Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Вороненко, О методе разложения для распознавания принадлежности инвариантным классам, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 4, 110–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 08:13:28

О методе разложения для распознавания принадлежности инвариантным классам

© 2002 г. А. А. Вороненко

В работе строится общий метод распознавания принадлежности функций классам, замкнутым относительно подстановки констант, использующий разложение по переменной.

1. Введение

Известны различные постановки задачи распознавания свойств дискретных функций. В настоящей работе распознавание ведется схемами из функциональных элементов в произвольном полном базисе (СФЭ), входом которых является вектор-столбец значений функции, а выходом — бит, равный 1 для функций, обладающих заданным свойством, 0 в противном случае.

Следующая теорема является основной.

Теорема 1. Пусть F — произвольный класс булевых функций, замкнутый относительно подстановки констант на место переменных, и пусть существуют кодирование функций, принадлежащих F , и последовательность схем $\{\Sigma_m\}$, обладающие следующими свойствами:

(1) кодом константы является она сама;

(2) если на вход произвольной схемы Σ_m подать коды подфункций

$$f(x_1, \dots, x_{m-1}, 0), \quad f(x_1, \dots, x_{m-1}, 1),$$

принадлежащих F , то схема Σ_m распознает принадлежность функции $f(x_1, \dots, x_m)$ классу F ;

(3) если функция $f(x_1, \dots, x_m)$ принадлежит классу F , то выход схемы Σ_m содержит код функции $f(x_1, \dots, x_m)$;

(4) сложность схемы Σ_m не превосходит $\beta(m)$.

Тогда существует схема S_n , распознающая принадлежность классу F произвольной функции n переменных, заданной векторно, сложности, не большей

$$(2^n - 2)L(x_1 \& x_2) + \sum_{k=1}^n 2^{n-k} \beta(k),$$

где $L(x_1 \& x_2)$ — сложность реализации конъюнкции двух переменных.

Доказательство. Схема S_n будет иметь n уровней. На k -м уровне расположены 2^{n-k} подсхем, строящих по кодам подфункций

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n), \quad f(x_1, \dots, x_{k-1}, 1, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$$

код подфункции $f(x_1, \dots, x_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$ и проверяющих принадлежность классу F получаемых подфункций. Сложность каждой подсхемы на k -м уровне не превосходит $\beta(k)$. Выходом схемы S_n является конъюнкция выходов всех подсхем, проверяющих принадлежность классу F всех промежуточных подфункций. Сложность всей схемы не будет превосходить

$$(2^n - 2)L(x_1 \& x_2) + \sum_{k=1}^n 2^{n-k} \beta(k).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta(k)2^{-k}$ сходится, то принадлежность инвариантному классу распознается с линейной сложностью относительно длины 2^n вектор-столбца булевой функции.

Для класса монотонных функций конструкция теоремы 1 изложена в работе [1]. В настоящей работе этот результат обобщен для классов частичных монотонных функций и поляризуемых функций. Теорема 1 применяется для получения схем линейной сложности, распознающих свойство доопределимости до линейной функции. Напомним способ кодирования монотонных функций, использованный в [1].

Рассмотрим разбиение на цепи Анселя. Напомним, что цепью называется возрастающая последовательность соседних наборов. Разбиение на цепи Анселя строится по индукции. 0-мерные подкубы m -мерного булева куба, наборы $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, покрываются одной цепью, состоящей из этого набора. Пусть $k < m$ и k -мерные подкубы, множества наборов вида $(x_1, \dots, x_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_m)$ разбиты на цепи. Назовем цепи, наборы которых отличаются лишь $(k+1)$ -й координатой, параллельными. Разбиение $(k+1)$ -мерных подкубов получается передачей всем цепям с нулевой $(k+1)$ -й координатой наибольших наборов из параллельных им цепей. После этого цепи, не содержащие наборов, из дальнейшего рассмотрения исключаются. Количество цепей Анселя, покрывающих булев куб размерности m , равно (см. [2])

$$\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} = O(m^{-1/2} 2^m).$$

В [1] в качестве кода произвольной монотонной булевой функции использовался упорядоченный набор чисел, равных количеству нулей на цепях Анселя. Длина кода одинакова для всех монотонных функций m переменных и есть

$$O(m^{-1/2} 2^m \log(m+1)).$$

2. Частичные монотонные функции

Каждое значение частичной булевой функции может быть закодировано двумя битами. Не всюду определенная булева функция называется частичной монотонной, если для

нее существует монотонное доопределение. Замыканием частичной монотонной функции $f(x)$ называется функция $\tilde{f}(x)$, задаваемая соотношениями

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists y \leq x \mid f(y) = 1, \\ 0, & \text{если } \exists y \geq x \mid f(y) = 0, \\ f(x) & \text{не определена в противном случае.} \end{cases}$$

Кодом частичной монотонной булевой функции назовем упорядоченный набор троек чисел, состоящих из числа нулей (n_0), единиц (n_1) и общего количества наборов (length) ее монотонного замыкания на цепях Анселя. Длина кода одинакова для всех частичных монотонных функций m переменных и есть $O(m^{-1/2} 2^m \log(m+1))$.

Замечание 1. Все рассматриваемые ниже классы функций замкнуты относительно подстановки констант на место переменных. Для частичных монотонных функций удобно следующее кодирование констант: 00 — неопределенность, 10 — ноль, 01 — единица. Тогда первый бит кода равен n_0 , второй n_1 , а параметр length = 1.

Кроме этого все используемые кодирования констант, функций, зависящих от нуля переменных, получаются из вектор-столбца схемами константной сложности.

Опишем схему Σ_m^{part} . Схема Σ_m^{part} состоит из $\binom{m-1}{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}$ подсхем, входами которых являются пары троек, соответствующие параллельным цепям Анселя. Выход каждой подсхемы состоит из контрольного бита (mon) и кодов двух новых цепей (или одной, если цепи содержали по одному набору) в кубе размерности m . Подсхемы схемы Σ_m^{part} осуществляют следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \text{mon} &= n_1^0 + n_0^1 \leq \text{length}, \\ \text{max}_0 &= \max\{n_0^0, n_0^1\}, \\ \text{max}_1 &= \max\{n_1^0, n_1^1\}, \\ \text{length}^l &= \text{length} + 1, \\ n_0^l &= \text{max}_0 + (n_0^1 = \text{length}), \\ n_1^l &= \text{max}_1 + (n_1^1 > 0), \\ \text{length}^s &= \text{length} - 1, \\ n_0^s &= n_0^1 - (n_0^1 = \text{length}), \\ n_1^s &= n_1^1 - (n_1^1 > 0). \end{aligned}$$

Здесь l — удлиненная новая цепь, s — укороченная.

Выходом схемы Σ_m^{part} является конъюнкция контрольных битов и набор кодов новых цепей Анселя.

Лемма 1. Пусть $f_0 = f(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$ и $f_1 = f(x_1, \dots, x_{m-1}, 1)$ — частичные монотонные булевы функции. Тогда СФЭ Σ_m^{part} удовлетворяет условиям теоремы 1 и имеет сложность

$$\beta(m) = O(m^{-1/2} 2^m \log(m+1)).$$

Доказательство. Если частичная булева функция немонотонна, то существуют два набора, на которых нарушается монотонность. В силу частичной монотонности f_0 и f_1 эти наборы отличаются в m -й координате. Соединим эти наборы произвольной цепью

возрастающих наборов. По определению монотонного замыкания на соседних по m -й координате наборах $\alpha \leq \beta$ этой цепи $\tilde{f}_0(\alpha) = 1$, $\tilde{f}_1(\beta) = 0$. Поэтому функция f немонотонна тогда и только тогда, когда существует цепь Анселя в $(m-1)$ -мерном булевом кубе, на которой нижняя единица $\tilde{f}_0$ лежит выше верхнего нуля $\tilde{f}_1$, или $n_1^0 + n_0^1 > \text{length}$. Аналогичные рассуждения показывают, что в случае частичной монотонности f схема Σ_m^{part} выдает код f . Сравнение чисел, сложение, вычитание и взятие максимума реализуются подсхемами линейной сложности. Конъюнкция результатов сравнений имеет линейную сложность относительно числа сравнений. Таким образом, схема Σ_m^{part} выполняет требуемые в теореме 1 преобразования и имеет линейную относительно длины своего входа сложность. Лемма доказана.

Теорема 2. *Существует последовательность схем S_n , распознающих частичную монотонность произвольной функции n переменных, заданной векторно, сложности $O(2^n \sqrt{n} \log n)$.*

Доказательство. Из теоремы 1 и леммы 1 следует существование схем, распознающих частичную монотонность S_n , сложности

$$(2^n - 2)L(x_1 \& x_2) + \sum_{k=1}^n 2^{n-k} O(k^{-1/2} 2^k \log(k+1)) = O\left(2^n \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{\sqrt{k}}\right).$$

Оценим конечную сумму при помощи интеграла. Функция $\ln k / \sqrt{k}$ убывает при $k \geq 8$, поэтому

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^8 \frac{\ln k}{\sqrt{k}} + \int_8^n \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

Первое слагаемое является константой, а

$$\int_8^n \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = (2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x})|_8^n = O(\sqrt{n} \log n).$$

Теорема доказана.

3. Поляризуемые функции

Пусть для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ существует вектор β такой, что функция $f(x_1^{\beta_1}, \dots, x_n^{\beta_n})$ монотонна. Тогда функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется поляризуемой, а трехзначный набор β , определяемый соотношениями

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x) \text{ монотонна по } x_i, \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ антимонотонна по } x_i, \\ -, & \text{если переменная } x_i \text{ не существенна для } f(x), \end{cases}$$

называется вектором поляризации. Задача вероятностного тестирования свойств монотонности и поляризуемости рассматривалась в [3]. Кодом поляризуемой булевой функции назовем упорядоченный набор чисел, состоящий из вектора поляризации β и кода монотонной функции $f(x_1^{\beta_1}, \dots, x_m^{\beta_m})$. Длина кода также одинакова для всех поляризованных функций m переменных и есть $O(m^{-1/2} 2^m \log(m+1))$.

Опишем схему Σ_m^{unite} . Схема Σ_m^{unite} содержит $\binom{m-1}{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}$ подсхем, входами которых являются числа нулей (n^0 и n^1), соответствующие параллельным цепям Анселя.

Выход каждой подсхемы состоит из троичного разряда (mon) и кодов двух новых цепей (или одной, если цепи содержали по одному набору) в кубе размерности m . Подсхемы схемы Σ_m^{unite} осуществляют следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \text{mon} &= \text{sign}(n_0 - n_1), \\ n^l &= n^0 + (n^1 = \text{length}), \\ n^s &= n_1 - (n_1 = \text{length}) \end{aligned}$$

Здесь параметр length, число наборов на цепях, есть константа, известная до построения схемы.

Значение β_i на выходе для $i < m$ определяется таблицей

β_i^1	β_i^0		
	0	1	-
0	0	*	0
1	*	1	1
-	0	1	-

Здесь * означает неполяризуемость функции. Значение β_m равно -, если все разряды mon равны нулю. Значение β_m равно 1, если часть разрядов mon равна 1, а остальные — нулю. Значение β_m равно 0, если часть разрядов mon равна -1, а остальные — нулю. В остальных случаях $\beta_m = *$. Данное преобразование реализуется дополнительной частью схемы Σ_m^{unite} .

Выходом схемы Σ_m^{unite} является конъюнкция по всем i функций $\beta_i \neq *$, вектор β и набор чисел нулей на новых цепях Анселя (n^l на удлинённых, n^s на укороченных).

Лемма 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$ и $f(x_1, \dots, x_{m-1}, 1)$ — поляризуемые булевы функции. Тогда СФЭ Σ_m^{unite} удовлетворяет условиям теоремы 1 и имеет сложность

$$\beta(m) = O(m^{-1/2} 2^m \log(m+1)).$$

Доказательство. Если частичная булева функция неполяризуема, то возможны две ситуации.

1. Есть переменная x_i , существенная для обеих подфункций, по которой одна из них монотонна, а другая антимонотонна. Тогда для одного вектора поляризации $\beta_i = 0$, а для другого $\beta_i = 1$. Это проверяется дополнительной частью схемы Σ_m^{unite} .

2. Для монотонных функций

$$f(x_1^{\beta_1}, \dots, x_{m-1}^{\beta_{m-1}}, 0), \quad f(x_1^{\beta_1}, \dots, x_{m-1}^{\beta_{m-1}}, 1)$$

функция $f(x_1^{\beta_1}, \dots, x_{m-1}^{\beta_{m-1}}, x_m)$ ни монотонна, ни антимонотонна по x_m . Последнее возможно лишь, если на одних парах параллельных цепей Анселя нулей больше у $f(x_1^{\beta_1}, \dots, x_{m-1}^{\beta_{m-1}}, 0)$, а на других у $f(x_1^{\beta_1}, \dots, x_{m-1}^{\beta_{m-1}}, 1)$. Это также проверяется дополнительной частью схемы Σ_m^{unite} .

Код вектора поляризации получается на выходе дополнительной части, код монотонной функции — на выходах подсхем.

Итак, схема Σ_m^{unite} выполняет требуемые в теореме 1 преобразования. Сложность схемы Σ_m^{unite} линейна относительно длины ее входа. Лемма доказана.

С помощью леммы 2 и теоремы 1 полностью аналогично теореме 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Существует последовательность схем $\{S_n\}$, распознающих поляризуемость произвольной функции n переменных, заданной векторно, сложности $O(2^n \sqrt{n} \log n)$.*

4. Частичные линейные функции

Лемма 3. *Пусть частичная функция $f(x)$ доопределима до линейной, $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ — ее линейные доопределения. Тогда $f_1(x) \oplus f_2(x) \oplus f_3(x)$ — также ее линейное доопределение.*

Доказательство. В любой точке, где $f(x)$ определена, выполняются соотношения

$$f(x) = f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = f_1(x) \oplus f_2(x) \oplus f_3(x).$$

Лемма доказана.

Из леммы 3 вытекает важное следствие.

Следствие 2. *Множество доопределений частичной линейной функции образует линейное многообразие.*

Кодом частичной линейной булевой функции $f(x)$ назовем совместную систему линейных уравнений

$$A\alpha = \delta$$

по модулю 2 верхнетреугольного вида, задающую множество коэффициентов α всевозможных линейных доопределений $f(x)$. Длина кода есть $O(m^2)$. Это кодирование для констант превращается в следующее двухбитное: 00 — неопределенность, 10 — ноль, 11 — единица.

Возможность такого кодирования вытекает из следствия леммы 3.

Лемма 4. *Пусть $f_0 = f(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$ и $f_1 = f(x_1, \dots, x_{m-1}, 1)$ — частичные линейные булевы функции. Тогда существует СФЭ Σ_m^{lin} , удовлетворяющая условиям теоремы 1, сложности $\beta(m) = O(m^3)$.*

Доказательство. Пусть $A^0\alpha = \delta^0$ и $A^1\alpha = \delta^1$ — соответствующие системы. Тогда доопределения с фиктивной переменной x_m задаются системой

$$A^0\alpha = \delta^0, \quad A^1\alpha = \delta^1.$$

Доопределения с существенной переменной x_m задаются системой

$$A^0\alpha = \delta^0, \quad A^1\alpha = \delta^1 \oplus 1.$$

Совокупность этих систем объединяется в одну систему

$$\begin{aligned} (A^0 \mid 0)(\alpha \mid \alpha_m) &= \delta^0, \\ (A^1 \mid 1)(\alpha \mid \alpha_m) &= \delta^1. \end{aligned}$$

Схема, приводящая эту систему к верхнетреугольному виду методом Гаусса, имеет сложность $O(m^3)$. Лемма доказана.

Теорема 4. Существует последовательность схем $\{S_n\}$, распознающих доопределимость до линейной произвольной частичной булевой функции n переменных, заданной векторно, сложности $O(2^n)$.

Доказательство. Из теоремы 1 и леммы 4 следует существование схем S_n , распознающих частичную линейность, сложности

$$(2^n - 2)L(x_1 \& x_2) + \sum_{k=1}^n 2^{n-k} O(k^3).$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 2^{-k}$ сходится. По следствию 1 схема S_n имеет линейную сложность относительно длины вектор-столбца. Теорема доказана.

В. Б. Алексеевым развит метод логических полуколец (см. [4]), с помощью которого удалось понизить верхние оценки сложности для большого числа задач. Нижняя оценка для этого метода связана с возможностью удачного алгебраического представления исследуемого свойства. В частности, для схемного распознавания монотонных функций, она равнялась $\Omega(2^n n)$. Основным препятствием для удачного применения теоремы 1 является мощность класса функций. Для тех же монотонных функций, анализируя возможные однозначные кодировки, мы приходим к оценке $\Omega(2^n \sqrt{n})$. Для класса частичных линейных функций это препятствие удалось обойти, используя неоднозначно декодируемую кодировку. Класс частичных линейных функций интересен еще и тем, что к нему [5] сходится сверху счетная цепочка замкнутых классов частичной логики и, следовательно, он не описывается как класс сохранения конечноместного предиката.

Список литературы

1. Вороненко А. А., О сложности распознавания монотонности. *Матем. вопросы киберн.* (1999) **8**, 301–303.
2. Ансель Ж., О числе монотонных булевых функций n переменных. *Киберн. сб.* (1968) **5**, 42–53.
3. Goldreich O., Goldwasser S., Lehman E., Ron D., Testing monotonicity. *Proc. Annual Symp. Found. Computer Sci.* (1998), 426–435.
4. Алексеев В. Б., Логические полукольца и их использование для построения быстрых алгоритмов. *Вестник МГУ, Серия 1: Математика, механика* (1997) №1, 22–29.
5. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике. *Дискретная математика* (1994) **6**, №4, 58–79.

Статья поступила 28.10.2002.