Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Яковлева, О бесконечных группах с точками, *Дискрет. матем.*, 2002, том 14, выпуск 4, 153–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm269>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:02:50

О бесконечных группах с точками

© 2002 г. Е. Н. Яковлева

Рассматривается понятие точки группы, приводятся примеры групп с точками и доказывается теорема о расположении точек в подгруппах бесконечных групп.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 99-01-00432 и 02-01-00078, и гранта №9 Шестого конкурса научных проектов молодых ученых РАН 1999 г.

Точками группы G называются элементы конечного порядка следующего типа:

- единица группы есть точка в том и только в том случае, когда множество элементов конечного порядка из G конечно;
- неединичный элемент a есть точка, если для всякой неединичной конечной подгруппы $K < G$, нормализуемой элементом a , множество конечных подгрупп из $N_G(K)$, содержащих a , конечно.

Точка a называется тривиальной, если множество конечных подгрупп из G , содержащих a , конечно.

Определение точки введено В. П. Шунковым в [1].

Группы без инволюций, обладающие точками, рассматривались в [10]. Некоторые свойства групп с инволюциями, содержащих точки, описаны в [11].

Приведем примеры групп, обладающих точками.

- В конечных группах каждый элемент является точкой.
- Группа Новикова–Адяна, периодические произведения Адяна конечных групп без инволюций, периодический монстр Ольшанского являются примерами групп, в которых каждый неединичный элемент является точкой.
- Единичная группа и группа без кручений — группы с единственной точкой.
- Группа с конечной периодической частью — группа, в которой каждый элемент конечного порядка является точкой.
- Свободное произведение неединичной конечной группы и любой другой неединичной группы — группа с бесконечным множеством точек.

- Пусть $T_1, T_2, \dots$ — бесконечная последовательность конечных фробениусовых групп с одним и тем же неизменяемым множителем H , то есть,

$$T_n = F_n \rtimes H, \quad n = 1, 2, \dots$$

Свободное произведение G групп этой последовательности с объединенной подгруппой H является группой с нетривиальной точкой.

Существуют группы, не обладающие точками.

Теорема 1. *Никакая группа не содержит бесконечной локально конечной подгруппы с точками.*

Доказательство. Рассмотрим группу G и в ней бесконечную локально конечную подгруппу H . Возможны два случая:

- (1) H — группа без инволюций, и тогда по теореме Файта–Томпсона все ее конечные подгруппы разрешимы,
- (2) H — группа с инволюциями.

Пусть сначала H — локально конечная группа с разрешимыми конечными подгруппами и a — некоторый элемент группы H . Предположим, что a является точкой группы H . Тогда централизатор $C_H(a)$ конечен в силу периодичности группы H . Для любого неединичного элемента $b \in C_H(a)$ простого порядка централизатор $C_H(b)$ конечен. Действительно, предположим, что $C_H(b)$ бесконечен и $a \in C_H(b)$. Очевидно, что a является точкой группы $C_H(b)$. В $C_H(b)$ есть нормальная конечная подгруппа $\langle b \rangle$. Так как централизатор $C_H(b)$ локально конечен, в $C_H(b)$ найдется бесконечное множество конечных подгрупп, содержащих элемент a . Это невозможно.

Действительно, покажем, что никакая группа U не может одновременно содержать бесконечное множество конечных подгрупп с нетривиальным пересечением, содержащим точку z , и нетривиальную конечную нормальную подгруппу. Так как в группе U имеется бесконечное число элементов конечного порядка, то $z \neq e$ по определению точки. Пусть группа U содержит бесконечное множество конечных подгрупп с нетривиальным пересечением, содержащим точку z и нетривиальную конечную нормальную подгруппу D . Так как D является нормальной подгруппой группы U , то

$$N_U(D) = U$$

и множество конечных подгрупп в $N_U(D)$, содержащих z , бесконечно, то есть z не является точкой группы U .

Рассмотрим множество

$$\begin{aligned}\pi &= \pi(a) \\ &= \{p_1, p_2, \dots, p_n\}\end{aligned}$$

и множество

$$\{h_1, h_2, \dots, h_n\},$$

где

$$h_i \in (a), \quad |h_i| = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Так как $h_i \in C_H(a)$, то, как показано выше,

$$|C_H(h_i)| < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Так как H — периодическая локально разрешимая группа и h_i — почти регулярный элемент простого порядка, все силовские p_i -подгруппы из H являются черниковскими, $i = 1, 2, \dots, n$ [3] и $H/O_{p'_i}(H)$ — черниковские группы, $i = 1, 2, \dots, n$ [5]. Поэтому по теореме Ремака (см. [4]) и в силу свойств черниковских групп факторгруппа H/Z , где

$$Z = \bigcap_{i=1}^n O_{p'_i}(H),$$

также является черниковской.

Если бы подгруппа Z была черниковской, то группа H , являясь расширением черниковской группы с помощью черниковской группы, была бы черниковской группой, которая не может обладать точками. Действительно, в силу свойств черниковских групп в бесконечной черниковской группе каждый элемент содержится в бесконечном множестве конечных подгрупп. Так как в любой бесконечной черниковской группе найдется конечная нормальная подгруппа, по доказанному выше, бесконечная черниковская группа не содержит точек. Но a — точка группы H , следовательно, Z не является черниковской группой.

Рассмотрим группу $Z \rtimes (a)$. Так как $C_Z(h_1) \rtimes (a)$ — конечная разрешимая группа и $C_Z(h_1)$ — π' -подгруппа, для любого $q \in \pi(C_Z(h_1))$ найдется силовская q -подгруппа Q из $C_Z(h_1)$, нормализуемая элементом a . Подгруппа Q содержится в некоторой силовской q -подгруппе L из Z . Если L не является черниковской группой, то по теореме Блекберна (см. [9]), согласно которой в локально конечной p -группе G , если централизатор некоторой конечной подгруппы черниковский, то и сама группа черниковская, получаем, что нормализатор $N_L(Q)$ не является черниковской группой. Но $N_L(Q)$ локально конечен и содержит точку a . Получили противоречие, так как никакая группа не может содержать одновременно бесконечное множество конечных подгрупп с нетривиальным пересечением, содержащим точку a , и нетривиальную конечную нормальную подгруппу.

Значит, L — черниковская группа. Если в качестве L взять проекционную силовскую q -подгруппу, то все силовские подгруппы из Z по простым делителям порядка группы

$C_Z(h_1)$ являются черниковскими [2]. Еще раз применяя теорему Ремака, получаем, что Z/Z_1 — черниковская группа, где

$$Z_1 = \bigcap_{q \in \pi(C_Z(h_1))} O'_q(Z).$$

Группа Z_1 бесконечна, так как в противном случае Z была бы черниковской. Рассмотрим группу $Z_1 \rtimes \langle h_1 \rangle$. Очевидно, что элемент h_1 действует регулярно на Z_1 . Так как Z_1 — локально конечная группа, она является нильпотентной. Действительно, пусть K — произвольная конечная подгруппа из Z_1 . В силу локальной конечности Z_1 , подгруппу K можно включить в конечную подгруппу

$$M = \text{gr}(K, K^{h_1}, \dots, K^{h_1^{p_1-1}}),$$

для которой действие элементом h_1 является регулярным автоморфизмом простого порядка p_1 . По теореме Хигмана–Томпсона [6, 7] всякая конечная группа, обладающая регулярным автоморфизмом простого порядка, нильпотентна и длина ее верхнего центрального ряда ограничена числом, зависящим только от p . Следовательно, группа M — нильпотентна и длина ее верхнего центрального ряда ограничена числом s , зависящим только от p_1 . Это означает, что для любых элементов

$$a_1, a_2, \dots, a_s \in M$$

коммутатор

$$[a_1, a_2, \dots, a_s] = 1.$$

Так как s не зависит от выбора подгруппы K , группа Z_1 нильпотентна. Рассмотрим группу

$$R = Z_1 \rtimes \langle a \rangle.$$

Группа Z_1 является бесконечной периодической нильпотентной группой, следовательно, она обладает нетривиальной нормальной подгруппой S такой, что $N_R(S)$ бесконечен и содержит точку a . Учитывая, что $N_R(S)$ — локально конечная группа, получаем противоречие. В этом случае теорема доказана.

Пусть теперь H содержит инволюции и a — точка группы H . Нормализатор точки обладает конечной периодической частью, поэтому $C_H(a)$ конечен. По следствию A1 теоремы Хартли в [8] локально конечная группа, содержащая элемент с конечным централизатором, обладает локально разрешимой нормальной подгруппой конечного индекса. Тогда группа H обладает локально разрешимой нормальной подгруппой M конечного индекса. По доказанному выше, подгруппа M не содержит точек.

Рассмотрим группу $M \cdot \langle a \rangle$. Очевидно, что эта группа локально разрешима и a является в ней точкой. Но, по вышесказанному, группа $M \cdot \langle a \rangle$ не обладает точками. Полученное противоречие означает, что группа H не содержит точек. Теорема доказана.

Список литературы

1. Шунков В. П., *M_p -группы*. Наука, Москва, 1990.
2. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., *Основы теории групп*. Наука, Москва, 1982.
3. Шунков В. П., О локально конечной группе с экстремальными силовскими p -подгруппами по некоторому простому числу p . *Сибирский матем. журнал* (1967) **8**, №1, 213–229.
4. Шунков В. П., Об одном классе p -групп. *Алгебра и логика* (1970) **9**, №4, 484–496.
5. Черников С. Н., Условия конечности в общей теории групп. *Успехи матем. наук* (1959) **14**, №5, 45–96.
6. Higman G., Groups and rings having automorphisms without nontrivial fixed points. *J. London Math. Soc.* (1957), №32, 321–334.
7. Thompson J. G., Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order. *Proc. Nat. Amer. Sci. USA* (1959), №45, 578–581.
8. Hartley B. A., A general Brauer–Fowler theorem and centralizers in locally finite groups *Pacific J. Math.* (1992), №152, 101–117.
9. Blackburn N., Some remarks on Chernikov p -groups. III. *J. Math.* (1962), №6, 421–433.
10. Сенашов В. И., Шунков В. П., О группах с конечной периодической частью. *Алгебра и логика* (1983) **22**, №1, 93–112.
11. Шунков В. П., Группы с инволюциями. Препринт ВЦ СО АН СССР, Красноярск, 1986.

Статья поступила 27.09.2001.