Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Павлов, Е. В. Черепанова, Предельное распределение числа пар в обобщенной схеме размещения, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 3, 149–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:56:34

УДК 519.2

Предельное распределение числа пар в обобщенной схеме размещения

© 2002 г. Ю. Л. Павлов, Е. В. Черепанова

Рассматриваются три комбинаторные задачи, описываемые обобщенной схемой размещения: извлечение шаров из урны, содержащей шары разных цветов, случайные леса и случайные подстановки с известным числом циклов. В этих задачах получены предельные распределения числа пар шаров одного цвета, числа цепей леса и числа простых путей в графе подстановки соответственно.

Пусть имеется последовательность n независимых испытаний с N исходами, p_i — вероятность i -го исхода в каждом испытании, $1 \leq i \leq N$. В работе В. Ф. Колчина [1] получена локальная предельная теорема для случайной величины

$$\eta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v^{(i)}(v^{(i)} - 1), \quad (1)$$

где $v^{(i)}$ — число появлений i -го исхода, $1 \leq i \leq N$, в случае, когда $n, N \rightarrow \infty$, $0 < c_0 \leq Np_i \leq c_1 < \infty$, $1 \leq i \leq N$, $n^2/N \rightarrow \infty$, $N^4/(n^3 \ln n) \rightarrow \infty$. Заметим, что проблема получения предельных теорем для сумм вида (1) возникает в различных комбинаторных задачах, отличающихся от указанной полиномиальной схемы. Некоторые из таких случаев приводятся ниже.

В [2] рассматривалась следующая задача. Из урны, содержащей по $m \geq 2$ различных шаров каждого из N цветов, осуществляется равновероятный выбор без возвращения n шаров, $0 < n < mN$. Требуется найти предельное распределение случайной величины v_1 , равной числу всевозможных пар извлеченных шаров одинакового цвета, при $n, N \rightarrow \infty$. В [2] сформулирована локальная предельная теорема для v_1 в случае, когда m фиксировано и $0 < \alpha_0 \leq n/(mN) \leq \alpha_1 < 1$.

Для доказательства данной теоремы предложено использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам, введенную и исследованную в книгах В. Ф. Колчина [3, 4, 5]. В этой схеме предполагается, что набор целочисленных случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$ таких, что

$$\eta_1 + \dots + \eta_N = n,$$

связан с независимыми одинаково распределенными целочисленными случайными величинами $\xi_1, \dots, \xi_N$ соотношением

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \quad (2)$$

В рассматриваемой задаче η_i является случайной величиной, равной числу извлеченных шаров i -го цвета, $1 \leq i \leq N$, а $\xi_1, \dots, \xi_N$ распределены по биномиальному закону с параметрами m и p , $0 < p < 1$. Очевидно, что данную задачу можно рассматривать как частный случай проблемы получения предельных распределений числа пар ν в обобщенной схеме размещения, где

$$\nu = \eta_1(\eta_1 - 1)/2 + \dots + \eta_N(\eta_N - 1)/2.$$

Из (2) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\nu = k\} &= \mathbf{P}\{\zeta_N = k \mid \mu_N = n\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N = k, \mu_N = n\}}{\mathbf{P}\{\mu_N = n\}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_N &= \xi_1(\xi_1 - 1)/2 + \dots + \xi_N(\xi_N - 1)/2, \\ \mu_N &= \xi_1 + \dots + \xi_N. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что суммы случайных величин в (3) образуют схемы серий. Поскольку классические локальные предельные теоремы в этом случае неприменимы (см. по этому поводу замечание в книге [4]), задача получения предельного распределения ν сводится к доказательству локальных предельных теорем для μ_N и вектора (ζ_N, μ_N) . Заметим, что в [2] такие доказательства не приводятся.

В данной работе получено обобщение указанного выше результата для более широкой области изменения параметров, а также доказаны предельные теоремы для числа пар объектов в случайных лесах и подстановках с заданным числом циклов (см. [3, 4, 5]).

Теорема 1. Пусть $m \geq 2$, $0 < n < mN$, $n, N \rightarrow \infty$ так, что $mN - n \rightarrow \infty$ и выполняется одно из следующих условий:

- (1) $n/N \rightarrow 0$, $n^2/N \rightarrow \infty$;
- (2) $0 < a_1 \leq n/N \leq a_2 < \infty$, $n(1 - n/(mN))^3 \rightarrow \infty$;
- (3) $n/N \rightarrow \infty$, $(1 - n/(mN))N^{4/3}/n \rightarrow \infty$, $(1 - n/(mN))n^3/N^3 = O(1)$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\nu_1 = k\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(k-a)^2}{2\sigma^2}\right\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно k , для которых $(k - a)/\sigma$ лежит в любом фиксированном конечном интервале, где

$$\begin{aligned} a &= \frac{(m-1)n^2}{2mN}, \\ \sigma^2 &= \frac{(m-1)(mN-n)^2n^2}{2m^3N^3}. \end{aligned}$$

Пусть $F_{N,n}$ — множество всех различных лесов с N корневыми и n некорневыми вершинами, в которых корни занумерованы числами от 1 до N , а некорневые вершины — числами от 1 до n . Зададим на $F_{N,n}$ равномерное распределение вероятностей. Случайные леса такого типа изучались ранее в [6, 7]. В [7] показано, что равенство (2) справедливо, если η_i равно числу некорневых вершин дерева с корнем, имеющим номер i , $1 \leq i \leq N$, случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ таковы, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{(k+1)^k x^{k+1}}{(k+1)!\theta(x)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где x — числовой параметр, $0 < x \leq e^{-1}$, а функция $\theta(x)$ определяется рядом

$$\theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} x^k.$$

Под парой будем понимать две некорневые вершины, соединенные цепью. Обозначим через ν_2 случайную величину, равную числу всевозможных пар вершин в лесе из $F_{N,n}$. Легко видеть, что число различных цепей в лесе равно

$$\tau = \nu_2 + n.$$

Следующая теорема устанавливает предельное распределение числа цепей в случайном лесе.

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N = O(1)$, $n^2/N \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\tau - n = k\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(k-a)^2}{2\sigma^2}\right\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно k , для которых $(k-a)/\sigma$ лежит в любом фиксированном конечном интервале, где

$$a = \frac{n^2(n+3N)}{2N^2},$$

$$\sigma^2 = \frac{3n^2(n+N)^5}{2N^6}.$$

Рассмотрим множество $S_{n,N}$ всех различных подстановок степени n , имеющих N циклов. Легко видеть, что подстановку можно представить ориентированным графом, каждая компонента связности которого является циклом. Введем на $S_{n,N}$ равномерное распределение вероятностей. Известно [4], что соотношение (2) выполняется, если случайная величина η_i равна числу элементов в i -ом цикле, $1 \leq i \leq N$, а $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют распределение логарифмического ряда

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{\lambda^k}{-k \ln(1-\lambda)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где λ — числовой параметр, $0 < \lambda < 1$. Будем считать, что два различных элемента подстановки образуют пару, если они принадлежат одному циклу. Пусть ν_3 — случайная

величина, равная числу различных пар элементов подстановки из $S_{n,N}$. Нетрудно видеть, что случайная величина $2\nu_3$ равна числу простых (незамкнутых) путей графа подстановки.

Теорема 3. Пусть λ — решение уравнения

$$\frac{\lambda}{(\lambda - 1) \ln(1 - \lambda)} = \frac{n}{N} \quad (6)$$

в интервале $(0, 1)$ и пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $1 < c_1 \leq n/N \leq c_2 < \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\nu_3 = k\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(k-a)^2}{2\sigma^2} \right\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно k , для которых $(k-a)/\sigma$ лежит в любом фиксированном конечном интервале, где

$$a = \frac{n\lambda}{2(1-\lambda)},$$

$$\sigma^2 = \frac{n\lambda}{4(1-\lambda)^3} \left(\frac{\lambda^2}{\ln(1-\lambda) + \lambda} + 2 \right).$$

Ниже приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–8), с помощью которых далее будут доказаны теоремы 1–3.

Пусть $\langle \alpha \rangle$ обозначает расстояние от $\alpha \in \mathbf{R}$ до ближайшего целого числа,

$$\Omega(\alpha, \beta) = \{d = (d_1, d_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |d_1|, |d_2| \leq \alpha, |d| > \beta\}.$$

Для двумерной случайной величины X и вектора $d \in \mathbf{R}^2$ положим

$$H_N(X, d) = \mathbf{M}(\langle X^*, d \rangle)^2,$$

где $\langle X^*, d \rangle$ — скалярное произведение векторов X^* и d , X^* получен из X путем симметризации. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tau_i &= \xi_i(\xi_i - 1)/2, & X_i &= (\tau_i, \xi_i), & 1 \leq i \leq N, \\ S_N &= X_1 + \dots + X_N = (\zeta_N, \mu_N), \\ \sigma_1^2 &= \mathbf{D}\tau_1, & \sigma_2^2 &= \mathbf{D}\xi_1, \\ \rho &= \text{cov}(\tau_1, \xi_1)/(\sigma_1\sigma_2), & A_N &= \mathbf{M}S_N, \\ \Sigma &= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}, & Q_N &= \begin{pmatrix} 1/(\sigma_1\sqrt{N}) & 0 \\ 0 & 1/(\sigma_2\sqrt{N}) \end{pmatrix}, \\ \|Q_N\| &\equiv \sup_{|x|=1} |Q_N x|, \\ H_N(d) &= NH(X_1, d), & H_N &= \inf_{d \in \Omega(1/2, 1/4)} H_N(d). \end{aligned}$$

Несложно показать, что

$$H_N(d) = N \sum_{k,l} \langle \alpha_{k,l} \rangle^2 \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \mathbf{P}\{\xi_2 = l\}, \quad (7)$$

где

$$\alpha_{k,l} = (k-l)(k+l-1)d_1/2 + (k-l)d_2.$$

Заметим, что

$$(S_N - A_N)Q_N = \left(\frac{\zeta_N - \mathbf{M}\zeta_N}{\sigma_1\sqrt{N}}, \frac{\mu_N - \mathbf{M}\mu_N}{\sigma_2\sqrt{N}} \right).$$

Согласно теореме 4 в [8] имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть при $N \rightarrow \infty$ последовательность распределений случайных величин $(S_N - A_N)Q_N$ слабо сходится к абсолютно непрерывному распределению. Тогда для локальной сходимости распределений S_N к тому же распределению достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\|Q_N^{-1}\|^2 = O(H_N).$$

Лемма 2. Для любого $d \in \Omega(1/2, 1/4)$ и любых целых k, l найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$\max\{\langle \alpha_{k,l} \rangle, \langle \alpha_{k+1,l} \rangle, \langle \alpha_{k+2,l} \rangle\} \geq \varepsilon.$$

Доказательство. Покажем, что утверждение леммы справедливо при

$$\varepsilon = \begin{cases} 1/8, & \text{если } d_1 = 0; \\ |d_1|/4, & \text{если } d_1 \neq 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1,l} &= \alpha_{k,l} + kd_1 + d_2, \\ \alpha_{k+2,l} &= \alpha_{k,l} + 2(kd_1 + d_2) + d_1. \end{aligned}$$

Представим $\alpha_{k,l}$ и $kd_1 + d_2$ в виде сумм

$$\begin{aligned} \alpha_{k,l} &= z_1 + r_1, \\ kd_1 + d_2 &= z_2 + r_2, \end{aligned}$$

где $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$, $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$, $|r_1|, |r_2| \leq 1/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{k,l} \rangle &= |r_1|, \\ \langle \alpha_{k+1,l} \rangle &= \langle r_1 + r_2 \rangle, \\ \langle \alpha_{k+2,l} \rangle &= \langle r_1 + 2r_2 + d_1 \rangle. \end{aligned} \tag{8}$$

Ясно, что утверждение леммы справедливо, если $|r_1| \geq \varepsilon$. Пусть $|r_1| < \varepsilon$. Рассмотрим векторы вида $d = (0, d_2)$. По определению множества $\Omega(1/2, 1/4)$ в этом случае

$$1/4 < |d_2| \leq 1/2,$$

а из (8) следует, что

$$\langle \alpha_{k+1,l} \rangle = \langle r_1 + d_2 \rangle.$$

Пусть

$$1/4 < d_2 \leq 1/2, \quad 0 \leq r_1 < 1/8.$$

Тогда

$$1/4 < r_1 + d_2 < 5/8$$

и, очевидно,

$$\langle \alpha_{k+1,l} \rangle > 1/8.$$

Для других возможных значений r_1 и d_2 это неравенство устанавливается аналогично. Предположим теперь, что $d_1 \neq 0$, и пусть

$$0 < d_1 \leq 1/2, \quad 0 \leq r_1 < d_1/4, \quad 0 \leq r_2 \leq 1/2.$$

Тогда

$$0 \leq r_1 + r_2 < d_1/4 + 1/2.$$

Используя (8), несложно показать, что если

$$d_1/4 \leq r_1 + r_2 < d_1/4 + 1/2,$$

то

$$\langle \alpha_{k+1,l} \rangle \geq d_1/4.$$

Если

$$0 \leq r_1 + r_2 < d_1/4,$$

то

$$0 \leq r_2 < d_1/4$$

и

$$d_1 \leq r_1 + 2r_2 + d_1 < 3d_1/2,$$

поэтому из (8) получаем, что

$$\langle \alpha_{k+2,l} \rangle > d_1/4.$$

Повторяя подобные рассуждения для других значений r_1 , r_2 и d_1 приходим к утверждению леммы 2.

Положим

$$g(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \Sigma x^T \right\}, \quad (9)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

Лемма 3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют биномиальное распределение с параметрами $m \geq 2$ и $p = n/(mN)$, $0 < n < mN$, $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполняется одно из следующих условий:

- (1) $n/N \rightarrow 0$, $n^2/N \rightarrow \infty$;
- (2) $0 < a_1 \leq n/N \leq a_2 < \infty$, $n(1 - n/(mN))^3 \rightarrow \infty$;
- (3) $n/N \rightarrow \infty$, $(1 - n/(mN))N^{4/3}/n \rightarrow \infty$.

Тогда последовательность распределений $(S_N - A_N)Q_N$ слабо сходится к двумерному нормальному закону с плотностью (9).

Доказательство. Легко проверить, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}\xi_1 &= mp, \\
 \mathbf{M}\xi_1^3 &= mp((m-1)(m-2)p^2 + 3(m-1)p + 1), \\
 \mathbf{D}\xi_1 &= mp(1-p), \\
 \mathbf{M}\tau_1 &= m(m-1)p^2/2, \\
 \mathbf{M}\tau_1^3 &= m(m-1)p^2((m-2)(m-3)(m-4)(m-5)p^4 \\
 &\quad + 12(m-2)(m-3)(m-4)p^3 \\
 &\quad + 38(m-2)(m-3)p^2 + 32(m-2)p + 4)/8, \\
 \mathbf{D}\tau_1 &= m(m-1)p^2(1-p)(2mp-3p+1)/2, \\
 \rho &= \sqrt{2(m-1)p/(2mp-3p+1)}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Обозначим $f(t_1, t_2)$ характеристическую функцию случайного вектора

$$(\tau_1 - \mathbf{M}\tau_1, \xi_1 - \mathbf{M}\xi_1).$$

При достаточно малых t_1, t_2 справедливо соотношение

$$f(t_1, t_2) = 1 - t_1^2 \sigma_1^2 / 2 - t_2^2 \sigma_2^2 / 2 - t_1 t_2 \text{cov}(\tau_1, \xi_1) + r(t_1, t_2), \tag{11}$$

где

$$|r(t_1, t_2)| \leq \frac{1}{6} \mathbf{M}(|t_1| |\tau_1 - \mathbf{M}\tau_1| + |t_2| |\xi_1 - \mathbf{M}\xi_1|)^3.$$

Поскольку, как нетрудно проверить,

$$(x + y)^3 \leq 8(x^3 + y^3)$$

для всех $x, y \geq 0$, находим, что

$$|r(t_1, t_2)| \leq c(|t_1|^3 (\mathbf{M}\tau_1^3 + \mathbf{M}^3 \tau_1) + |t_2|^3 (\mathbf{M}\xi_1^3 + \mathbf{M}^3 \xi_1)), \tag{12}$$

где $c > 0$.

Пусть $\varphi(t_1, t_2)$ означает характеристическую функцию случайной величины

$$(S_N - A_N)Q_N.$$

Легко видеть, что при выполнении условий леммы $\sigma_1^2 N, \sigma_2^2 N \rightarrow \infty$. Поэтому из равенств

$$\varphi(t_1, t_2) = f^N(t_1/(\sigma_1\sqrt{N}), t_2/(\sigma_2\sqrt{N}))$$

и (11) получаем, что

$$\ln \varphi(t_1, t_2) = N \ln \left(1 - \frac{t_1^2}{2N} - \frac{t_2^2}{2N} - \frac{t_1 t_2 \rho}{N} + r \left(\frac{t_1}{\sigma_1\sqrt{N}}, \frac{t_2}{\sigma_2\sqrt{N}} \right) \right). \quad (13)$$

Из (12) следует неравенство

$$\left| r \left(\frac{t_1}{\sigma_1\sqrt{N}}, \frac{t_2}{\sigma_2\sqrt{N}} \right) \right| \leq c \left(|t_1|^3 \frac{\mathbf{M}\tau_1^3 + \mathbf{M}^3\tau_1}{(\sigma_1\sqrt{N})^3} + |t_2|^3 \frac{\mathbf{M}\xi_1^3 + \mathbf{M}^3\xi_1}{(\sigma_2\sqrt{N})^3} \right).$$

Используя (10), нетрудно получить оценки величин

$$A = \frac{\mathbf{M}\tau_1^3 + \mathbf{M}^3\tau_1}{(\sigma_1\sqrt{N})^3},$$

$$B = \frac{\mathbf{M}\xi_1^3 + \mathbf{M}^3\xi_1}{(\sigma_2\sqrt{N})^3}$$

при различных соотношениях между n и N :

$$\begin{aligned} A &= O(1/n\sqrt{N}), \quad B = O(1/(N\sqrt{n})) && \text{при } n/N \rightarrow 0; \\ A, B &= O((N^2 n(1 - n/(mN)))^{-1/2}) && \text{при } 0 < a_1 \leq n/N \leq a_2 < \infty; \\ A, B &= O((n/(1 - n/(mN))N^2)^{3/2}) && \text{при } n/N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при выполнении условий леммы

$$r \left(\frac{t_1}{\sigma_1\sqrt{N}}, \frac{t_2}{\sigma_2\sqrt{N}} \right) = o \left(\frac{1}{N} \right). \quad (14)$$

В силу (13), (14) при $n, N \rightarrow \infty$

$$\ln \varphi(t_1, t_2) = -t_1^2/2 - t_2^2/2 - t_1 t_2 \rho + o(1),$$

откуда получаем, что

$$\varphi(t_1, t_2) = \exp\{-(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \rho)/2\}(1 + o(1))$$

в каждой точке (t_1, t_2) . Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют биномиальное распределение с параметрами $m \geq 2$ и $p = n/(mN)$, $0 < n < mN$, $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполняется одно из следующих условий:

$$(1) \quad n/N \rightarrow 0, \quad n^2/N \rightarrow \infty;$$

$$(2) \ 0 < a_1 \leq n/N \leq a_2 < \infty, \ n(1 - n/(mN))^3 \rightarrow \infty;$$

$$(3) \ n/N \rightarrow \infty, \ (1 - n/(mN))N^{4/3}/n \rightarrow \infty, \ (1 - n/(mN))n^3/N^3 = O(1).$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{S_n = z\} = \det Q_N(g((z - A_N)Q_N) + o(1))$$

равномерно по $z = (k, l)$, где k, l — целые неотрицательные числа.

Доказательство. На основании лемм 1 и 3 достаточно показать, что

$$\|Q_N^{-1}\|^2 = O(H_N).$$

Пусть $d \in \Omega(1/2, 1/4)$. Используя (7), лемму 2 и свойства биномиальных вероятностей, нетрудно проверить, что

$$H_N(d) \geq cN,$$

где c — положительная постоянная, зависящая от d . Следовательно, для некоторого $c_1 > 0$ имеет место неравенство

$$H_N \geq c_1 N. \quad (15)$$

Поскольку

$$\|Q_N^{-1}\|^2 = \sup_{|x|=1} (\sigma_1^2 N x_1^2 + \sigma_2^2 N x_2^2),$$

используя (10), получаем, что

$$\|Q_N^{-1}\|^2 = \begin{cases} O(n) & \text{при } n/N \rightarrow 0, \\ O(n(1 - n/(mN))) & \text{при } 0 < a_1 \leq n/N \leq a_2 < \infty, \\ O((1 - n/(mN))n^3/N^2) & \text{при } n/N \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Отсюда и (15) следует, что при выполнении условий леммы справедливо соотношение

$$\|Q_N^{-1}\|^2 = O(H_N).$$

Лемма доказана.

Аналогично леммам 3, 4 доказываются следующие утверждения.

Лемма 5. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют распределение (4), где

$$x = \frac{n}{n+N} \exp \left\{ -\frac{n}{n+N} \right\}, \quad (16)$$

$n, N \rightarrow \infty$ так, что $n^2/N \rightarrow \infty, \ n/N^2 \rightarrow 0$.

Тогда последовательность распределений $(S_N - A_N)Q_N$ слабо сходится к двумерному нормальному закону с плотностью (9).

Лемма 6. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют распределение (4), где x определяется соотношением (16), $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n^2/N \rightarrow \infty$, $n/N = O(1)$. Тогда

$$\mathbf{P}\{S_n = z\} = \det Q_N(g((z - A_N)Q_N) + o(1))$$

равномерно по $z = (k, l)$, где k, l — целые неотрицательные числа.

Лемма 7. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют распределение (5), где λ — решение уравнения (6) в интервале $(0, 1)$, $n > N$, $n, N \rightarrow \infty$ так, что $(n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$, $N/\ln n \rightarrow \infty$.

Тогда последовательность распределений $(S_N - A_N)Q_N$ слабо сходится к двумерному нормальному закону с плотностью (9).

Лемма 8. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют распределение (5), где λ — решение уравнения (6) в интервале $(0, 1)$, $n, N \rightarrow \infty$ так, что $1 < a_1 \leq n/N \leq a_2 < \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{S_n = z\} = \det Q_N(g((z - A_N)Q_N) + o(1))$$

равномерно по $z = (k, l)$, где $k = 0, 1, \dots, l = N, N + 1, \dots$

Теперь перейдем к доказательству теорем 1–3.

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют биномиальное распределение с параметрами $m \geq 2$ и $p = n/(mN)$. Следуя доказательству теоремы Муавра–Лапласа, можно показать, что при $n, N \rightarrow \infty$, $mN - n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{\mu_N = k\} = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi N}} \exp \left\{ -\frac{(k - n)^2}{2\sigma_2^2 N} \right\} (1 + o(1)) \quad (17)$$

равномерно по всем k , для которых $(k - n)/\sigma_2 \sqrt{N}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале. Утверждение теоремы 1 вытекает из (3), (17) и леммы 4.

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют распределение (4), где x определяется соотношением (16). В [7] доказано, что

$$\mathbf{P}\{\mu_N = n\} = \frac{N}{(n + N)\sqrt{2\pi n}} (1 + o(1)).$$

Утверждение теоремы 2 следует из последнего равенства, (3) и леммы 6.

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют распределение (5). Согласно теореме 4.2.7 из [5] имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{\mu_N = n\} = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi N}} (1 + o(1)),$$

из которого, а также (3) и леммы 8 следует утверждение теоремы 3.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., О распределении одной статистики в полиномиальной схеме. *Труды Московского института электронного машиностроения* (1973) **32**, 73–91.
2. Агиевич С. В., Об одной комбинаторной задаче о размещениях. *Компьютерный анализ данных и моделирование. Сб. научных статей V международной конференции*, ч.3, Минск, 1998, 28–31.
3. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
4. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
5. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
6. Pavlov Yu. L., *Random forests*. VSP, Utrecht, 2000.
7. Павлов Ю. Л., Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе. *Теория вероятностей и ее применения* (1977) **22**, №3, 523–533.
8. Мухин А. Б., Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №4, 660–674.

Статья поступила 17.06.2002.