Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Двойной показательный закон для максимальных ветвящихся процессов, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 3, 143–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:37:13

Двойной показательный закон для максимальных ветвящихся процессов

© 2002 г. А. В. Лебедев

Рассматриваются максимальные ветвящиеся процессы, заданные рекуррентной формулой

$$Z_{n+1} = \bigvee_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n},$$

где через $\bigvee$ обозначена операция взятия максимума, $\xi_{m,n}$, $m \geq 1$, $n \geq 0$, независимы и имеют функцию распределения F на $\mathbb{Z}_+$.

Доказаны предельные теоремы для стационарных распределений процессов $\{Z_n^{(N)}\}$ с $F^{(N)}(x) = F^N(x)$ при $N \rightarrow \infty$, когда F принадлежит области притяжения двойного показательного закона.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 00-01-00131.

1. Введение

Классическими объектами исследования в теории случайных процессов являются ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона [1, 2], исследования различных аспектов и модификаций которых продолжаются [3, 4].

Дж. Ламперти [5, 6] ввел в рассмотрение максимальные ветвящиеся процессы, заданные рекуррентной формулой

$$Z_{n+1} = \bigvee_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n}, \quad (1)$$

где через $\bigvee$ обозначена операция взятия максимума, и $\xi_{m,n}$, $m \geq 1$, $n \geq 0$, — независимые случайные величины с общей функцией распределения F на $\mathbb{Z}_+$. Полагаем (как и в случае суммирования), что результат взятия максимума ноль раз (при $Z_n = 0$) равен нулю.

Можно сказать (по аналогии с процессами Гальтона–Ватсона), что в максимальном ветвящемся процессе (МВП) выживают потомки только одной частицы, у которой их больше всего. Понятно также, что множество возможных значений МВП (при $n \geq 1$) совпадает с множеством возможных значений числа потомков. Из (1) следует, что процесс является однородной цепью Маркова на этом множестве.

В [5] показано, что если $F(0) = 0$, то при выполнении условия

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} x(1 - F(x)) < e^{-\gamma}, \quad (2)$$

где $\gamma = 0,577 \dots$ — константа Эйлера, цепь $\{Z_n\}$ положительно возвратна, и напротив, при

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} x(1 - F(x)) > e^{-\gamma}$$

имеет место сходимость $Z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ почти наверное (п. н.).

Далее, в [6] рассмотрен критический случай, когда

$$x(1 - F(x)) \rightarrow e^{-\gamma}$$

при $x \rightarrow \infty$, с учетом дальнейших членов разложения хвоста на бесконечности. Показано, что если $(e^\gamma x(1 - F(x)) - 1) \ln x \rightarrow d$ при $x \rightarrow \infty$, то процесс возвратен при $d < \pi^2/12$ и уходит на бесконечность п. н. при $d > \pi^2/12$.

Далее, полагая везде $F(0) = 0$, будем рассматривать МВП при более сильном, чем (2), условии finiteness математического ожидания числа потомков

$$a = \int_0^\infty (1 - F(u)) du < \infty, \quad (3)$$

из которого следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F(x)) = 0. \quad (4)$$

Далее будем использовать обозначение $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

Рассмотрим последовательность МВП $\{Z_n^{(N)}\}$ с $F^{(N)}(x) = F^N(x)$, $N \geq 1$. Пусть F удовлетворяет условию (4), тогда в силу асимптотики

$$\bar{F}^{(N)}(x) = 1 - F^{(N)}(x) \sim N \bar{F}(x)$$

при $x \rightarrow \infty$, для $F^{(N)}$ при любом фиксированном N также выполнено соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F^{(N)}(x)) = 0,$$

аналогичное (4). Из положительной возвратности $\{Z_n^{(N)}\}$ в сочетании с неприводимостью и аperiodичностью следует эргодичность и существование стационарного предельного распределения $\Psi^{(N)}$ у данной цепи Маркова (при каждом фиксированном $N \geq 1$).

Случайные величины с распределениями $\Psi^{(N)}$ будем обозначать через $\tilde{Z}^{(N)}$. Из (1) получаем, что

$$\tilde{Z}^{(N)} \stackrel{d}{=} \bigvee_{m=1}^{\tilde{Z}^{(N)}} \xi_m^{(N)}, \quad (5)$$

где $\xi_m^{(N)}$, $m \geq 1$, независимы и имеют функцию распределения $F^{(N)}$.

Основной целью работы является нахождение асимптотики для $\Psi^{(N)}$ при $N \rightarrow \infty$ в случае, когда F принадлежит области притяжения двойного показательного закона

$$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}.$$

2. Вспомогательные утверждения

Определим функцию

$$\varphi(s) = \int_0^\infty (1 - F^s(x)) dx, \quad s > 0. \quad (6)$$

При натуральных значениях аргумента

$$\varphi(k) = \mathbf{M} \bigvee_{m=1}^k \xi_m, \quad k \geq 1,$$

где ξ_m , $m \geq 1$, независимы и имеют функцию распределения F .

Лемма 1. Если верно (3), то $\varphi(s)$ конечна при всех $s \geq 0$.

Доказательство. Поскольку $1 - F(x)^s \sim s \bar{F}(x)$ при $x \rightarrow \infty$, из сходимости интеграла (3) следует сходимость интеграла (6) при всех $s \geq 0$.

Лемма 2. Функция φ не убывает и вогнута.

Утверждение следует из монотонности и выпуклости экспоненты.

3. Предельная теорема

Пусть F принадлежит области притяжения двойного показательного закона

$$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$$

при линейной нормировке, то есть существуют числовые последовательности $a_k > 0$, b_k , $k \geq 1$ такие, что для любого фиксированного $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\bigvee_{m=1}^k \xi_m \leq a_k x + b_k \right) = \Lambda(x). \quad (7)$$

Критерии выполнения (7) можно найти в [7]. В частности, хвост F должен убывать быстрее любой степени. Заметим, что поскольку мы рассматриваем дискретные распределения, хвост функции распределения F также должен убывать медленнее любой экспоненты, так как в противном случае не выполняется необходимое условие существования невырожденного предельного распределения максимумов (см. [8]): при $n \rightarrow \infty$

$$\bar{F}(x)/\bar{F}(x-0) \rightarrow 1$$

для любого $c > 1$.

Определим функцию

$$u(s) = \inf\{x : s \bar{F}(x) \leq 1\}, \quad s > 0.$$

По теореме 2.1.3 из [7] значения $u(k)$, $k \geq 1$, можно выбрать в качестве b_k , что и будем предполагать в дальнейшем. Заметим, что $u(s)$ монотонно не убывает и стремится к бесконечности при $s \rightarrow \infty$.

Лемма 3. Если верно (7), то $\varphi(s) \sim u(s)$ при $s \rightarrow \infty$, причем φ и u — медленно меняющиеся функции.

Доказательство. Согласно теореме 4.1.1 в монографии [7] (с точностью до обозначений) $a_k/b_k \rightarrow 0$ и при $k \rightarrow \infty$

$$\max\{\xi_1, \dots, \xi_k\}/b_k \xrightarrow{P} 1.$$

Как было отмечено еще в [8], для неограниченных сверху распределений этот закон больших чисел эквивалентен том, что при $x \rightarrow \infty$

$$\bar{F}(cx)/\bar{F}(x) \rightarrow 0 \quad (8)$$

для любого $c > 1$. По теореме 3.2 из [9] получаем, что $\varphi(k) \sim u(k)$ при $k \rightarrow \infty$.

Докажем теперь, что u — медленно меняющаяся функция. Пусть существует числовая последовательность $s_m > 0$, $m \geq 1$, а также числа $p, q > 1$ такие, что $u(ps_m) \geq qu(s_m)$ для всех $m \geq 1$, и $s_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(qu(s_m))}{\bar{F}(u(s_m))} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(u(ps_m))}{\bar{F}(u(s_m))} = \frac{1}{p} > 0,$$

что противоречит (8). Делая замены $p' = 1/p$, $q' = 1/q$, $s'_m = ps_m$ мы также доказываем, что не существует последовательности s'_m такой, что $u(p's'_m) \leq q'u(s'_m)$ для всех $m \geq 1$.

Из того, что u медленно меняется, следует, что $u(k+1)/u(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, откуда, в свою очередь, следует, что $\varphi(k+1)/\varphi(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\varphi(s) \sim u(s)$ при $s \rightarrow \infty$, и φ также оказывается медленно меняющейся функцией.

Введем обозначение $\mu_N = \mathbf{M}\bar{Z}^{(N)}$. Из $F(0) = 0$ следует, что $\xi_m \geq 1$, $\bar{Z}^{(N)} \geq 1$ п. н., и заведомо справедливы соотношения $a \geq 1$, $\varphi(s) \geq 1$ при $s \geq 1$, а также $\mu_N \geq 1$ при $N \geq 1$.

Лемма 4. Для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\mu_N \leq \varphi(N^{1+\varepsilon})$ при всех достаточно больших N .

Доказательство. Из (5) следует, что $\mu_N = \mathbf{M}\varphi(N\bar{Z}^{(N)})$, откуда с помощью лемм 1 и 2 получаем оценку

$$\mu_N \leq \varphi(N\mu_N). \quad (9)$$

Пусть $0 < \delta < \varepsilon/(1+\varepsilon) < 1$. По лемме 3 $\varphi(s) = o(s^\delta)$ при $s \rightarrow \infty$. Следовательно, существует C такое, что $\varphi(s) \leq Cs^\delta$ при $s \geq 1$. Из (9) получаем, что $\mu_N \leq (CN^\delta)^{1/(1-\delta)}$ при $N \geq 1$, откуда $\mu_N \leq N^\varepsilon$ при всех достаточно больших N . Повторно применяя (9), получаем утверждение леммы 4.

Введем дополнительное условие: пусть для любого $\theta > 1$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $s \rightarrow \infty$

$$su(s^{1+\varepsilon})\bar{F}(\theta u(s)) \rightarrow 0. \quad (10)$$

Заметим, что (10) имеет смысл ограничения тяжести хвоста F . Условиям (7) и (10) удовлетворяют распределения Вейбулла, показательное, гамма, нормальное. Разницу можно увидеть на примере класса распределений с такими хвостами, что $\bar{F}(x) \sim \exp\{-(\ln x)^\alpha\}$ при $x \rightarrow \infty$; тогда (7) выполняется при $\alpha > 1$, а (10) при $\alpha > 2$.

Приходится отметить, что условие (10), прямо используемое далее в доказательстве теоремы, не выглядит оптимальным. Вопрос о его необходимости, уточнении или снятии является предметом дальнейших исследований автора.

Теорема 1. Если выполнены условия (7) и (10), то при $N \rightarrow \infty$

$$\tilde{Z}^{(N)}/u(N) \xrightarrow{\mathbf{P}} 1. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $\theta > 1$, $\varepsilon > 0$, тогда из (5), лемм 3 и 4 получаем, что при всех достаточно больших N

$$\mathbf{P}(\tilde{Z}^{(N)} > \theta u(N)) \leq \mu_N \bar{F}^{(N)}(\theta u(N)) \leq N\varphi(N^{1+\varepsilon})\bar{F}(\theta u(N))$$

и при $N \rightarrow \infty$

$$N\varphi(N^{1+\varepsilon})\bar{F}(\theta u(N)) \sim Nu(N^{1+\varepsilon})\bar{F}(\theta u(N)) \rightarrow 0.$$

Пусть теперь $\theta < 1$, тогда в силу (8) при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\tilde{Z}^{(N)} \leq \theta u(N)) \leq F(\theta u(N))^N \rightarrow 0.$$

Следствие 1. Если выполнены условия (7) и (10), то для любого фиксированного $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tilde{Z}^{(N)} \leq a_{k(N)}x + b_{k(N)}) = \Lambda(x)$$

для любых $k(N) \sim Nu(N)$ при $N \rightarrow \infty$.

Утверждение следует из (5), (11) и теоремы 6.2.1 в [7].

Пример 1. Пусть $F(n) = 1 - \exp\{-\sqrt{n}\}$, тогда $a_k = 2 \ln k$, $b_k = (\ln k)^2$ при $k \geq 1$, и следовательно, при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tilde{Z}^{(N)} - (\ln N + 2 \ln \ln N)^2}{2(\ln N + 2 \ln \ln N)} \leq x\right) \rightarrow \Lambda(x).$$

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания и предложения.

Список литературы

1. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.
2. Ватутин В. А., Зубков А. М., Ветвящиеся процессы. I. В кн.: *Итоги науки и техники. Теория вероятн. Матем. статистика. Теор. кибернетика*. ВИНТИ, Москва, 1985. с. 3–67.
3. Колчин В. Ф., Ветвящиеся процессы и случайные гипердеревья. *Дискретная математика* (1999) 11, №1, 8–23.
4. Севастьянов Б. А., Минимальные точки надкритического ветвящегося случайного блуждания на решетке $\mathbb{N}_0^r$ и многотипные ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона. *Дискретная математика* (2000) 12, №1, 3–6.
5. Lamperti J., Maximal branching processes and long-range percolation. *J. Appl. Probab.* (1970) 7, №1, 89–96.
6. Lamperti J., Remarks on maximal branching processes. *Теория вероятностей и ее применения* (1972) 17, №1, 46–54.
7. Галамбош Я. И., *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*. Наука, Москва, 1984.
8. Gnedenko B. V., Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.* (1943) 44, №3, 423–453.
9. Pickands J., Moment convergence of sample extremes. *Ann. Math. Stat.* (1968) 39, №3, 881–889.

Статья поступила 13.09.2001.

Переработанный вариант поступил 20.12.2001.