\rho_{kl}\|_{k,l=1}^r$, элементы которой определяются условием F_2 .

Теорема 2. Пусть для каждого $\omega = 1, 2, \dots$ случайные величины (1) получены в предположении, что справедлива альтернатива $H(\bar{p}) = H(\bar{p}_\omega)$ и выполнены условия F_1, F_2 и F_3 . Пусть существуют пределы

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \lambda_{ki}(\omega) \lambda_{lj}(\omega) = \alpha_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, r, \quad k \leq l, \quad (37)$$

где

$$\lambda_{ki}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k p_i}} \sum_{m \in A_k} (p_i(m) - p_i), \quad k = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, N. \quad (38)$$

Тогда при $\omega \rightarrow \infty$ статистика (4) сходится по распределению и преобразование Лапласа ее предельного распределения есть

$$L_r(t_1, \dots, t_r) = |I + 2TR|^{-(N-1)/2} \exp \left\{ - \sum_{k,l=1}^r \alpha_{kl} q_{kl} \right\}, \quad (39)$$

где $t_k \geq 0$, $k = 1, \dots, r$, q_{kl} , $k, l = 1, \dots, r$, — элементы матрицы (31), причем $R = \|\rho_{kl}\|_{k,l=1}^r$ и $\alpha_{lk} = \alpha_{kl}$, $k, l = 1, \dots, r$, $k \leq l$.

Доказательство. Запишем компоненты случайного вектора (3) в виде

$$\tilde{\xi}_{ki} = \xi_{ki}^{(1)} + \lambda_{ki}(\omega), \quad k = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, N \quad (40)$$

(величины $\xi_{ki}^{(1)}$ и $\lambda_{ki}(\omega)$ задаются равенствами (18) и (38) соответственно). Используя неравенство Коши–Буняковского, из условия F_3 находим, что существует константа $K_1 > 0$ такая, что $\lambda_{ki}(\omega) \leq K_1$ для всех $k = 1, \dots, r$, $i = 1, \dots, N$ и $\omega = 1, 2, \dots$. Следовательно, из любой бесконечной последовательности $\{\omega'\}$ значений параметра ω , извлеченной без возвращения из исходной последовательности $\omega = 1, 2, \dots$, можно выбрать (без возвращения) бесконечную подпоследовательность $\{\omega''\}$, для которой существуют пределы

$$\lim_{\omega'' \rightarrow \infty} \lambda_{ki}(\omega'') = \lambda_{ki} < \infty, \quad k = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, N. \quad (41)$$

При этом из (37) и (41) получаем равенства

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \lambda_{li} = \alpha_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, r. \quad (42)$$

Заметим, что из (42) следует, что в условиях теоремы 2 все величины α_{kl} конечны.

Для каждого $\omega'' \in \{\omega''\}$ выполняется альтернатива $H(\bar{p}_{\omega''})$ к гипотезе H_0 . Принимая во внимание лемму 3, равенство (40) и существование пределов (41), приходим к выводу, что случайный вектор $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(\omega'')$ с компонентами (2) при $\omega'' \rightarrow \infty$ сходится по распределению к нормальному случайному вектору

$$\xi_2 = (\xi_{11}^{(2)}, \dots, \xi_{1N}^{(2)}; \dots; \xi_{r1}^{(2)}, \dots, \xi_{rN}^{(2)}), \quad (43)$$

для компонент которого выполняются равенства

$$\mathbf{E} \xi_{ki}^{(2)} = \lambda_{ki}, \quad k = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, N, \quad (44)$$

где λ_{ki} определяются соотношениями (41). Ковариационной матрицей случайного вектора (43) является матрица D из леммы 2. Согласно векторной версии предложения XII из [8] (см. [8], п. 2, с. 4) в условиях теоремы 2 при $\omega'' \rightarrow \infty$ статистика $\chi^2(\omega'')$ имеет предельное распределение, преобразование Лапласа которого равно

$$\begin{aligned} L_r(t_1, \dots, t_r) &= \lim_{\omega'' \rightarrow \infty} \mathbf{E} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^r t_k \chi_k^2(\omega'') \right\} \\ &= \mathbf{E} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^r t_k \sum_{i=1}^N (\xi_{ki}^{(2)})^2 \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

где случайные величины $\xi_{ki}^{(2)}$ — компоненты случайного вектора (43).

Воспользуемся матрицей C , приведенной в доказательстве теоремы 1, и для $i = 1, \dots, N$ положим

$$\eta_{ik}^{(1)} = \sum_{j=1}^N c_{ij} \xi_{kj}^{(2)}, \quad k = 1, \dots, r, \quad \eta_i^{(1)} = (\eta_{i1}^{(1)}, \dots, \eta_{ir}^{(1)}). \quad (46)$$

Из (45) и ортогональности матрицы C следует, что

$$L_r(t_1, \dots, t_r) = \mathbf{E} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^r t_k \sum_{i=1}^N (\eta_{ik}^{(1)})^2 \right\}. \quad (47)$$

Как и при доказательстве теоремы 1, учитывая вид матрицы D , которая является ковариационной матрицей нормального случайного вектора (43), убеждаемся, что случайный вектор $\eta_N^{(1)}$ с вероятностью 1 равен нулю, а векторы $\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_{N-1}^{(1)}$ независимы, и каждый из них распределен по r -мерному нормальному закону с ковариационной матрицей R . Далее, из (44) и (46) находим, что

$$m_{ik} = \mathbf{E} \eta_{ik}^{(1)} = \sum_{j=1}^N c_{ij} \lambda_{kj}, \quad k = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, N,$$

так что $\eta_i^{(1)}$ имеет вектор средних значений $m_i = (m_{i1}, \dots, m_{ir})$, $i = 1, \dots, N$, причем $m_N = 0$. Применяя лемму 4, из (47) получаем, что

$$L_r(t_1, \dots, t_r) = |I + 2TR|^{-(N-1)/2} \exp \left\{ - \sum_{k,l=1}^r \sum_{i=1}^{N-1} m_{ik} m_{il} q_{kl} \right\}, \quad (48)$$

где q_{kl} , $k, l = 1, \dots, r$ — элементы матрицы (31). Согласно (46) для $k = 1, \dots, r$ вектор $(\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kN})$ переводится в вектор $(m_{1k}, \dots, m_{Nk})$ ортогональным преобразованием. Поэтому ввиду (42) имеют место равенства

$$\sum_{i=1}^{N-1} m_{ik} m_{il} = \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} \lambda_{li} = \alpha_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, r.$$

В итоге выражение (48) для $L_r(t_1, \dots, t_r)$ приводится к виду (39), и оно не зависит от подпоследовательности ω'' . Вследствие этого предельное при $\omega'' \rightarrow \infty$ распределение статистики $\chi^2(\omega'')$ одно и то же для всех возможных подпоследовательностей $\{\omega''\}$, выбираемых указанным выше способом. Следовательно, можно воспользоваться теоремой о сходимости вероятностных мер (см. [9], с. 27) и с ее помощью завершить доказательство теоремы 2.

Из доказательства теоремы 2 следует совместность уравнений (30), в которых величины α_{kl} задаются соотношениями (37). Поэтому из (39) и леммы 4 вытекает, что в условиях теоремы 7, если в (37) не все величины α_{kl} равны нулю, предельное распределение статистики χ^2 есть многомерное нецентральное распределение хи-квадрат с параметрами r , $N-1$, $R = \|\rho_{kl}\|_{k,l=1}^r$ и α_{kl} , $1 \leq k \leq l \leq r$.

В некоторых случаях утверждение теоремы 2 можно упростить. Предположим, что для полиномиальных схем (6), определяющих $H(\bar{p})$, для $m \in A$ выполняется равенство $\bar{p}_m = q$, где $q = q_\omega = (q_1, \dots, q_N)$, $0 \leq q_i \leq 1$, $i = 1, \dots, N$, $\sum_{i=1}^N q_i = 1$. Соответствующую простую гипотезу относительно распределений случайных величин (1) обозначим $H(q) = H(q(\omega))$.

Следствие 2. Пусть случайные величины (1) получены в предположении, что верна альтернатива $H(q_\omega)$ к гипотезе H_0 , выполнены условия F_1 , F_2 и существуют пределы

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\Delta_k}{\Delta} = \beta_k^2, \quad k = 1, \dots, r, \quad (49)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} (q_i - p_i)^2 = \gamma^2 < \infty. \quad (50)$$

Тогда при $\omega \rightarrow \infty$ статистика (4) имеет предельное распределение, преобразование Лапласа которого имеет вид

$$L_r(t_1, \dots, t_r) = |I + 2TR|^{(N-1)/2} \exp\{-\gamma^2 b Q b'\}, \quad (51)$$

где $t_k \geq 0$, $k = 1, \dots, r$, $b = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ и Q — матрица (31), причем $R = \|\rho_{kl}\|_{k,l=1}^r$.

Доказательство. В случае справедливости альтернативы $H(q_\omega)$ для величин (33) имеют место равенства

$$\lambda_{ki}(\omega) = \sqrt{\Delta_k/p_i} (q_i - p_i), \quad k = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, N.$$

Отсюда, учитывая (49) и (50), находим, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \lambda_{ki}(\omega) \lambda_{li}(\omega) = \gamma^2 \beta_k \beta_l, \quad k, l = 1, \dots, r. \quad (52)$$

В силу (50) выполняется условие F_3 . Поэтому к статистике (4) можно применить теорему 2, вследствие которой при $\omega \rightarrow \infty$ статистика χ^2 имеет предельное распределение и его преобразование Лапласа в силу (37), (39) и (52) имеет вид (51). Следствие доказано.

Следствие 3. Пусть выполнены предположения теоремы 2, но вместо пределов (37) существуют пределы (49), и

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sqrt{\Delta/\Delta_k} \lambda_{ki}(\omega) = \gamma_{ki}, \quad k = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, N,$$

где величины $\lambda_{ki}(\omega)$ определены равенствами (38). Тогда при $\omega \rightarrow \infty$ статистика (4) имеет предельное распределение, преобразование Лапласа которого имеет вид

$$\begin{aligned} L_r(t_1, \dots, t_r) &= |I + 2TR|^{-(N-1)/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N g_i Q g_i' \right\} \\ &= |I + 2TR|^{-(N-1)/2} \exp \left\{ - \sum_{k=l=1}^r \left(\sum_{i=1}^N \gamma_{ki} \gamma_{li} \right) \beta_k \beta_l q_{kl} \right\}, \end{aligned}$$

где $t_k \geq 0$, $k = 1, \dots, r$, $g_i = (\beta_1 \gamma_{1i}, \dots, \beta_r \gamma_{ri})$, $i = 1, \dots, N$, и $Q = \|q_{kl}\|_{k,l=1}^r$ — матрица (31), причем $R = \|\rho_{kl}\|_{k,l=1}^r$.

Частными случаями теоремы 1, доказанной выше, является теорема 1 из [1] и утверждения теорем 1 и 2 из [2], а из следствия 3 для статистики последовательного критерия хи-квадрат можно вывести теорему 2 из [1] (случай близких альтернатив).

Список литературы

1. Захаров В. К., Сарманов О. В., Севастьянов Б. А., Последовательный критерий χ^2 . *Матем. сб.* (1969) **79**, №3, 444–460.
2. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., Скользящий хи-квадрат. *Дискретная математика* (2000) **12**, №4, 46–52.
3. Jensen D. R., Limit properties on noncentral multivariate Rayleigh and chi-square distributions. *SIAM J. Appl. Math.* (1969) **17**, №4, 802–814.
4. Гаек Я., Шidak З., *Теория ранговых критериев*. Наука, Москва, 1971.
5. Селиванов Б. И., Об одном классе статистик типа хи-квадрат. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1995) **2**, №6, 926–966.
6. Гнеденко Б. В., Элементы теории функций распределения случайных векторов. *Успехи матем. наук* (1944) **10**, 230–244.
7. Барра Ж.-Р., *Основные понятия математической статистики*. Мир, Москва, 1974.
8. Рао С. Р., *Линейные статистические методы*. Наука, Москва, 1968.
9. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*. Наука, Москва, 1974.

Статья поступила 30.01.2002.