Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, О перманентах случайных дважды стохастических матриц и асимптотических оценках чисел латинских прямоугольников и латинских квадратов, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 4, 65–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:56:14

О перманентах случайных дважды стохастических матриц и асимптотических оценках чисел латинских прямоугольников и латинских квадратов

© 2002 г. А. Н. Тимашёв

Рассматривается класс $\mathcal{U}_n(k)$ всех $(0, 1)$ -матриц A_k размера $n \times n$, имеющих в каждой строке и каждом столбце ровно k единиц, $k = 1, \dots, n$. Доказывается асимптотическая формула для $\text{per } A_k$, справедливая при $n \rightarrow \infty$ и $0 < n - k = o(n/\ln n)$ равномерно относительно $A_k \in \mathcal{U}_n(k)$. Обсуждаются известные оценки сверху и снизу для чисел латинских прямоугольников размера $m \times n$ и латинских квадратов размера $n \times n$, в том числе их асимптотические выражения при $n \rightarrow \infty$ и $m = m(n)$. Отмечается, что известная гипотеза О'Нейла об асимптотике числа латинских квадратов справедлива в усиленной форме. Формулируются новые гипотезы такого типа, из которых выводятся асимптотические оценки для чисел латинских прямоугольников и латинских квадратов, улучшающие ранее известные результаты. В заключение приводится краткий обзор литературы по затронутым в статье темам с формулировками основных результатов.

Рассмотрим класс $\mathcal{U}_n(k)$ всех $(0, 1)$ матриц размера $n \times n$, имеющих в каждой строке и каждом столбце ровно k единиц, $k = 1, \dots, n$. Если $A_k \in \mathcal{U}_n(k)$ и $\text{per } A_k$ — перманент матрицы A_k , то (см. [1], с. 140; [2])

$$n!(k/n)^n \leq \text{per } A_k \leq (k!)^{n/k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Нижняя оценка в (1) следует из гипотезы Ван-дер-Вардена, доказанной в [3], если каждый элемент матрицы A_k разделить на k ; при этом получится дважды стохастическая матрица размера $n \times n$, перманент которой не меньше, чем $n!n^{-n}$. Верхняя оценка в (1) следует из гипотезы Х. Минка (см. [1], с. 151]), доказанной в [2].

Известно (см. [1], с. 140]), что если $L(n, m)$ — число латинских прямоугольников, состоящих из m строк и n столбцов, элементами которых являются числа $1, \dots, n$, то

$$\frac{(n!)^{m+n}}{n^{mn}((n-m)!)^n} \leq L(n, m) \leq \prod_{k=n-m+1}^n (k!)^{(n/k)}, \quad m = 1, \dots, n. \quad (2)$$

В частности, $L(n, n) = L_n$ — число латинских квадратов размера $n \times n$. В этом случае из

(2) следует, что

$$\frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}} \leq L_n \leq \prod_{k=1}^n (k!)^{n/k}. \quad (3)$$

Заметим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}} = (n/e^2)^{n^2} (2\pi n)^n e^{1/6} (1 + O(1/n)).$$

Используя формулу Стирлинга, нетрудно убедиться в том, что при $n \rightarrow \infty$

$$\prod_{k=1}^n (k!)^{n/k} = (n/e^2)^{n^2} \exp((n/4) \ln^2 n (1 + O(1/\ln n))).$$

С учетом (3) получаем, что

$$(n/e^2)^{n^2} (2\pi n)^n e^{1/6} (1 + O(1/n)) \leq L_n \leq (n/e^2)^{n^2} \exp((n/4) \ln^2 n (1 + O(1/\ln n))). \quad (4)$$

В работе О'Нейла [4] была высказана гипотеза о том, что при $n \rightarrow \infty$

$$L_n^{1/n^2} \sim n/e^2. \quad (5)$$

Из (4) следует, что гипотеза (5) справедлива в усиленной форме: при $n \rightarrow \infty$

$$L_n^{1/n^2} = (n/e^2) (1 + O(\ln^2 n/n)). \quad (6)$$

Более того, если при $n \rightarrow \infty$ функция $f(n) \rightarrow \infty$ так, что $\ln^2 n = o(f(n))$, то

$$L_n^{1/nf(n)} = \left(\frac{n}{e^2}\right)^{n/f(n)} \left(1 + O\left(\frac{\ln^2 n}{f(n)}\right)\right)$$

(в частности, при $f(n) = n$, $n = 1, 2, \dots$, откуда следует (6)).

Теорема 1. Пусть $n \rightarrow \infty$ и $k = k(n) \rightarrow \infty$ так, что $0 < n - k = o(n/\ln n)$. Тогда равномерно относительно $A_k \in \mathfrak{A}_n(k)$

$$\text{per } A_k = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{k}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{(n-k) \ln n}{n}\right)\right). \quad (7)$$

Доказательство. Утверждение теоремы 1 означает, что последовательность

$$t_n = \frac{n}{(n-k) \ln n} \max_{A_k \in \mathfrak{A}_n(k)} |(2\pi n)^{-1/2} (e/k)^n \text{per } A_k - 1|, \quad n = 2, 3, \dots,$$

ограничена.

Поскольку при $n \rightarrow \infty$

$$n!(k/n)^n = \sqrt{2\pi n} (k/e)^n (1 + O(1/n)),$$

с учетом (1) достаточно убедиться в том, что

$$(k!)^{n/k} = \sqrt{2\pi n} (k/e)^n (1 + O((n-k) \ln n/n)).$$

В условиях теоремы $k \sim n$, поэтому согласно формуле Стирлинга

$$(k!)^{n/k} = (2\pi k)^{n/2k} (k/e)^n (1 + O(1/n)).$$

Таким образом, достаточно проверить, что

$$(2\pi k)^{n/2k} = \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{(n-k)\ln n}{n}\right) \right).$$

Логарифмируя это равенство, получаем, что

$$\frac{n-k}{2k} \ln(2\pi) + \frac{n \ln k - k \ln n}{2k} = O\left(\frac{(n-k)\ln n}{n}\right).$$

Так как

$$\frac{n-k}{2k} \ln(2\pi) = O((n-k)/k),$$

нужно показать, что

$$n \ln k - k \ln n = O((n-k) \ln n).$$

Пусть $g_n = n - k = o(n/\ln n) > 0$, тогда

$$\frac{n \ln k - k \ln n}{(n-k) \ln n} = 1 + \frac{n \ln(1 - g_n/n)}{g_n \ln n}$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n \ln(1 - g_n/n)}{g_n \ln n} = -\frac{1 + o(1)}{\ln n} = o(1),$$

откуда следует (7).

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Тем же методом несложно показать, что

$$\prod_{k=n-m+1}^n (k!)^{n/k} = \frac{(n!)^{m+n}}{n^{mn}((n-m)!)^n} (1 + o(1))$$

при $n \rightarrow \infty$ и $m = o(\sqrt{n/\ln n})$. Следовательно, при таких условиях согласно (2)

$$L(n, m) = (n!)^m \exp\left(-\binom{m}{2} - \frac{m^3}{6n}\right) (1 + o(1)). \quad (8)$$

Известно [5], что оценка (8) на самом деле справедлива при $m = o(\sqrt{n})$. Более сильный результат установлен в [6], где, в частности, получена асимптотика числа латинских прямоугольников $L(n, m)$ при

$$m = O(n^{1-\delta}), \quad (9)$$

где $\delta \in (1/7, 1)$ — постоянная.

Поскольку $L(n, n-1) = L(n, n)$, для латинских квадратов можно положить $m = n-1$, и тогда условие (9) не выполняется. Тем не менее, при небольших значениях n наблюдается достаточно хорошее согласие между оценкой $\tilde{L}_n$ из статьи [6] при $m = n-1$ и статистическими оценками чисел L_n (см. [7]).

Замечание 2. Из неравенств (1) следует, что при $k \rightarrow \infty$ равномерно относительно $A_k \in \mathcal{A}_n(k)$

$$(\text{per } A_k)^{1/n} = \frac{k}{e} \left(1 + O\left(\frac{\ln k}{k}\right) \right). \quad (10)$$

Далее будем считать, что матрица A_k выбрана случайно равномерно из класса $\mathcal{A}_n(k)$.

Соотношение (10) подтверждает еще одну гипотезу из [4], состоящую в том, что

$$(\text{per } A_k)^{1/n} \sim k/e$$

при $k \rightarrow \infty$ для почти всех матриц $A_k \in \mathcal{A}_n(k)$. В [4] показано, что это верно при $k \rightarrow \infty$ и $k \leq (\ln n)^{1/4-\varepsilon}$, где ε — постоянная, $0 < \varepsilon < 1/4$.

С другой стороны, еще в [8] была установлена справедливость этого утверждения при $n \rightarrow \infty$ и $n - k < n^{1/3-\eta}$, где η — постоянная, $0 < \eta < 1/3$.

Замечание 3. Согласно (1)

$$n!(k/n)^n \leq \mathbf{E}(\text{per } A_k) \leq (k!)^{n/k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11)$$

В частности, при условиях теоремы 1

$$\mathbf{E}(\text{per } A_k) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{k}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{(n-k)\ln n}{n}\right)\right).$$

Справедливость (5) с учетом (11) следует из более сильной гипотезы, состоящей в том, что при $n \rightarrow \infty$

$$L_n^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^n \mathbf{E}(\text{per } A_k)\right)^{1/n} (1 + o(1)). \quad (12)$$

Используя (3), (7), (11), (12), можно получить оценки чисел L_n , лучшие, чем (3). Точнее, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Если (12) выполняется, то для $\delta \in (0, 1)$ и для всех достаточно больших значений n

$$\frac{n!^{2n}}{n^{n^2}} \exp\left(\frac{n(1-\delta)}{8} \ln \ln n\right) < L_n < \prod_{k=1}^n (k!)^{n/k} \exp\left(-\frac{n(1-\delta)}{64} (\ln \ln n)^2\right). \quad (13)$$

Доказательство. Пусть

$$\varepsilon \in (0, 1/4), \quad m = [(\ln n)^{1/4-\varepsilon}], \quad \delta \in (0, 1).$$

В [4] показано, что при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq m$, для математического ожидания $\mathbf{E}(\text{per } A_k)$ перманента матрицы A_k справедлива формула

$$\mathbf{E}(\text{per } A_k) = \sqrt{\frac{2\pi n(k-1)}{ek}} \left(\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}}\right)^n (1 + o(n^{-1+\delta})). \quad (14)$$

Если

$$\gamma_k = \frac{\mathbf{E}(\text{per } A_k)}{n!(k/n)^n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

то согласно (11)

$$\gamma_k \geq 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Далее, согласно (12)

$$L_n = \exp(o(n)) \frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}} \prod_{k=1}^n \gamma_k \geq \exp(o(n)) \frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}} \prod_{k=1}^m \gamma_k,$$

причем из (14) и формулы Стирлинга следует, что

$$\prod_{k=1}^m \gamma_k = \frac{(2\pi m)^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{m-1}{2} + \frac{n\theta_m}{12m}\right) (1 + o(1)),$$

где

$$0 < \theta_m < 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m = 1.$$

При $n \rightarrow \infty$

$$\ln m = (1/4 - \varepsilon) \ln \ln n + O((\ln n)^{\varepsilon-1/4}),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \ln \gamma_k &= ((n-1)/2) \ln(2\pi m) - (m-1)/2 + O(n(\ln n)^{\varepsilon-1/4}) \\ &= (n(1-4\varepsilon)/8) \ln \ln n (1 + O(1/\ln \ln n)) \\ &> (n(1-\delta)/8) \ln \ln n \end{aligned}$$

при всех достаточно больших значениях n , если выбрать $\delta \in (4\varepsilon, 1)$. В силу произвольности $\varepsilon \in (0, 1/4)$ это означает, что $\delta \in (0, 1)$.

Тем самым нижняя оценка в (13) установлена. Для обоснования верхней оценки заметим, что если

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{\mathbf{E}(\text{per } A_k)}{(k!)^{n/k}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

то из (11) следует, что

$$\tilde{\gamma}_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

и поэтому согласно (12)

$$L_n = \exp(o(n)) \prod_{k=1}^n ((k!)^{n/k} \tilde{\gamma}_k) \leq \exp(o(n)) \prod_{k=1}^n (k!)^{n/k} \prod_{k=1}^m \tilde{\gamma}_k,$$

причем из (14) следует, что

$$\prod_{k=1}^m \tilde{\gamma}_k = (2\pi)^{(n+m-1)/2} n^{(m-1)/2} m^{(n-1)/2} \exp\left(-\frac{n \ln^2 m}{4} (1 + O(1/\ln m))\right) (1 + o(1)).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \ln \tilde{\gamma}_k &= -(n/4) \ln^2 m (1 + O(1/\ln m)) \\ &= -(n/4)(1/4 - \varepsilon)^2 (\ln \ln n)^2 (1 + O(1/\ln \ln n)) \\ &< -(n/64)(1 - \delta)(\ln \ln n)^2 \end{aligned}$$

при всех достаточно больших значениях n , если выбрать $\delta \in (4\varepsilon(2 - 4\varepsilon), 1)$. В силу произвольности $\varepsilon \in (0, 1/4)$ это означает, что $\delta \in (0, 1)$, откуда следует верхняя оценка в (13).

Предложение 1 доказано.

Замечание 4. Упомянутая в замечании 1 оценка $\tilde{L}_n$ из [6] при любом $\delta \in (0, 1)$ имеет вид

$$\tilde{L}_n = \frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}} \exp(O(n)).$$

Если гипотеза (12) справедлива и L_n^* — нижняя оценка чисел L_n в (13), то при всех достаточно больших значениях n

$$\tilde{L}_n < L_n^* < L_n.$$

Более того, для любого фиксированного значения $\delta \in (0, 1)$

$$\tilde{L}_n = o(L_n^*)$$

при $n \rightarrow \infty$, и поэтому $\tilde{L}_n = o(L_n)$, так что при сделанном предположении оценка $\tilde{L}_n$ имеет относительную погрешность, сколь угодно близкую к 1 при всех достаточно больших значениях n .

Замечание 5. Используя (7), нетрудно проверить, что при условиях теоремы 1 оценка (14) остается справедливой, если остаточный член вида $o(n^{-1+\delta})$ заменить на $O((n-k)/n)$. С другой стороны, полагая

$$f_n(k) = \sqrt{2\pi n(k-1)/(ek)} ((k-1)^{k-1}/k^{k-2})^n, \quad k = 2, \dots, n, \quad (15)$$

можно показать, что при $k \rightarrow \infty$

$$n!(k/n)^n (1 + o(1)) \leq f_n(k) \leq (k!)^{n/k} (1 + o(1)). \quad (16)$$

При ограниченных значениях k и $n \rightarrow \infty$ (16) следует из (11) и (14).

Изложенные соображения позволяют сформулировать еще одну гипотезу, состоящую в том, что при $n \rightarrow \infty$ и $2 \leq k \leq n$ для математического ожидания $E(\text{per } A_k)$ перманента случайной матрицы A_k справедлива формула (14) с заменой остаточного члена вида $o(n^{-1+\delta})$ на $o(1)$.

Замечание 6. При $n \rightarrow \infty$

$$\prod_{k=2}^n f_n(k) = \frac{e^{2/3}}{\sqrt{2\pi}} L_0(n) (1 + O(1/n)),$$

Таблица 1.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
β_n	1,2419	1,0096	1,1477	1,1233	1,1311	1,1356	1,1400	1,14	1,14	1,15	1,15

Таблица 2.

n	L_n	$L_0(n)$	$(\pi/e)L_0(n)$	ε_n
4	576	464	536	-0,069
5	161 280	159 751	184 629	0,145
6	$8,129 \cdot 10^8$	$7,083 \cdot 10^8$	$8,185 \cdot 10^8$	0,007
7	$6,148 \cdot 10^{13}$	$5,473 \cdot 10^{13}$	$6,325 \cdot 10^{13}$	0,029
8	$1,088 \cdot 10^{20}$	$0,962 \cdot 10^{20}$	$1,111 \cdot 10^{20}$	0,022
9	$5,525 \cdot 10^{27}$	$4,865 \cdot 10^{27}$	$5,622 \cdot 10^{27}$	0,018
10	$9,982 \cdot 10^{36}$	$8,756 \cdot 10^{36}$	$1,012 \cdot 10^{37}$	0,014
11	$7,76 \cdot 10^{47}$	$6,79 \cdot 10^{47}$	$7,85 \cdot 10^{47}$	0,012
12	$3,10 \cdot 10^{60}$	$2,71 \cdot 10^{60}$	$3,13 \cdot 10^{60}$	0,010
13	$7,47 \cdot 10^{74}$	$6,52 \cdot 10^{74}$	$7,54 \cdot 10^{74}$	0,009
14	$1,26 \cdot 10^{91}$	$1,10 \cdot 10^{91}$	$1,27 \cdot 10^{91}$	0,008

где

$$L_0(n) = (n/e^2)^{n^2} n^{(3n-2)/2} (8\pi^3/e)^{n/2}. \quad (17)$$

Если положить

$$L_n = L_0(n)\beta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то окажется, что при небольших значениях n числа β_n близки к 1. Приведем таблицу этих чисел при $4 \leq n \leq 14$ (точные значения L_n при $n \leq 9$ заимствованы из [9], а при $n = 10$ из [10], откуда взяты также оценки L_n при $11 \leq n \leq 14$). Вычисления велись с точностью до 10^{-4} при $n \leq 10$ и 10^{-2} при $11 \leq n \leq 14$.

Из таблицы 1 видно, что числа $L_0(n)$ достаточно хорошо аппроксимируют значения L_n (по крайней мере, при небольших значениях n). Нетрудно также проверить, что при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{L}_n = o(L_0(n))$$

(см. замечание 4).

Исходя из приведенных результатов, можно сформулировать гипотезу, состоящую в том, что при $n \rightarrow \infty$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \pi/e = 1,1557273 \dots,$$

что равносильно соотношению

$$L_n = (\pi/e)L_0(n)(1 + o(1)). \quad (18)$$

При этом величины $L_0(n)$ определяются согласно (17). Приведем таблицу значений L_n , $L_0(n)$, $(\pi/e)L_0(n)$ и $\varepsilon_n = \pi L_0(n)/(eL_n) - 1$ при $4 \leq n \leq 14$.

Числовые данные, приведенные в таблице 2, позволяют предположить, что гипотеза (18), по-видимому, справедлива. Сформулируем несколько следствий (18).

Следствие 1. При $n \rightarrow \infty$

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \sqrt{8\pi^3} e \left(\frac{n^2}{e^3} \right)^n n^{5/2} (1 + o(1)). \quad (19)$$

Нетрудно проверить, что относительная погрешность оценки (19) (с отбрасыванием остаточного члена $o(1)$) при $n = 9$ равна $-0,015$, а при $n = 13$ равна $-0,006$ (с точностью до 10^{-3}).

Следствие 2. При $n \rightarrow \infty$

$$L_n^{1/n} = \sqrt{\frac{8\pi^3}{e}} \left(\frac{n}{e^2} \right)^n n^{3/2} \left(1 - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln \pi - 1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (20)$$

При $n = 13$ оценка (20) обладает относительной погрешностью, примерно равной $-0,019$.

Следствие 3. При $n \rightarrow \infty$

$$L_n^{1/n^2} = \frac{n}{e^2} \left(1 + \frac{3 \ln n}{2n} + \frac{\ln C}{n} + \frac{9 \ln^2 n}{8n^2} + \frac{(3 \ln C - 2) \ln n}{2n^2} + \frac{\ln^2 C + 2 \ln \pi - 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \quad (21)$$

где $C = \sqrt{8\pi^3}/e = 9,55262131 \dots$, $\ln C = 2,2568156 \dots$

В свою очередь, оценка (21) при $n = 13$ дает относительную погрешность порядка $-0,007$.

Следствие 4. Пусть l_n — число редуцированных латинских квадратов порядка n (у каждого из таких квадратов первая строка и первый столбец совпадают с вектором $(1, \dots, n)$). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$l_n = \frac{1}{2e} l_0(n) (1 + o(1)),$$

где

$$l_0(n) = (n/e^2)^{n^2} n^{-(n+2)/2} (8\pi^3 e^3)^{n/2}.$$

Утверждение следствия 4 с учетом (17), (18) следует из формулы

$$L_n = n! (n-1)! l_n$$

и формулы Стирлинга.

Ниже приведена таблица значений l_n , $l_0(n)$ и $\delta_n = l_0(n)/(2e l_n) - 1$ для $4 \leq n \leq 15$.

При $n = 16$ методом экстраполяции в [10] получена заниженная оценка $l_{16} \cong 10^{102}$, на самом деле $l_{16} \cong (1/2e) l_0(16) \cong 7,9 \cdot 10^{103}$.

Таблица 3.

n	$(1/2e)l_0(n)$	l_n	δ_n
4	3,88	4	-0,030
5	66	56	0,179
6	9 741	9 408	0,035
7	$1,785 \cdot 10^7$	$1,694 \cdot 10^7$	0,054
8	$5,584 \cdot 10^{11}$	$5,353 \cdot 10^{11}$	0,043
9	$3,915 \cdot 10^{17}$	$3,776 \cdot 10^{17}$	0,037
10	$7,814 \cdot 10^{24}$	$7,581 \cdot 10^{24}$	0,031
11	$5,50 \cdot 10^{33}$	$5,36 \cdot 10^{33}$	0,026
12	$1,66 \cdot 10^{44}$	$1,62 \cdot 10^{44}$	0,025
13	$2,56 \cdot 10^{56}$	$2,51 \cdot 10^{56}$	0,020
14	$2,37 \cdot 10^{70}$	$2,33 \cdot 10^{70}$	0,017
15	$1,54 \cdot 10^{86}$	$1,50 \cdot 10^{86}$	

Замечание 7. Аналогичный подход можно использовать для асимптотической оценки числа латинских прямоугольников при $n \rightarrow \infty$ и $1 \leq m = m(n) \leq n - 1$.

Из (15) следует, что

$$\prod_{k=n-m+1}^n f_n(k) = (2\pi n/e)^{m/2} (1 - m/n)^{n^2-mn+1/2} \frac{(n!)^{2n}}{n^{mn}((n-m)!)^{2n}}. \quad (22)$$

Полагая при $n \rightarrow \infty$

$$L(n, m) = C(n, m) \prod_{k=n-m+1}^n f_n(k) (1 + o(1)), \quad (23)$$

из (18) и формулы

$$\prod_{k=2}^n f_n(k) = \frac{e^{2/3} L_n}{\sqrt{2\pi} \beta_n} (1 + O(1/n))$$

при $m = n - 1$ получаем, что

$$L_n = L(n, n - 1) = \sqrt{2\pi^3} e^{-5/3} \prod_{k=2}^n f_n(k) (1 + o(1)). \quad (24)$$

Учитывая (11), (14), (16), (22), (23), (24), можно предположить, что при $n \rightarrow \infty$ и $1 \leq m = m(n) \leq n - 1$

$$L(n, m) = C(n, m) (2\pi n/e)^{m/2} (1 - m/n)^{n^2-mn+1/2} (n!/(n-m)!)^{2n} n^{-mn} (1 + o(1)), \quad (25)$$

где

$$1 \leq C(n, m) \leq \sqrt{2\pi^3} e^{-5/3} = 1,487358536 \dots \quad (26)$$

Если $m = n - 1$, то согласно (23), (24) можно положить

$$C(n, n - 1) = \sqrt{2\pi^3} e^{-5/3}.$$

Если $n \rightarrow \infty$ и $m = o(\sqrt{n})$, то нетрудно проверить, что правая часть равенства (25) (без учета множителя $C(n, m)$) равна

$$(n!)^m \exp \left(-\binom{m}{2} - \frac{m^3}{6n} \right) (1 + o(1)),$$

что совпадает с известной асимптотической оценкой чисел $L(n, m)$ (см. [5]). Таким образом, при $m = o(\sqrt{n})$ можно положить $C(n, m) = 1$, и тогда оценка (25) будет выполняться.

Используя формулу Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n \exp(\theta_n/(12n)),$$

где $0 < \theta_n < 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 1$, нетрудно убедиться в том, что правая часть (25) может быть записана в виде

$$C(n, m) \frac{(n!)^{m+n}}{n^{mn} ((n-m)!)^n} (1 - m/n)^{-(n-1)/2} \times \exp(-m/2 + (1/12)(1 - m/n - n\theta_{n-m}/(n-m)))(1 + o(1)).$$

Следовательно, если $n \rightarrow \infty$ и $m = o(n)$, то правая часть (25) без учета множителя $C(n, m)$ равна

$$\frac{(n!)^{n+m}}{n^{mn} ((n-m)!)^n} (1 - m/n)^{-n/2} e^{-m/2} (1 + o(1)),$$

что совпадает с асимптотической оценкой чисел $L(n, m)$ из [6]. Эта оценка доказана в [6] при условии, что $m = o(n^{6/7})$, и там же высказана гипотеза, согласно которой результат остается верным, если при $n \rightarrow \infty$ величина $m = O(n^{1-\delta})$, где δ фиксировано и $0 < \delta \leq 1$.

Исходя из сказанного выше, можно предположить, что то же верно и при $m = o(n)$. Если это предположение справедливо, то при $m = o(n)$ в (25) можно считать, что $C(n, m) = 1$.

Изложенные соображения косвенным образом подтверждают справедливость оценок (25), (26) при $n \rightarrow \infty$ и $1 \leq m = m(n) \leq n-1$. Численные расчеты показывают, что величины $C(n, m)$ действительно заключены в границах (26). Если, например, $n = 10$ и $m = 3$, то $L(10; 3) \cong 2,131 \cdot 10^{18}$ (это значение заимствовано из [11]), и вычисления по формуле (25) дают $C(10; 3) \cong 1,139$; если же $n = 13$, то $L(13; 3) \cong 1,106 \cdot 10^{28}$, и поэтому $C(13; 3) \cong 1,104$.

В [6] сформулирована еще одна гипотеза, состоящая в том, что существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что $0 \leq C_1 \leq C_2$ и при $1 \leq m \leq n$

$$\exp(C_1 m^2/n) \leq L(n, m)(n!)^{-m} \left(\frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{n^m} \right)^{-n} \leq \exp(C_2 m^2/n). \quad (27)$$

Однако при $m = n-1$ из (17), (18) и формулы Стирлинга следует, что

$$\ln(L_n(n!)^{-2n+1} n^{n^2-n}) = \frac{1}{2} n \ln n (1 + o(1)),$$

так что верхняя оценка в (27) при больших n не может выполняться. То же утверждение можно вывести из нижней оценки (13).

Получить оценки величин $C(n, m)$, более точные, чем (26), пока не удалось. Заметим, однако, что если положить

$$\tilde{C}(n, m) = 1 + (C_0 - 1)m/n, \quad m = 1, \dots, n-1,$$

где

$$C_0 = \sqrt{2\pi^3} e^{-5/3},$$

то окажется, что числа $\tilde{C}(n, m)$ достаточно хорошо аппроксимируют значения $C(n, m)$. Так, в условиях рассмотренного выше примера, когда $m = 3$, при $n = 10$ получаем $\tilde{C}(10; 3) \cong 1,146$ с относительной погрешностью порядка 0,006; при $n = 13$ справедливо соотношение $\tilde{C}(13; 3) \cong 1,112$ с относительной погрешностью 0,007.

В заключение, не претендуя на полноту, приведем краткий обзор литературы по темам, затронутым в работе, с формулировками основных результатов.

Впервые перманенты дважды стохастических матриц, по-видимому, были рассмотрены в [12], где, в частности, показано, что такие перманенты всегда положительны. Там же установлено, что если $A_k \in \mathcal{A}_n(k)$, то $\text{per } A_k \geq k$. Гипотеза Ван-дер-Вардена сформулирована в [13]: если A — дважды стохастическая матрица размера $n \times n$, то $\text{per } A \geq n! n^{-n}$ с равенством тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны $1/n$. Как уже упоминалось выше, эта гипотеза доказана в [3] (и независимо в [14] без обоснования единственности минимизирующей матрицы). Гипотеза Минка впервые сформулирована в [15]: если A — $(0, 1)$ -матрица размера $n \times n$ со строчными суммами $r_1, \dots, r_n \geq 1$, то

$$\text{per } A \leq \prod_{i=1}^n (r_i!)^{1/r_i}.$$

Доказательство этого утверждения приведено в [2].

В [16] рассмотрен класс дважды стохастических матриц вида

$$A = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \Pi_i,$$

где $\Pi_1, \dots, \Pi_s$ — подстановочные матрицы размера $n \times n$. В предположении, что на множестве всех $(n!)^s$ упорядоченных наборов таких матриц задано равномерное распределение, установлено, что

$$\mathbf{E}(\text{per } A) = \frac{1}{s^n (n!)^{s-2}} \sum_{r_1 + \dots + r_s = n} \frac{(n - r_1)! \dots (n - r_s)!}{r_1! \dots r_s!},$$

где суммирование осуществляется по всем решениям уравнения

$$r_1 + \dots + r_s = n$$

в целых неотрицательных числах $r_1, \dots, r_s$. Показано, что для любого фиксированного $n = 1, 2, \dots$ имеют место равенства

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\text{per } A) = n! n^{-n}.$$

В случае фиксированного $s \geq 3$ и $n \rightarrow \infty$ доказана формула

$$\mathbf{E}(\text{per } A) = \sqrt{2\pi n} (1 - 1/s)^{n(s-1) + s - 1/2} (1 - 2/s)^{-(s-1)/2} (1 + o(1)).$$

Нижняя граница перманента $(0, 1)$ -матрицы A со строчными суммами

$$r_1 \geq \dots \geq r_n$$

впервые получена в [17]:

$$\text{per } A \geq \prod_{i=1}^n \max\{r_i + i - n, 0\}.$$

Простое доказательство этого неравенства приведено в [18]. В [19] высказана гипотеза, состоящая в том, что если $A_k \in \mathcal{A}_n(k)$, $n = 1, 2, \dots$, то для фиксированного $k \geq 3$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\text{per } A_k)^{1/n} > 1$$

(справедливость этого утверждения сразу следует из (1)).

Случайные матрицы из класса $\mathcal{A}_n(k)$ рассматривались в упоминавшейся выше работе [4]. Для математического ожидания $\mathbf{E}(\text{per } A_k)$ перманента матрицы A_k , выбранной случайно равномерно из класса $\mathcal{A}_n(k)$, справедлива оценка (14).

Для второго момента $\mathbf{E}(\text{per } A_k)^2$ в [4] получена асимптотическая формула

$$\mathbf{E}(\text{per } A_k)^2 = \frac{2\pi n(k-1)}{ek} \left(\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}} \right)^{2n} (1 + 1/4(k-1)^4 + O(1/k^6))(1 + O(n^{-1/2+\delta})),$$

где

$$3 \leq k < (\ln n)^{1/4-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1/4, \quad 0 < \delta < 1/2.$$

Из этих результатов следует, что если $k = k(n) \in \mathbf{N}$ — монотонно возрастающая функция от n , не ограниченная сверху и такая, что $k(n) < (\ln n)^{1/4-\varepsilon}$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\text{per } A_{k(n)} / \mathbf{E}(\text{per } A_{k(n)}) \rightarrow 1$$

по вероятности.

В статье [20] рассматривался класс $\mathcal{A}(n, N)$ всех $(0, 1)$ -матриц размера $n \times n$, имеющих N единиц, $n \leq N \leq n^2$. Если матрица $A_{n,N}$ выбрана случайно равномерно из этого класса, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(\text{per } A_{n,N}) = n!(N/n^2)^n \exp(-(1/2)(n^2/N - 1))(1 + O(1/n^{2\varepsilon}))$$

в предположении, что $N > n^{3/2+\varepsilon}$, где постоянная ε лежит в интервале $(0, 1/2)$. При этих же условиях

$$\mathbf{E}(\text{per } A_{n,N})^2 = (n!)^2 (N/n^2)^{2n} \exp(-(n^2/N - 1))(1 + O(1/n^{1/4+\varepsilon}) + O(1/n^{2\varepsilon})).$$

Из этих результатов следует, что если $N = N(n) > n^{3/2+\varepsilon}$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\text{per } A_{n,N} / (\mathbf{E}(\text{per } A_{n,N(n)}))^{-1} \rightarrow 1$$

по вероятности. Это утверждение допускает следующую модификацию, также приведенную в [20]. Пусть $\mathcal{A}_n(R, S)$ — класс всех $(0, 1)$ -матриц размера $n \times n$, имеющих

$$R = (r_1, \dots, r_n), \quad S = (s_1, \dots, s_n)$$

в качестве векторов строчных и столбцовых сумм. В частности, если $r_j = s_j = k$, $j = 1, \dots, n$, то

$$\mathfrak{U}_n(R, S) = \mathfrak{U}_n(k).$$

Класс матриц $\mathfrak{U}_n(R, S)$ называется разреженным с функцией $f(n)$, если

$$r_j < f(n), \quad s_j < f(n), \quad j = 1, \dots, n.$$

Этот же класс называется сгущенным с функцией $f(n)$, если

$$r_j > n - f(n), \quad s_j > n - f(n), \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $A \in \mathfrak{U}_n(R, S)$, где $\mathfrak{U}_n(R, S)$ — сгущенный класс $(0, 1)$ -матриц с функцией

$$f(n) = (\ln n)^{1-\varepsilon},$$

где ε — постоянная, $\varepsilon \in (0, 1)$, и

$$L(n) = n^2 - \sum_{j=1}^n r_j$$

— число нулей в матрице A .

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\text{per } A = n! \exp(-L(n)/n)(1 + O(n^{-1+\delta})),$$

где δ — постоянная, $\delta \in (0, 1)$.

Если же $\mathfrak{U}_n(R, S)$ — разреженный класс $(0, 1)$ -матриц с функцией

$$f(n) = (\ln n)^{1/4-\varepsilon},$$

где ε — постоянная, $\varepsilon \in (0, 1/4)$, то число матриц в таком классе при $n \rightarrow \infty$ есть

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^n r_j\right)!}{\prod_{j=1}^n (r_j! s_j!)} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n r_j(r_j - 1) \sum_{j=1}^n s_j(s_j - 1)}{2 \left(\sum_{j=1}^n r_j\right)^2}\right) (1 + O(n^{-1+\delta}))$$

где δ — постоянная, $\delta \in (0, 1)$.

Класс $\mathfrak{U}(n; N)$ рассматривался также в [19] в предположении, что при $n \rightarrow \infty$

$$N = N_1 = N_1(n) = n \ln n + Cn + o(n),$$

где C — постоянная. При этих условиях

$$\mathbf{E}(\text{per } A_{n, N_1}) = \exp(n(\ln \ln n - 1 + (C - 1/2)/\ln n + o(1/\ln n))),$$

$$\mathbf{D}(\text{per } A_{n, N_1}) = \exp(2n \ln \ln n + O(n)).$$

Пусть

$$P(n, N_1) = \mathbf{P}\{\text{per } A_{n, N_1} > 0\},$$

тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, N_1) = \exp(-2e^{-C}).$$

Если же

$$N_2 = N_2(n) = n \ln n + n\omega(n) + o(n),$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, N_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega(n) \rightarrow \infty, \\ 0 & \text{при } \omega(n) \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Обозначим через $\nu(A)$ максимальное число попарно противоречивых подстановок, соответствующих наборам из n неколлинеарных единиц $(0, 1)$ -матрицы A размера $n \times n$. Ясно, что $\text{per } A \geq \nu(A)$, а случай $\nu(A) \geq 1$ эквивалентен неравенству $\text{per } A > 0$. Положим

$$P(n, N, r) = \mathbf{P}\{\nu(A_{n,N}) \geq r\}, \quad r = 1, 2, \dots$$

При $r = 1$

$$P(n, N, 1) = \mathbf{P}\{\text{per } A_{n,N} > 0\}.$$

В [19] установлены следующие утверждения.

Если $r \in \mathbf{N}$ фиксировано и при $n \rightarrow \infty$

$$N_r^* = n \ln n + (r-1)n \ln \ln n + Cn + o(n),$$

где C — постоянная, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, N_r^*, r) = \exp(-2e^{-C}/(r-1)!).$$

Если же $r \in \mathbf{N}$ фиксировано и при $n \rightarrow \infty$

$$N_r = n \ln n + (r-1)n \ln \ln n + n\omega(n) + o(n),$$

где $\omega(n) \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, N_r, r) = 1.$$

Аналогичные результаты получены и для класса случайных $(0, 1)$ -матриц $A(p) = (a_{ij})$ размера $n \times n$, у которых элементы a_{ij} — независимые в совокупности случайные величины такие, что

$$\mathbf{P}\{a_{ij} = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{a_{ij} = 0\} = p,$$

где p не зависит от индексов i и j . Точнее, если

$$P_n(p) = \mathbf{P}\{\text{per } A(p) > 0\},$$

то (см. [21], с. 88) при $n \rightarrow \infty$ и $p = (\ln n + C)/n + o(1/n)$, где C — постоянная,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(p) = \exp(-2e^{-C}).$$

Если же $r \in \mathbf{N}$ фиксировано и при $n \rightarrow \infty$

$$p = \ln n/n + (r-1) \ln \ln n/n + \omega(n)/n + o(1/n),$$

где $\omega(n) \rightarrow \infty$, то (см. [21], с. 90)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\nu(A(p)) \geq r\} = 1.$$

Рассматривалась также задача оценки числа $M(n)$ всех $(0, 1)$ -матриц размера $n \times n$ с нулевым перманентом. В [22] показано, что при $n \rightarrow \infty$

$$M(n) = n2^{n^2-n+1}(1 + o(1)).$$

С другой стороны (см. [23]), для любого целого положительного r существуют $(0, 1)$ -матрицы размера $n \times n$ с перманентом, равным r , и минимальное значение n с таким свойством не превосходит $[\log_2(r - 1)] + 2$, $r = 2, 3, \dots$

В [24] доказано следующее утверждение. Пусть

$$r_k(n) = \min\{\text{per } A_k / A_k \in \mathcal{A}_n(k)\},$$

тогда

$$r_k(n) \leq k^{2n} / \binom{nk}{k}, \quad k = 3, \dots, n.$$

Это утверждение следует из (1), поскольку

$$(k!)^{n/k} \leq k^{2n} / \binom{nk}{k}, \quad 3 \leq k \leq n.$$

Там же была высказана гипотеза, согласно которой для любого фиксированного $k = 3, 4, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_k(n))^{1/n} = \frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}}$$

(что согласуется с гипотезой, сформулированной в замечании 5). При $k = 3$ эта гипотеза справедлива, что следует из оценки, доказанной в [25]: если $A_3 \in \mathcal{A}_n(3)$, то

$$\text{per } A_3 \geq 6(4/3)^{n-3}, \quad n = 3, 4, \dots$$

Перманенты случайных стохастических матриц рассматривались в статье автора [26]. Пусть $\mathfrak{B}_n(k)$ — класс всех $(0, 1)$ -матриц размера $n \times n$, имеющих в каждой строке k единиц, $2 \leq k \leq n$. Если B_k — матрица, выбранная случайно равномерно из класса $\mathfrak{B}_n(k)$, то

$$\mathbf{E}(\text{per } B_k) = n! (k/n)^n.$$

Если все элементы матрицы B_k разделить на k , то получится случайная стохастическая матрица B'_k , для которой $\text{per } B'_k = k^{-n} \text{per } B_k$, так что

$$\mathbf{E}(\text{per } B'_k) = n! n^{-n}.$$

В [26] показано, что если $k = 2$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(\text{per } B_k)^2 = (\pi n/e)(2/e)^n(1 + o(1));$$

если же $k \geq 3$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(\text{per } B_k)^2 = (n!)^2 n^{-2n} (k(k-1))^n \exp((n-1)/(k-1))(1 + o(1)).$$

Из этих результатов следует, что если $n \rightarrow \infty$ и $k = k(n) \rightarrow \infty$ так, что $\sqrt{n} = o(k(n))$, то

$$\frac{\text{per } B_{k(n)}}{n! (k/n)^n} \rightarrow 1$$

по вероятности. Условие $\sqrt{n} = o(k(n))$ означает, что $n^{3/2} = o(N)$, где $N = nk(n)$ — число единиц в матрице $B_{k(n)}$. Это указывает на аналогию в формулировках законов больших чисел для случайной матрицы B_k и случайной $(0, 1)$ -матрицы $A_{n,N}$ (см. выше).

Заметим, что класс $(0, 1)$ -матриц $\mathcal{B}_n(k)$ рассматривался в [27], где сформулирован результат, аналогичный теореме Эрдеша–Реньи [19], оценивающей вероятность положительности перманента случайной $(0, 1)$ -матрицы с заданным числом единиц. Таким образом, указанная аналогия распространяется и на закон больших чисел.

В [26] рассмотрена также случайная стохастическая матрица C_n размера $n \times n$, строки которой являются независимыми в совокупности одинаково распределенными n -мерными случайными величинами, имеющими симметричное распределение Дирихле с параметром $\nu > 0$. Отметим, что в случае $\nu = 1$ в [28] показано, что с вероятностью 1 при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$S(C_n) \rightarrow 1 - \gamma,$$

где $S(C_n)$ — пропускная способность дискретного канала без памяти с матрицей переходных вероятностей C_n и $\gamma = 0,5772\dots$ — постоянная Эйлера.

Справедливы следующие утверждения [26]:

$$\mathbf{E}(\text{per } C_n) = n!n^{-n},$$

и если $n \rightarrow \infty$ и $\nu = \nu(n) > 0$ меняется так, что $n\nu(n) \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{E}(\text{per } C_n)^2 = (n!)^2 n^{-2n} (1 - 1/(1 + n\nu))^n \exp(1/\nu) (1 + O(1/(n\nu))).$$

Если же $n \rightarrow \infty$ и $\nu = \nu(n) > 0$ меняется так, что $n(\nu(n))^2 \rightarrow \infty$, то

$$(n^n/n!) \text{per } C_n \rightarrow 1$$

по вероятности.

Вопрос об оценке числа $(0, 1)$ -матриц размера $n \times m$ при некоторых ограничениях на рост координат векторов сумм строк $(r_1, \dots, r_n)$ и векторов сумм столбцов $(s_1, \dots, s_m)$ рассматривался в [29].

Получены следующие результаты. Пусть $M(n, m)$ — число таких матриц, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$M(n, m) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^n (r_i!) \prod_{j=1}^m (s_j!)} (l^{-\alpha} + r_n^*),$$

где

$$N = \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{j=1}^m s_j,$$

причем эта формула справедлива, если выполняются условия одного из следующих трех случаев:

$$(1) \quad \alpha = (1/2)(l-1)^2, \quad r_n^* = O(n^{-1+\gamma^2/2}), \quad r_1 = \dots = r_n = s_1 = \dots = s_m = l, \quad m = n, \\ 1 < l \leq \gamma \sqrt{\ln n}, \quad \gamma \in (0, 1) \text{ — постоянная};$$

$$(2) \quad \alpha = (1/2)(k-1)(l-1), \quad r_n^* = O(n^{\gamma-1} \ln^5 n), \quad r_1 = \dots = r_n = k, \quad s_1 = \dots = s_m = l > 1, \\ 1 < k \leq (l-1)^{-1} \gamma \ln n, \quad \gamma \in (0, 1) \text{ — постоянная};$$

$$(3) \quad \alpha = (2/N^2) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} \sum_{j=1}^m \binom{s_j}{2}, \quad r_n^* = O(n^{\gamma^4/4-1/2} \ln^2 n),$$

$$l = \max\{r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_m\} \leq \gamma \ln^{1/4} n, \quad \gamma \in (0, (2/3)^{1/4}) \text{ — постоянная}.$$

В [30] изучался близкий к рассматриваемой проблематике вопрос о существовании системы различных представителей случайных множеств. Набор элементов $(x_1, \dots, x_n)$ называется системой различных представителей (или трансверсалью) семейства $X_1, \dots, X_n$ подмножеств множества X , если

$$x_i \in X_i, \quad x_i \neq x_j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Пусть $\mathfrak{P}(X)$ — множество всех подмножеств X . На совокупности непустых подмножеств, входящих в $\mathfrak{P}(X)$, $|X| = m$, зададим равномерное распределение и будем предполагать, что множества $X_1, \dots, X_n$ выбираются независимо друг от друга. При этих условиях в [30] установлена справедливость следующих утверждений.

При $n \rightarrow \infty$ вероятность того, что случайный набор непустых множеств

$$X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{P}(X), \quad |X| = n,$$

обладает трансверсалью, стремится к 1.

При $n \leq m$ и $m \rightarrow \infty$ с вероятностью, стремящейся к 1, случайный набор непустых множеств

$$X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{P}(X), \quad |X| = m,$$

обладает трансверсалью.

Свойства перманентов рассматривались в некоторых монографиях и обзорных статьях. Из имеющихся в литературе на русском языке отметим следующие издания. Наиболее полный обзор приведен в [1] (см. с. 164–209), где представлена библиография за период с 1812 по 1981 год. В этой книге есть отдельная глава, содержащая изложение вопросов применения перманентов, а также список гипотез и нерешенных проблем. Имеется также обзор [31], в котором представлен достаточно полный список литературы о перманентах. В книге [32] содержится определение перманента и краткий обзор некоторых его свойств. Монография [33] содержит главу о трансверсальных и перманентах. Здесь приводятся основные свойства перманентов, даются формулы для перманентов выпуклых комбинаций двух и трех подстановочных матриц, матричная факторизация [17], общая формула Райзера (см. [34], с. 33) для вычисления перманентов и некоторые их оценки. В обзоре [35] рассматриваются вопросы, связанные с перманентами случайных $(0, 1)$ -матриц и случайных дважды стохастических матриц. Монография [36] содержит, в частности, подробное изложение вопросов, имеющих связь с теоремой Ван-дер-Вардена–Егорычева–Фаликмана, а также асимптотические методы изучения неотрицательных матриц, в том числе оценки числа примитивных $(0, 1)$ -матриц, исследования случайных решеток и булевых алгебр, случайных покрытий множеств, максимальной глубины некоторых классов $(0, 1)$ -матриц.

Несколько в стороне от рассматриваемых проблем находится книга [37], в которой впервые систематически исследуются асимптотические свойства перманентов матриц со случайными элементами. Асимптотический анализ случайных перманентов и их производящих функций осуществляется в схемах нормальной и пуассоновской аппроксимации выборок. Получение новых предельных результатов основано на использовании алгебраических и аналитических свойств перманентов конечномерных проекционных матриц и их производящих функций. Применение методов ортогональных и канонических разложений и композиций позволяет провести асимптотическое исследование симметрических статистик, представленных функционалами по случайным перманентным мерам. Приводятся отдельные примеры возможного анализа случайных перманентов матриц с зависимыми элементами.

Подсчет числа латинских прямоугольников $L(n, m)$ при $m = 2$ и $m = 3$ связан с классическими комбинаторными задачами: о числе беспорядков и супружеских парах. Назовем латинский прямоугольник нормализованным, если его первая строка совпадает с вектором $(1, 2, \dots, n)$. Число $K(n, m)$ нормализованных латинских прямоугольников размера $m \times n$ связано с $L(n, m)$ соотношением

$$L(n, m) = n! K(n, m).$$

При $m = 2$ число беспорядков

$$D_n = K(n, 2) = n! \sum_{i=0}^n (-1)^i / i!,$$

так что $L(n, 2) \sim (n!)^2 e^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$. Этот результат был известен еще Эйлеру. При $m = 3$

$$K(n, 3) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} D_{n-k} D_k U_{n-2k},$$

где

$$U_0 = 1, \quad U_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!, \quad n = 1, 2, \dots,$$

— число размещений в задачах о супружеских парах, то есть трехстрочных латинских прямоугольников, первые две строки которых суть

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Формула для U_n получена в [38]; соответствующий результат для $K(n, 3)$ доказан в [39]. При $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение (см. [11], с. 264)

$$U_n \sim n! e^{-2} \left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2!(n-1)_2} - \dots + \frac{(-1)^k}{k!(n-1)_k} + \dots \right),$$

где

$$(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Для величин $K(n, 3)$ при $n \rightarrow \infty$ справедливо аналогичное разложение [40]

$$K(n, 3) \sim (n!)^2 e^{-3} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n)_2} + \frac{5}{6(n)_3} + \dots + \frac{b_s}{s!(n)_s} + \dots \right),$$

где $b_s = H_s(-1/2)$, $H_s(t)$ — многочлены Эрмита, $s = 1, 2, \dots$

Таблицы чисел $K(n, 3)$ для $n \leq 40$ приведены в [41]. Формулы для чисел $K(n, 4)$ найдены в [42], способ нахождения $K(n, 4)$ указан в [43].

С момента появления результатов работ [44] и [8] долгое время не было существенного прогресса в решении сложной задачи определения асимптотики числа латинских прямоугольников $L(n, m)$. В [44] было показано, что при $n \rightarrow \infty$ и $m < (\ln n)^{3/2}$

$$L(n, m) = (n!)^m \exp \left(-\binom{m}{2} \right) (1 + o(1)),$$

и высказано предположение, что эта оценка остается справедливой при $m = o(n^{1/3})$. Это предположение позднее было доказано в [8]. В [5] получено усиление результатов статьи [8]:

$$L(n, m) = (n!)^m \exp \left(-\binom{m}{2} - \frac{m^3}{6n} + O(\max\{m/\sqrt{n}, m^4/n^2\}) \right)$$

равномерно относительно $m \leq n/10$.

В частности, при $n \rightarrow \infty$ и $m = o(\sqrt{n})$ справедлива формула (8).

Дальнейшим продвижением явилась работа [6] (см. выше замечание 1). В этой работе, в частности, показано, что при $n \rightarrow \infty$ и $m = o(n^{6/7})$

$$L(n, m) = (n!)^m n^{-mn} ((n)_m)^n (1 - m/n)^{-n/2} e^{-m/2} (1 + o(1))$$

(подробнее см. замечание 7).

Каких-либо асимптотик для числа $L_n = L(n, n)$ латинских квадратов порядка n при $n \rightarrow \infty$ (если не считать гипотезы автора (18)) до настоящего времени не получено.

Перечисление латинских квадратов порядка n было осуществлено при $n = 6$ в [45], $n = 7$ в [46], $n = 8$ в [47], $n = 9$ в [48], $n = 10$ в [10]. В [10] приведены также оценки чисел L_n при $11 \leq n \leq 16$, полученные с помощью некоторых косвенных методов, в том числе метода экстраполяции (см. выше примечание к таблице 3). В [49] приведены известные к 1975 г. точные значения L_n при $n \leq 9$ и сказано, что дальнейшее определение этих значений при $n > 9$ представляется крайне сложным.

Точная формула для L_n (имеющая, по-видимому, лишь теоретический интерес) приведена в [50]:

$$L_n = n! \sum_{A \in G_n} (-1)^{N_0(A)} \binom{\text{per } A}{n},$$

где G_n — множество всех 2^{n^2} (0, 1)-матриц размера $n \times n$, $N_0(A)$ — число нулевых элементов в матрице A .

Следуя [31], приведем результаты, связанные с пополнением частичного латинского квадрата.

Известно, что если в частичном латинском квадрате порядка n заполнено n мест, то его не всегда можно дополнить до латинского квадрата. В 1960 г. была выдвинута гипотеза [51] о том, что частичный латинский квадрат порядка n с не более чем $n - 1$ заполненными местами всегда может быть дополнен до латинского квадрата. Было показано [52], что можно построить латинский квадрат размера $n \times n$ с заданными $n - 1$ диагональными элементами. Пусть r обозначает число строк, в которых находятся $n - 1$ заполненных ячеек частичного латинского квадрата порядка n , а s — соответствующее число столбцов. В [53] установлено, что если $r \leq [n/2]$ или $s \leq [n/2]$, то частичный латинский квадрат можно дополнить до латинского квадрата.

Сходное условие приведено в [54]. Если в частичном латинском $n \times n$ квадрате найдется такая строка и столбец, что в этой строке и в этом столбце заполнено по крайней мере $[n/2]$ ячеек, то такой частичный латинский квадрат тоже можно дополнить до латинского квадрата. В [55] и [56] было получено дальнейшее продвижение в доказательстве гипотезы из статьи [51]. Установлено, что частичный латинский квадрат порядка n с заполненными $n - 1$ ячейками можно дополнить до латинского квадрата в следующих случаях:

- (1) заполненные ячейки находятся самое большее в $n - 2\sqrt{n}$ строках (столбцах);
- (2) число различных элементов в заполненных ячейках не превосходит $n - 2\sqrt{n}$;
- (3) n делится на 4 и $n \geq 556$;
- (4) $n > 1111$.

Тем самым упомянутая гипотеза подтверждается для всех достаточно больших значений n .

Множество из $r \leq n$ различных элементов, каждые два из которых не расположены на одной линии, называется частичной трансверсалью латинского квадрата порядка n . При $r = n$ это множество называется трансверсалью латинского квадрата.

Известна гипотеза Райзера (1967 г.) о том, что любой латинский квадрат нечетного порядка имеет трансверсаль. В [57] показано, что в латинском квадрате порядка $n \geq 7$ имеется хотя бы одна частичная трансверсаль порядка, не меньшего $(n + 1)/3$. В [58] установлено, что любой латинский $n \times n$ квадрат имеет частичную трансверсаль порядка, не меньшего $\geq n - \sqrt{n}$. Аналогичный результат доказан в [59]: каждый латинский $n \times n$ квадрат имеет частичную трансверсаль порядка $n - r$, где $r(r + 1) \geq n$.

Латинским квадратам и их применениям посвящена специальная монография [60]. В книге [61] изучаются различные вопросы, связанные с теорией латинских прямоугольников и латинских квадратов (ортогональные латинские квадраты, конечные геометрии, конечные плоскости, блок-схемы, разностные множества, системы различных представителей, матрицы Адамара и др.)

Список литературы

1. Минк Х., *Перманенты*. Мир, Москва, 1982.
2. Брэгман Л. М., Некоторые свойства неотрицательных матриц и их перманентов. *ДАН СССР* (1973) **211**, №1, 27–30.
3. Егорычев Г. П., Решение проблемы Ван-дер-Вардена для перманентов. Препринт, Институт физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР, ИФСО-13М, Красноярск, 1980.
4. O'Neil P. E., Asymptotic and random matrices with row-sum and column-sum restrictions. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1969) **75**, №6, 1276–1282.
5. Stein C. M., Asymptotic evaluation of the number of Latin rectangles. *J. Comb. Theory* (1978) **25**, №1, 38–49.
6. Godsil C. D., McKay B. D., Asymptotic enumeration of Latin rectangles. *J. Comb. Theory* (1990) **48**, №1, 19–44.
7. Пазизин С. В., Об одном подходе к получению статистических оценок размера генеральной совокупности. *Дискретная математика* (1995) **7**, №1, 123–133.
8. Yamamoto K., On the asymptotic number of Latin rectangles. *Japan. J. Math.* (1951) **21**, 113–119.
9. *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. Научн. изд-во БРЭ, Москва, 1999.
10. McKay B. D., Rogoyski E., Latin squares of order 10. *Electronic J. Comb.* (1995), №2(3), 1–4.
11. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*. ИЛ, Москва, 1963.
12. König D., Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinanten-Theorie und Mengenlehre. *Math. es Termesz. Értesitő* (1916) **34**, 104–119.

13. Van der Waerden B. L., Aufgabe 45. *Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinig.* (1926) **35**, 117.
14. Фаликман Д. И., Доказательство гипотезы Ван-дер-Вардена о перманенте дважды стохастической матрицы. *Матем. заметки* (1981) **29**, №6, 931–938.
15. Minc H., Upper bounds for permanents of $(0, 1)$ -matrices. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1963) **69**, 789–791.
16. Wilf H. S., On the permanent of a doubly stochastic matrix. *Canad. J. Math.* (1966) **18**, 758–761.
17. Jurkat W. B., Ryser H. J., Matrix factorizations of determinants and permanents. *J. Algebra* (1966) **3**, 1–27.
18. Minc H., A lower bound for permanents of $(0, 1)$ -matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1967) **18**, 1128–1132.
19. Erdős P., Rényi A., On random matrices. II. *Studia Sci. Math. Hungar.* (1968) **3**, №4, 459–464.
20. O’Neil P., Asymptotic in random $(0, 1)$ -matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1970) **25**, №2, 290–295.
21. Сачков В. Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.
22. Everett C. J., Stein P. R., The asymptotic number of $(0, 1)$ -matrices with zero permanent. *Discrete Math.* (1973) **6**, 29–34.
23. Gordon B., Motzkin T. S., Welch L., Permanents of $(0, 1)$ -matrices. *J. Comb. Theory* (1974) **17**, 145–155.
24. Schrijver A., Valiant W. G., On lower bounds for permanents. *Indag. Math.* (1980) **42**, 425–427.
25. Voorhoeve M., A lower bound for the permanents of certain $(0, 1)$ -matrices. *Indag. Math.* (1979) **41**, 83–86.
26. Тимашёв А. Н., Закон больших чисел для перманентов случайных стохастических матриц. *Дискретная математика* (1999) **11**, №3, 91–98.
27. Shevelev V. S., On “projection” of the Erdős–Rényi theorem about permanent of stochastic $(0, 1)$ -matrices into the subset of stochastic $(0, 1)$ -matrices with equal row sums. *Тезисы докл. Третьей Всероссийской школы-коллоквиума по стохастическим методам*. ТВП, Москва, 1996, с. 177–178.
28. Амбросимов А. С., Тимашёв А. Н., Закон больших чисел для пропускной способности каналов без памяти со случайной переходной матрицей. *Пробл. передачи информации* (1995) **31**, №3, 24–34.
29. Минеев М. П., Павлов А. И., О числе $(0, 1)$ -матриц с заданными суммами по строкам и столбцам. *Докл. АН СССР* (1976) **230**, №2, 271–274.
30. Сачков В. Н., Системы различных представителей для случайных множеств. *Матем. сб.* (1975) **97**, 397–402.
31. Носов В. А., Сачков В. Н., Тараканов В. Е., Комбинаторный анализ (Матричные проблемы, теория выбора). *Итоги науки и техники, сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика*. ВИНТИ, Москва, 1981, т. 18, с. 53–93.
32. Рыбников К. А., *Введение в комбинаторный анализ*. МГУ, Москва, 1972.
33. Сачков В. Н., *Комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1977.
34. Райзер Г. Дж., *Комбинаторная математика*. Мир, Москва, 1966.
35. Сачков В. Н., Комбинаторные свойства неотрицательных матриц. *Пробл. киберн.* (1978) **26**, 37–50.
36. Сачков В. Н., Тараканов В. Е., *Комбинаторика неотрицательных матриц*. ТВП, Москва, 2000.
37. Королюк В. С., Боровских Ю. В., *Случайные перманенты*. Ин-т математики АН Украины, Киев, 1993.

38. Touchard J., Sur un problème de permutations. *C. R. Acad. Sci. Paris* (1934) **198**, 631–633.
39. Riordan J., Three-line Latin rectangles. *Amer. Math. Monthly* (1944) **51**, 450–452.
40. Yamamoto K., An asymptotic series for the number of three-line Latin rectangles. *J. Math. Soc. Japan* (1949) **1**, 226–241.
41. Gergely E., A simple method for constructing doubly diagonalized Latin squares. *J. Comb. Theory* (1974) **16**, №2, 266–272.
42. Добровольский М. А., О четырехстрочных латинских прямоугольниках. *Материалы межвузовской научной конф. пед. ин-тов центр. зоны*. Тула, 1968, с. 72–75.
43. Light F. W., Enumeration of truncated Latin rectangles. *Fibonacci Quart.* (1979) **17**, №1, 34–36.
44. Erdős P., Kaplansky I., The asymptotic number of Latin rectangles. *Amer. J. Math.* (1946) **68**, 230–236.
45. Fisher R., Yates F., The 6×6 Latin squares. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* (1934) **30**, 492–507.
46. Norton H., The 7×7 squares. *Ann. Eugenics* (1939) **9**, 269–307.
47. Wells B., The number of Latin squares of order 8. *J. Comb. Theory* (1967) **3**, 98–99.
48. Bammel S., Rothstein J., The number of 9×9 Latin squares. *Discrete Math.* (1975) **11**, 93–95.
49. Alter R., How many Latin squares are there? *Amer. Math. Monthly* (1975) **82**, 632–634.
50. Jiayu Shao, Wandu Wei, A formula for the number of Latin squares. *Discrete Math.* (1992) **110**, 239–246.
51. Evans T., Embedding incomplete Latin squares. *Amer. Math. Monthly* (1960) **67**, №10, 958–961.
52. Marica J., Schönheim J., Incomplete diagonals of Latin squares. *Can. Math. Bull.* (1969) **12**, №2, 235.
53. Lindner C. C., On completing Latin rectangles. *Can. Math. Bull.* (1970) **13**, №1, 65–68.
54. Dacic R., On the completion of incomplete Latin squares. *Publ. Inst. Math., Beograd* (1978) **23**, 75–80.
55. Häggkvist R., *A partial solution of the Evans conjecture for Latin squares*. Dep. Math. Univ. Umea, 1976.
56. Häggkvist R., A solution of the Evans conjecture for Latin squares of large size. *Combinatorics* (1978) **1**, 495–513.
57. Koksma K. K., A lower bound for the order of a partial transversal in a Latin square. *J. Comb. Theory* (1969) **7**, №1, 94–95.
58. Woolbright D. E., An $n \times n$ Latin square has a transversal with at least $n - \sqrt{n}$ distinct symbols. *J. Comb. Theory* (1978) **24**, №2, 235–237.
59. Brouwer A. E., de Vries A. J., Wieringa R. M. A., A lower bound for the length of partial transversals in a Latin square. *Nieuw Arch. Wiskd., III, Ser. 26* (1978) 330–332.
60. Denes J., Keedwell A. D., *Latin squares and their applications*. Akademiai Kiado, Budapest, 1974.
61. Холл М., *Комбинаторика*. Мир, Москва, 1970.

Статья поступила 05.05.2001.

Переработанный вариант поступил 14.02.2002.