Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Волков, Об автоматной модели преследования, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 2, 131–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm27>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:32:40

Об автоматной модели преследования

© 2007 г. Н. Ю. Волков

Изучается процесс преследования системой автоматов (хищников) нескольких независимых друг от друга автоматов (жертв) на плоскости. Показано, что существует конечный коллектив хищников, который ловит любую конечную независимую систему жертв таких, что их скорость меньше скорости хищников, и их обзор не больше обзора хищников, при любом начальном расположении жертв и стартующих из одной точки хищников.

1. Введение

Рассматривается автоматный аналог ситуации преследования хищниками своих жертв. С этой целью формализуются пространство, в котором происходит процесс преследования (пространство преследования), понятия хищников и жертв, как по логике их поведения, так и по способности обнаруживать друг друга и перемещаться. Пространство преследования представляется в виде плоскости, разбитой на квадраты целочисленной решеткой, а хищники и жертвы — в виде автоматов, которые, находясь в какой-либо клетке, умеют обозревать некоторую ее окрестность, и, в зависимости от вида (конфигурации) этой окрестности (то есть от расположения других автоматов в этой окрестности) и своего состояния, способны перемещаться в другую клетку плоскости. Автоматы-хищники и автоматы-жертвы в начале процесса образуют определенную диспозицию, находясь в своих начальных состояниях. После этого начинается процесс перемещения автоматов по плоскости. Внутренние логики автоматов в совокупности определяют этот процесс. Жертва считается пойманной, если она оказалась в фиксированной окрестности одного из хищников.

Рассматриваются следующие две основные задачи.

Сначала предполагается, что каждый из хищников не видит других хищников, но видит жертв, попавших в его зону обзора. Аналогично, каждая жертва не видит других жертв, но видит хищников, попавших в ее зону обзора (в этом случае мы говорим, что хищники и жертвы представляют собой, соответственно, независимые системы автоматов).

Спрашивается, существует ли система хищников K такая, что для любой системы жертв S , найдется такое начальное расположение автоматов из K , что при любом начальном расположении автоматов из S с течением времени все жертвы будут пойманы хищниками (первая задача).

Затем рассматривается более сложный и более реальный случай, когда хищники видят и жертв и друг друга на расстоянии своего обзора (в этом случае мы говорим, что

хищники представляют собой коллектив автоматов), а жертвы не обладают этим свойством (представляют собой независимую систему автоматов). Ставится тот же вопрос о возможности поимки всех жертв (вторая задача).

Показывается, что первая задача не имеет положительного решения, а вторая решается положительно. Устанавливается, что существует коллектив из 28 хищников такой, что хищники, стартуя из начального расположения в одной произвольной клетке плоскости, ловят любую конечную независимую систему жертв при любом начальном расположении жертв.

Автор работы выражает признательность В. Б. Кудрявцеву за научное руководство, а также А. В. Галатенко, высказавшему ряд ценных замечаний.

2. Постановка задачи и основные результаты

Будем использовать стандартные обозначения для множеств натуральных и целых чисел $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Z}$, соответственно. Положим $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Множество клеток, на которые плоскость разбивается целочисленной решеткой, обозначим через $\mathbf{Z}^2$, сопоставляя каждой клетке координаты ее нижнего левого угла. Назовем r -окрестностью клетки (x_0, y_0) множество

$$D_{(x_0, y_0), r} = \{(x, y) \mid |x - x_0| + |y - y_0| \leq r\}.$$

Под автоматом будем понимать инициальный конечный автомат, имеющий вид $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, где A — входной, B — выходной, Q — внутренний алфавиты автомата $\mathcal{A}$, $\varphi: Q \times A \rightarrow Q$ и $\psi: Q \times A \rightarrow B$ — функции переходов и выходов $\mathcal{A}$, соответственно, $q_0 \in Q$ — его начальное состояние. Алфавит A определяет возможности $\mathcal{A}$ видеть происходящее вокруг, а алфавит B — его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции φ и ψ задают внутреннюю логику автомата $\mathcal{A}$.

Рассмотрим автомат $\mathcal{A}$, перемещающийся по $\mathbf{Z}^2$. Выходным алфавитом $\mathcal{A}$ является множество $B = D_{(0,0), V}$, где параметр $V \in \mathbf{N}$ называется скоростью автомата $\mathcal{A}$. Входной алфавит $\mathcal{A}$ зависит от параметра $R \in \mathbf{N}$, $R \geq V$, называемого обзором автомата $\mathcal{A}$ и способа взаимодействия $\mathcal{A}$ с другими автоматами. Возможны два случая такого взаимодействия:

- (1) $\mathcal{A}$ является элементом независимой системы автоматов;
- (2) $\mathcal{A}$ является элементом коллектива автоматов.

Автомат со скоростью V и обзором R будем обозначать $\mathcal{A}(R, V)$. Пусть $\mathcal{A}(R, V)$ находится в клетке (x_0, y_0) . Множество $D_{(x_0, y_0), V}$ называется окрестностью хода $\mathcal{A}$, а множество $D_{(x_0, y_0), R}$ — зоной обзора $\mathcal{A}$.

Рассмотрим две системы автоматов $K = (W_1, \dots, W_m)(R, V)$ (хищники) и $S = (U_1, \dots, U_n)(R', V')$ (жертвы), где R и R' — обзоры, а V и V' — скорости хищников и жертв соответственно. Здесь S — независимая система автоматов, K может быть независимой системой, а может при $m \geq 2$ быть коллективом.

Пусть хищники $W_1, \dots, W_m$ расположены в клетках $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$, а жертвы $U_1, \dots, U_n$ — в клетках $(x'_1, y'_1), \dots, (x'_n, y'_n)$ соответственно.

Для каждого $i = 1, \dots, n$ строку $(a_1, \dots, a_m)$ такую, что для любого $j = 1, \dots, m$

$$a_j = \begin{cases} (x_j - x'_i, y_j - y'_i), & \text{если } |x_j - x'_i| + |y_j - y'_i| \leq R', \\ \Lambda & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

назовем U_i -конфигурацией. Легко видеть, что $a_j \in (D_{(0,0),R'} \cup \{\Lambda\})$. Каждая U_i -конфигурация однозначно задает (кодирует) расположение хищников, находящихся в зоне обзора U_i , следующим образом. Если $a_j = \Lambda$, то W_j расположен вне зоны обзора U_i , а если $a_j = (x_j'', y_j'')$, то W_j расположен в клетке $(x_i' + x_j'', y_i' + y_j'')$.

Если $K = (W_1, \dots, W_m)$ — независимая система автоматов, то для каждого $j = 1, \dots, m$ строку $(a_1, \dots, a_n)$ такую, что для любого $i = 1, \dots, n$

$$a_i = \begin{cases} (x_i' - x_j, y_i' - y_j), & \text{если } |x_i' - x_j| + |y_i' - y_j| \leq R, \\ \Lambda & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (1)$$

назовем W_j -конфигурацией. Легко видеть, что $a_i \in (D_{(0,0),R} \cup \{\Lambda\})$. Каждая W_j -конфигурация однозначно задает расположение жертв, находящихся в зоне обзора W_j .

Обозначим Q_j внутренний алфавит W_j , а множество всех пар вида $((x, y), q)$, где $(x, y) \in D_{(0,0),R}$, $q \in \bigcup_{j=1}^m Q_j$, обозначим M . Пусть каждый хищник W_j находится в состоянии q_j . Если $K = (W_1, \dots, W_m)$ — коллектив автоматов, то для каждого $k = 1, \dots, m$ строку $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}, a_{n+k+1}, \dots, a_{n+m})$ такую, что a_i при $i = 1, \dots, n$ определяется соотношением (1) и для любого $j = 1, \dots, m$, $j \neq k$,

$$a_{n+j} = \begin{cases} ((x_j - x_k, y_j - y_k), q_j), & \text{если } |x_j - x_k| + |y_j - y_k| \leq R, \\ \Lambda & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

назовем W_k -конфигурацией. Легко видеть, что $a_{n+j} \in M \cup \{\Lambda\}$. Каждая W_k -конфигурация однозначно задает расположение жертв в зоне обзора W_k , а также расположения и состояния других хищников, находящихся в зоне обзора W_k .

Расположения на плоскости жертв и хищников и состояния хищников однозначно задают все U_i -конфигурации и все W_j -конфигурации. Множество всех U_i -конфигураций при всевозможных расположениях жертв и хищников и состояниях хищников обозначим F' . Аналогично, множество всех W_j -конфигураций обозначим F . Входным алфавитом каждой жертвы U_i является множество всех пар вида $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_1 \in (\{\emptyset\} \cup F')$, а $\mathcal{F}_2 \in F'$. Входным алфавитом каждого хищника W_j является множество всех пар вида $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in F$.

Момент времени 2τ , $\tau \in \mathbb{N}_0$, называется моментом хода жертв с номером τ . Момент $2\tau + 1$ называется моментом хода хищников с номером τ . Промежуток времени $[2\tau, 2\tau + 1]$ называется тактом с номером τ . Время взаимодействия автоматов будем измерять в тактах.

Преследование независимой системой (коллективом) хищников независимой системы жертв происходит так. Фиксируются начальные (в нулевой момент времени) расположения всех хищников и жертв на плоскости. В нулевой момент каждая жертва U_i воспринимает в качестве входного символа пару $(\emptyset, \mathcal{F}_2)$, где U_i -конфигурация $\mathcal{F}_2$ задает расположение хищников в зоне обзора U_i . В момент 2τ , $\tau \in \mathbb{N}$, каждая жертва U_i воспринимает в качестве входного символа пару $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, задающую расположения хищников в зоне обзора U_i в моменты $2\tau - 1$ и 2τ . В каждый момент 2τ , $\tau \in \mathbb{N}_0$, жертва U_i в соответствии со своими функциями переходов и выходов определяет свое следующее состояние, выходной символ $\bar{b}$, и перемещается на вектор $\bar{b}$.

В момент $2\tau + 1$, $\tau \in \mathbb{N}_0$, хищник W_j воспринимает в качестве входного символа пару $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, задающую расположения жертв в зоне обзора W_j (а в случае коллектива и расположения и состояния других хищников, находящихся в зоне обзора W_j) в моменты 2τ и $2\tau + 1$, и в соответствии со своими функциями переходов и выходов определяет свое следующее состояние, выходной символ $\bar{b}$, и перемещается на вектор $\bar{b}$.

Система хищников K ловит жертву, если жертва в некоторый момент времени оказалась в окрестности хода одного из хищников. Пойманная жертва исчезает с плоскости. Система K ловит независимую систему жертв, если в процессе преследования K ловит каждую жертву.

Ставится вопрос, существует ли независимая система (коллектив) хищников $K(R, V)$ и их начальное расположение на плоскости такое что для произвольной конечной независимой системы жертв $S(R', V')$ и любого начального расположения жертв K ловит S .

Расположение автоматов системы, при котором все они находятся в одной клетке, назовем каноническим. Зафиксируем $R, V \in \mathbb{N}$ такие, что $2 \leq V \leq R$.

Теорема 1. При любых натуральных $R', V', R' \geq V'$, для любой независимой системы хищников $K = (W_1, \dots, W_m)(R, V)$, любого начального расположения $W_1, \dots, W_m$ и любого автомата-жертвы $U = U(R', V')$ существует начальное расположение U , при котором K не ловит U .

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

- (1) для любого автомата-жертвы $U = U(R, V - 1)$ существует коллектив хищников $K = (W_1, W_2, W_3)(R, V)$, который, стартуя из канонического расположения, ловит U при любом начальном взаимном расположении U и K ;
- (2) при любых натуральных R', V' таких, что $R' \geq V'$, для любого коллектива $(W_1, W_2)(R, V)$, любого автомата-жертвы $U = U(R', V')$ и любого начального расположения $(W_1, W_2)(R, V)$, существует такое начальное расположение U , что (W_1, W_2) не ловит U .

Теорема 3. Существует коллектив хищников $K = (W_1, \dots, W_{28})(R, V)$, который, стартуя из канонического расположения, ловит любую конечную независимую систему жертв $S = (U_1, \dots, U_n)(R, V - 1)$ при любом начальном взаимном расположении $U_1, \dots, U_n$ и K .

3. Вспомогательные утверждения

Пусть автомат $\mathcal{A}$ перемещается по плоскости и его выходные символы в такты $\tau_1, \tau_1 + 1, \dots, \tau_2$ равны $\bar{b}_{\tau_1}, \bar{b}_{\tau_1+1}, \dots, \bar{b}_{\tau_2}$ соответственно. Вектором перемещения (или просто перемещением) автомата $\mathcal{A}$ за промежуток времени $[\tau_1, \tau_2]$ называется вектор

$$\vec{s} = \bar{b}_{\tau_1} + \bar{b}_{\tau_1+1} + \dots + \bar{b}_{\tau_2}.$$

Пусть вектор $\vec{s}$ имеет координаты s_1 и s_2 ($\vec{s} = (s_1, s_2)$). Положим $|\vec{s}| = |s_1| + |s_2|$.

Лемма 1. Произвольный автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$ с n состояниями, перемещающийся по плоскости так, что другие автоматы не попадают в его зону обзора, имеет периодическую последовательность выходных символов и длина периода этой последовательности d , длина предпериода d_0 и перемещение $\vec{s}$ автомата $\mathcal{A}$ за период этой последовательности удовлетворяют неравенствам

$$d_0 + d \leq n, \quad |\vec{s}| \leq Vd.$$

Доказательство. Так как в зону обзора $\mathcal{A}$ не попадают другие автоматы, его входной символ постоянен. Поскольку $\mathcal{A}$ имеет n состояний, не позднее чем через n тактов он окажется в состоянии, в котором уже находился. Выходные символы и состояния $\mathcal{A}$ будут

повторяться с длиной предпериода d_0 и периода d , причем $d_0 + d \leq n$. Рассмотрим период $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_d$ выходной последовательности автомата $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}(R, V)$ имеет скорость V , для каждого $i = 1, \dots, d$ выполнено неравенство $|\bar{b}_i| \leq V$. Следовательно,

$$|\bar{s}| = |\bar{b}_1 + \dots + \bar{b}_d| \leq Vd.$$

Лемма доказана.

Если жертва U_i , $1 \leq i \leq n$, в некоторый момент оказалась в зоне обзора W_j , $1 \leq j \leq m$, будем говорить, что система хищников обнаружила ее. Будем также говорить, что W_j обнаружил U_i . Наименьший момент, в который это произошло, будем называть моментом обнаружения.

Определим схему функционирования системы автоматов как набор записей следующего вида. Первая запись содержит пары вида (наименование автомата, внутренний алфавит) для каждого автомата системы. Например,

$$1) (U_1, \{q_1, q_2\}), (U_2, \{q\}).$$

Остальные записи содержат наименование автомата (например, U_1), условия, в которых он может находиться, и его поведение в этих условиях (между условиями и поведением автомата ставится разделяющий символ $\rightarrow$). Условия — это некоторое подмножество декартова произведения внутреннего и входного алфавитов U_1 . Поведение — это элемент декартова произведения внутреннего и выходного алфавитов U_1 . Такая запись означает, что автомат U_1 в данном состоянии, получив данный входной символ, перейдет в соответствующее следующее состояние и выдаст соответствующий выходной символ. Если для какого-то автомата нет записи, соответствующей некоторым условиям, в которых он может находиться, подразумевается, что в этих условиях автомат не меняет состояние и стоит на месте. Например,

$$2) U_1, (q_1), \rightarrow (q_2, (1, 0));$$

$$3) U_1, (q_2), \rightarrow (q_1, (-1, 0)).$$

Схема функционирования из строк 1), 2), 3) задает систему автоматов (U_1, U_2) такую, что U_1 в четные такты делает шаг вправо, а в нечетные — шаг влево, а U_2 стоит на месте. Схема функционирования системы автоматов корректна, если для каждого автомата каждый элемент декартова произведения его внутреннего и входного алфавитов встречается не более чем в одной записи. Корректно записанная схема функционирования однозначно задает систему автоматов. Если не оговорено противное, начальным состоянием каждого автомата является первый символ его внутреннего алфавита.

Пусть даны системы автоматов

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m) &= (W_1, \dots, W_m)(R, V), \\ (\mathcal{A}_{m+1}, \dots, \mathcal{A}_{m+n}) &= (U_1, \dots, U_n)(R', V'), \end{aligned}$$

и заданы расположения этих автоматов на плоскости и их состояния в текущий момент $2\tau + 1$ и предыдущий момент 2τ , $\tau \in \mathbf{N}_0$. Введем следующие предикаты.

- 1) $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ в момент $2\tau + 1$ находится в h -окрестности $\mathcal{A}_i$, и равен 0 в противном случае.
- 2) $P'_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, q)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ в момент $2\tau + 1$ находится в h -окрестности $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ находится в состоянии q , и равен 0 в противном случае.

- 3) $P''_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ находился в h -окрестности $\mathcal{A}_i$ хотя бы в один из моментов $\{2\tau, 2\tau + 1\}$, и равен 0 в противном случае. Если $P''_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = 1$, то будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ видит $\mathcal{A}_j$ в своей h -окрестности (при $h = R$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ видит $\mathcal{A}_j$).

Если система хищников $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)$ представляет собой коллектив, то при любых $h = 0, 1, \dots, R, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, (m + n), q \in Q_j, Q_j$ — внутренний алфавит $\mathcal{A}_j$, входной символ автомата $\mathcal{A}_i$ однозначно определяет значение предикатов $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ и $P''(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$, а при $j \leq m$ — и значение предиката $P'_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, q)$, то есть каждый хищник $\mathcal{A}_i$ (из коллектива хищников) в каждый момент хода знает значение этих предикатов.

Будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_j$ расположен правее $\mathcal{A}_i$, если разность x -координат $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_i$ положительна. Будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_j$ расположен левее $\mathcal{A}_i$, если разность x -координат $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_i$ отрицательна.

Клетка (x_2, y_2) называется ближайшей к клетке (x_1, y_1) клеткой V -окрестности (x_0, y_0) , если для любой клетки (x_3, y_3) из $D_{(x_0, y_0), V}$ выполнено неравенство

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leq |x_3 - x_1| + |y_3 - y_1|,$$

причем (x_2, y_2) является самой верхней среди самых правых клеток, удовлетворяющий данному набору неравенств. Будем говорить, что автомат $\mathcal{A}(R, V)$, находящийся в клетке (x_0, y_0) , сделал ход к клетке (x_1, y_1) , если он за один такт переместился в клетку (x_2, y_2) — ближайшую к клетке (x_1, y_1) клетку V -окрестности (x_0, y_0) .

Лемма 2. Для любого коллектива $K = (W_1, \dots, W_m)(R, V)$ существует коллектив $K' = (W'_1, \dots, W'_m)(R, V)$ такой, что если для некоторого автомата-жертвы $U = U(R, V - 1)$ и некоторых начальных расположений $W_1, \dots, W_m$ и U коллектив K обнаруживает U , то K' ловит U при таких же начальных расположениях $W'_1, \dots, W'_m$ и U .

Доказательство. Пусть автомат $W_i = W_i(R, V)$, $1 \leq i \leq m$, имеет внутренний алфавит Q_i и функции переходов и выходов φ_i и ψ_i соответственно. Рассмотрим автомат $W'_i = W'_i(R, V)$, который, видя жертву, делает ход к клетке ее расположения, а не видя жертву, перемещается, как W_i . Схема функционирования коллектива $K' = (W'_1, \dots, W'_m)(R, V)$:

- 1) $(W'_1, Q_1), \dots, (W'_m, Q_m)$.
- 2) W'_i , где $1 \leq i \leq m, (q_i, P''_R(W_i, U) = 0) \rightarrow (\varphi_i(q_i, a_i), \psi_i(q_i, a_i))$, где a_i — произвольный входной символ W'_i , $q_i \in Q_i$.
- 3) W'_i , где $1 \leq i \leq m, (q_i, P''_R(W_i, U) = 1) \rightarrow (\varphi_i(q_i, a_i), (\text{ход к клетке } (x_1, y_1)))$. Здесь a_i — произвольный входной символ W'_i , $q_i \in Q_i$, (x_1, y_1) — расположение U в наибольший момент обнаружения хищником W_i жертвы, не превосходящий текущего момента хода хищников.

Покажем, что K' удовлетворяет требованию леммы. Пусть K обнаруживает U , наименьший момент обнаружения равен t и W_i — хищник, обнаруживающий U в момент t . Тогда K' и U до момента t будут взаимодействовать так же, как K и U , а в момент t автомат W'_i обнаружит U . В первый момент хода хищников после обнаружения U (t или $t + 1$), выполнится условие $P''_R(W'_i, U) = 1$. Так как скорость W'_i превосходит скорость U , из выполнения в момент хода хищников с номером τ условия $P''_R(W'_i, U) = 1$ следует выполнение этого условия в $(\tau + 1)$ -й момент хода хищников. При этом, если U не

пойман в такт τ , в $(\tau + 1)$ -й момент хода хищников U будет ближе к W'_i , чем в момент хода хищников с номером τ . Таким образом, не позднее чем через $R - V$ тактов после обнаружения, U будет пойман K' . Лемма доказана.

Если τ_j — наименьший такт, начиная с которого автомат $\mathcal{A}_j$ не меняет состояния и его выходная последовательность с такта τ_j состоит из нулевых векторов, будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_j$ остановился в такт τ_j . Если каждый $\mathcal{A}_j$, $j = 1, \dots, m$, останавливается в такт τ_j и $\tau = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \tau_j$, будем говорить, что коллектив $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)$ остановился в такт τ .

Если коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)$, $m \geq 4$, расположен на плоскости так, что $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ находятся в клетках $(x_0 + a, y_0)$ и $(x_0 + b, y_0)$, соответственно, где $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$, а все остальные автоматы расположены в клетке (x_0, y_0) , то будем говорить, что коллектив K находится в (a, b) -расстановке с центром (x_0, y_0) .

Фиксируем натуральное $V \geq 2$.

Лемма 3. Для любого $c \in \mathbb{N}$ существует коллектив

$$K_c = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_5)(V, V),$$

который при произвольных $a, b, (x_0, y_0)$, стартуя из (a, b) -расстановки с центром (x_0, y_0) , функционирует $2ac]b/V[$ тактов и останавливается в той же расстановке.

Доказательство. Идея доказательства такова. При $a = 0$ все автоматы стоят на месте. При $a > 0$ происходит следующее. Автоматы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_3$ неподвижны, и автомат $\mathcal{A}_5$ перемещается от $\mathcal{A}_1$ к $\mathcal{A}_3$ и обратно. На каждый такой проход туда-обратно тратится $2c]b/V[$ тактов. Автомат $\mathcal{A}_5$ совершает a проходов, после чего коллектив останавливается.

Опишем функционирование коллектива K_c , стартовавшего в нулевой такт из (a, b) -расстановки с центром (x_0, y_0) , $a > 0$, более подробно. Для каждого логического фрагмента описания K_c приведем соответствующие строки схемы его функционирования.

- 1) Приведем перечень автоматов и их внутренних алфавитов: $(\mathcal{A}_1, \{-1, 1\}^2)$, $(\mathcal{A}_2, \{q^2\})$, $(\mathcal{A}_3, \{q^3\})$, $(\mathcal{A}_4, \{q_0^4, q_1^4\} \cup (\{-1, 1\}^2 \times \{q_2^4\}))$, $(\mathcal{A}_5, (\{q_1^5, q_2^5\} \times \{1, \dots, c\}) \cup \{q_3^5\})$.

Все состояния автомата $\mathcal{A}_1$ являются начальными. Начальными состояниями автоматов $\mathcal{A}_4$ и $\mathcal{A}_5$ являются q_0^4 и $(q_1^5, 1)$, соответственно.

Автомат $\mathcal{A}_5$ будет перемещаться только в такты вида $c\tau$, $\tau \in \mathbb{N}$. В такие такты он будет находиться в состояниях вида (q_i^5, c) , $i = 1, 2$. Находясь в других состояниях, $\mathcal{A}_5$ стоит на месте.

- 2) $\mathcal{A}_5, ((q_i^5, j)) \rightarrow ((q_i^5, j + 1), (0, 0))$, где $i = 1, 2, 1 \leq j < c$.

Автомат $\mathcal{A}_5$ движется в сторону $\mathcal{A}_3$, за каждые c подряд идущих тактов перемещаясь на вектор $(V, 0)$, пока не окажется в той же клетке, что и $\mathcal{A}_3$, или правее.

- 3) $\mathcal{A}_5, ((q_1^5, c), ((P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 0) \vee (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 0)) \wedge (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 0))$,
 $\rightarrow ((q_1^5, 1), (V, 0))$.

- 4) $\mathcal{A}_5, ((q_1^5, c), ((P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 0) \vee (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 0)) \wedge (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 1))$,
 $\rightarrow ((q_2^5, 1), (V, 0))$.

Этот этап завершится в такт $c]b/V[$. Затем $\mathcal{A}_5$ движется обратно в сторону $\mathcal{A}_1$, за каждые c подряд идущих тактов перемещаясь на вектор $(-V, 0)$, пока не окажется в одной клетке с $\mathcal{A}_1$.

- 5) $\mathcal{A}_5, ((q_2^5, c), (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 0)), \rightarrow ((q_2^5, 1), (-V, 0))$.
- 6) $\mathcal{A}_5, ((q_2^5, c), (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P'_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_4, q_1^4) = 0) \wedge (\mathcal{A}_5 \text{ не видит слева от себя } \mathcal{A}_4, \text{ находящийся на 1 клетку левее } \mathcal{A}_2)), \rightarrow ((q_1^5, 1), (-V, 0))$.
- 7) $\mathcal{A}_5, ((q_2^5, c), (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 1) \wedge ((P'_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1, q_1^4) = 1) \vee (\mathcal{A}_5 \text{ видит слева от себя } \mathcal{A}_4, \text{ находящийся на 1 клетку левее } \mathcal{A}_2))), \rightarrow (q_3^5, (-V, 0))$.
- Этот этап завершится в такт $2c]b/V[$. Если автомат $\mathcal{A}_5$ окажется в этот такт в состоянии q_3^5 , он останавливается. В противном случае $\mathcal{A}_5$ снова пойдет к $\mathcal{A}_3$ (см п. 4)–7)).
- Во время каждого, кроме последнего, прохода $\mathcal{A}_5$ от $\mathcal{A}_3$ обратно к $\mathcal{A}_1$ совершается перемещение автомата $\mathcal{A}_4$ на 1 в сторону $\mathcal{A}_2$. Автомат $\mathcal{A}_4$, увидев $\mathcal{A}_5$ в состоянии $(q_2^5, 1)$ правее себя, сдвигается на $(1, 0)$, если расстояние от $\mathcal{A}_4$ до $\mathcal{A}_2$ больше 1.
- 8) $\mathcal{A}_4, (q_0^4, (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, (q_2^5, 1)) = 1) \wedge (\mathcal{A}_5 \text{ правее } \mathcal{A}_4) \wedge (P_1(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 0)), \rightarrow (q_0^4, (1, 0))$.
- Если же расстояние от $\mathcal{A}_4$ до $\mathcal{A}_2$ равно 1, $\mathcal{A}_4$ возвращается к $\mathcal{A}_1$ и останавливается.
- 9) $\mathcal{A}_4, (q_0^4, (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, (q_2^5, 1)) = 1) \wedge (\mathcal{A}_5 \text{ правее } \mathcal{A}_4) \wedge (P_1(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 0)), \rightarrow (q_1^4, (-V, 0))$.
- 10) $\mathcal{A}_4, (q_0^4, (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, (q_2^5, 1)) = 1) \wedge (\mathcal{A}_5 \text{ правее } \mathcal{A}_4) \wedge (P_1(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1, (q', q'')) = 1)), \rightarrow ((q', q'', q_2^4), (\text{ход в распоряжение } \mathcal{A}_1))$, где $q', q'' \in \{-1, 1\}$.
- 11) $\mathcal{A}_4, (q_1^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 0)), \rightarrow (q_1^4, (-V, 0))$.
- 12) $\mathcal{A}_4, (q_1^4, (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1, (q', q'')) = 1)), \rightarrow ((q', q'', q_2^4), (\text{ход в распоряжение } \mathcal{A}_1))$, где $q', q'' \in \{-1, 1\}$.

Легко видеть, что если построенный коллектив стартовал из (a, b) -расстановки, $0 \leq a \leq b$, то автомат $\mathcal{A}_5$ совершает a проходов от $\mathcal{A}_1$ к $\mathcal{A}_3$ и обратно, после чего K_c останавливается в (a, b) -расстановке. Так как на каждый проход тратится $2c]b/V[$ тактов, время функционирования коллектива равно $2ac]b/V[$.

Лемма доказана.

Коллектив $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)$ назовем правильным, если автомат $\mathcal{A}_1$ имеет внутренний алфавит $Q = \{-1, 1\}^2 \times Q'$. Определим функцию $\text{sgn}_0(x)$, принимающую значение 1 при $x \geq 0$ и значение -1 в противном случае.

Пусть правильный коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)$, $m \geq 8$, расположен на плоскости так, что $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$ находятся в клетках $(x_0 + |a_1|, y_0)$, $(x_0 + |a_2|, y_0)$ и $(x_0 + b, y_0)$ соответственно, $a_1, a_2 \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{N}$, $\max(|a_1|, |a_2|) \leq b$, и автомат $\mathcal{A}_1$ находится в состоянии $q = (\text{sgn}_0(a_1), \text{sgn}_0(a_2), q')$.

Если при этом все автоматы коллектива, кроме $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$, расположены в клетке (x_0, y_0) , будем говорить, что коллектив K находится в (a_1, a_2, b) -расстановке с центром (x_0, y_0) . Если $\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7, \mathcal{A}_8$ находятся в клетках $(x_0 + h_1, y_0)$, $(x_0, y_0 + h_2)$, $(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ и $(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ соответственно, $h_1, h_2 \in \mathbf{Z}$, и все автоматы коллектива, кроме $\mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_8$ расположены в клетке (x_0, y_0) , будем говорить, что коллектив K находится в (a_1, a_2, b, h_1, h_2) -расстановке с центром (x_0, y_0) .

Состояние автомата назовем финальным, если, попав в это состояние, автомат останавливается (при любых входных символах). Пусть дан автомат $\mathcal{A}_1$ с начальными состояниями $q_0^1, \dots, q_0^k$ и автомат $\mathcal{A}_2$. Композицией автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называется автомат с

начальными состояниями $q_0^1, \dots, q_0^k$, диаграмма Мура которого получена из объединения диаграмм Мура автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ отождествлением (склеиванием) каждого финального состояния автомата $\mathcal{A}_1$ с некоторым состоянием автомата $\mathcal{A}_2$. Склеивание состояний происходит по следующим правилам:

- а) если автомат $\mathcal{A}_1$ имеет 4 финальных состояния $(1, 1, q^1)$, $(-1, 1, q^1)$, $(1, -1, q^1)$ и $(-1, -1, q^1)$, а автомат $\mathcal{A}_2$ имеет 4 начальных состояния $(1, 1, q^2)$, $(-1, 1, q^2)$, $(1, -1, q^2)$ и $(-1, -1, q^2)$, где q^1 и q^2 произвольные, то каждое состояние (q', q'', q^1) склеивается с состоянием (q', q'', q^2) , $q', q'' \in \{-1, 1\}$;
- б) если автомат $\mathcal{A}_2$ имеет единственное начальное состояние, то все финальные состояния $\mathcal{A}_1$ склеиваются с начальным состоянием $\mathcal{A}_2$.
- в) во всех случаях, кроме а), б), композиция автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ определена только в том случае, если специально указано, как производится склеивание финальных состояний $\mathcal{A}_1$ с состояниями $\mathcal{A}_2$.

Запись $\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}$ означает, что строится автомат $\mathcal{A}$, по определению равный композиции автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Неподвижный автомат с 1 состоянием будем обозначать $\mathcal{H}_0$. Автомат с 1 состоянием, который за каждый такт смещается на 1 вправо, будем обозначать $\mathcal{H}_1$. Построим два семейства автоматов, зависящих от параметров $s_x, s_y \in \mathbb{Z}$ и $p \in \mathbb{N}$, $|s_x| + |s_y| \leq V$, $p \geq 2$, и от некоторого автомата $\mathcal{A}$.

Пусть автомат $\mathcal{A}$ неподвижен. Тогда $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y))(V, V)$ — автомат, который, стартуя из начального состояния (q, q_1) , $q \in \{-1, 1\}$, за каждый такт смещается на вектор $q(s_x, s_y)$, пока не увидит $\mathcal{A}$. Увидев $\mathcal{A}$, автомат $\mathcal{H}_2$ ходит в распоряжение $\mathcal{A}$ и останавливается.

- 1) $(\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y)), \{-1, 1\} \times \{q_1, q_2\})$.
- 2) $\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y)), ((q, q_1), P_V(\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y)), \mathcal{A}) = 1) \rightarrow ((q, q_2)$,
ход в распоряжение $\mathcal{A}$), где $q \in \{-1, 1\}$.
- 3) $\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y)), ((q, q_1), P_V(\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y)), \mathcal{A}) = 0) \rightarrow ((q, q_1), q(s_x, s_y))$,
где $q \in \{-1, 1\}$.

$\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p)(V, V)$ — автомат, который, стартуя из начального состояния (q, q_1) , $q \in \{-1, 1\}$, в такты вида $pk + h$, $k, h \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq h \leq p - 2$, смещается на вектор $q(s_x, s_y)$, а в такты вида $pk + (p - 1)$ стоит на месте. Такое движение продолжается, пока $\mathcal{H}_3$ в состоянии (q, q_p) не окажется в одной клетке с автоматом $\mathcal{A}$, который уже не предполагается неподвижным. Оказавшись в состоянии (q, q_p) в одной клетке с $\mathcal{A}$, автомат $\mathcal{H}_3$ останавливается.

- 1) $(\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p), \{-1, 1\} \times \{q_1, \dots, q_{p+1}\})$.
- 2) $\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p), ((q, q_i)) \rightarrow ((q, q_{i+1}), q(s_x, s_y))$, где $q \in \{-1, 1\}$, $1 \leq i \leq p - 1$.
- 3) $\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p), ((q, q_p), P_0(\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p), \mathcal{A}) = 0) \rightarrow ((q, q_1), (0, 0))$,
где $q \in \{-1, 1\}$.
- 4) $\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p), ((q, q_p), P_0(\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p), \mathcal{A}) = 1) \rightarrow ((q, q_{p+1}), (0, 0))$,
где $q \in \{-1, 1\}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — автомат типа $\mathcal{H}_i$, где $i = 2, 3$. Обозначим внутренний алфавит $\mathcal{A}$ через $Q = \{-1, 1\} \times Q'$. Через $\mathcal{A}^x$ и $\mathcal{A}^y$ будем обозначать автоматы с внутренними алфавитами, равными $\{-1, 1\}^2 \times Q'$, функционирующие так же, как $\mathcal{A}$.

Выражение функционирует так же означает следующее. Если начальными состояниями автомата $\mathcal{A}$ являются состояния $(-1, q_1)$ и $(1, q_1)$, то начальными состояниями каждого из автоматов $\mathcal{A}^x$ и $\mathcal{A}^y$ являются состояния $(-1, -1, q_1)$, $(-1, 1, q_1)$, $(1, -1, q_1)$ и $(1, 1, q_1)$. Пусть автомат $\mathcal{A}$, находясь в произвольном состоянии вида (a_1, q) , где $a_1 \in \{-1, 1\}$, $q \in Q'$, при данном входном символе перемещается на вектор $a_1(s_1, s_2)$, где вектор (s_1, s_2) зависит лишь от q и входного символа $\mathcal{A}$, и переходит в состояние (a_1, q') , где $q' \in Q'$. Тогда автоматы $\mathcal{A}^x$ и $\mathcal{A}^y$, находясь в состоянии (a_1, a_2, q) , где $a_1, a_2 \in \{-1, 1\}$, при данном входном символе перемещаются на векторы $a_1(s_1, s_2)$ и $a_2(s_1, s_2)$ соответственно и оба переходят в состояние (a_1, a_2, q') .

Лемма 4. Для любого $c \in \mathbb{N}$ существует правильный коллектив

$$K_c = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_9)(V, V),$$

который при произвольных $a_1, a_2, b, (x_0, y_0)$, стартуя из (a_1, a_2, b) -расстановки с центром (x_0, y_0) , остановится в $(a_1, a_2, b, (2a_1c)b/V[V], (2a_2c)b/V[V])$ -расстановке с центром (x_0, y_0) через

$$T = 2(|a_1| + |a_2|)(c + 1)b/V[$$

тактов.

Доказательство. Обозначим через

$$K_1 = (\mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_5)(V, V)$$

коллектив $K_c(V, V)$ из леммы 3 при $c = 1$. Модифицируем K_1 следующим образом.

1. Добавим в коллектив автоматы $\mathcal{A}'_6$ и $\mathcal{A}'_7$. Автомат $\mathcal{A}'_6$ неподвижен (является аналогом $\mathcal{A}'_2$). Автомат $\mathcal{A}'_7$ является аналогом $\mathcal{A}'_4$. За каждый обратный проход $\mathcal{A}'_5$ от $\mathcal{A}'_3$ к $\mathcal{A}'_1$ автомат $\mathcal{A}'_7$ смещается на 1 в сторону $\mathcal{A}'_6$, если расстояние между $\mathcal{A}'_7$ и $\mathcal{A}'_6$ больше 1. После того, как $\mathcal{A}'_7$ оказался на расстоянии 1 от $\mathcal{A}'_6$, автомат $\mathcal{A}'_7$ возвращается к $\mathcal{A}'_1$.
2. Автомат $\mathcal{A}'_5$ будет перемещаться между $\mathcal{A}'_1$ и $\mathcal{A}'_3$ до тех пор, пока оба автомата $\mathcal{A}'_4$ и $\mathcal{A}'_7$ не вернутся к автомату $\mathcal{A}'_1$ от $\mathcal{A}'_2$ и $\mathcal{A}'_6$ соответственно.
3. Увеличим внутренний алфавит каждого автомата $\mathcal{A}'_i$, $i = 4, 7$, присоединив к нему множество $\{-1, 1\}^2 \times \{q_3^i, q_4^i\}$.
4. Добавим в коллектив автоматы $\mathcal{A}'_8$ и $\mathcal{A}'_9$. Определим поведение этих автоматов и доопределим поведение автоматов $\mathcal{A}'_4$ и $\mathcal{A}'_7$ в состояниях вида (q', q'', q) , где $q', q'' \in \{-1, 1\}$.

Внутренние алфавиты автоматов $\mathcal{A}'_8$ и $\mathcal{A}'_9$:

- 1) $(\mathcal{A}'_8, \{q_0^8\} \cup (\{-1, 1\}^2 \times \{q_1^8, \dots, q_{c+2}^8\})), (\mathcal{A}'_9, \{q_0^9\} \cup (\{-1, 1\}^2 \times \{q_1^9, \dots, q_{c+2}^9\}))$.

Обозначим состояние $\mathcal{A}'_1$ через (q', q'') . Автомат $\mathcal{A}'_8$, начиная с нулевого такта, движется в направлении $(q', 0)$. В такты вида $(c + 1)k + h$, $k, h \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq h \leq c$, он перемещается со скоростью V , а в такты вида $(c + 1)k + c$ стоит на месте. Автомат $\mathcal{A}'_8$ продолжает такое движение, пока он в состоянии (q', q'', q_2^8) не увидит $\mathcal{A}'_4$ в состоянии (q', q'', q_3^4) , а затем останавливается.

- 2) $\mathcal{A}'_8, (q_0^8, (P_0(\mathcal{A}'_8, \mathcal{A}'_2) = 0) \wedge (P'_0(\mathcal{A}'_8, \mathcal{A}'_1, (q', q'')) = 1)), \rightarrow ((q', q'', q_2^8),$
- 3) $(q'V, 0)),$ где $q', q'' \in \{-1, 1\}.$
- 4) $\mathcal{A}'_8, ((q', q'', q_i^8)), \rightarrow ((q', q'', q_{i+1}^8), (q' \cdot V, 0)),$ где $q', q'' \in \{-1, 1\}, 1 \leq i \leq c.$
- 5) $\mathcal{A}'_8, ((q', q'', q_{c+1}^8), P'_V(\mathcal{A}'_8, \mathcal{A}'_4, (q', q'', q_2^4)) = 0), \rightarrow ((q', q'', q_1^8), (0, 0)),$
где $q', q'' \in \{-1, 1\}.$
- 6) $\mathcal{A}'_8, ((q', q'', q_{c+1}^8), P'_V(\mathcal{A}'_8, \mathcal{A}'_4, (q', q'', q_2^4)) = 1), \rightarrow ((q', q'', q_{c+2}^8), (0, 0)),$
где $q', q'' \in \{-1, 1\}.$

Аналогично, автомат $\mathcal{A}'_9$, начиная с нулевого такта, движется в направлении $(0, q'')$. В такты вида $(c+1)k+h, k, h \in \mathbb{N}_0, 0 \leq h \leq c$, он перемещается со скоростью V , а в такты вида $(c+1)k+c$ стоит на месте. Автомат $\mathcal{A}'_9$ продолжает такое движение, пока он в состоянии (q', q'', q_2^9) не увидит $\mathcal{A}'_7$ в состоянии (q', q'', q_3^7) , а затем останавливается.

Автомат $\mathcal{A}'_4$, находясь в состоянии (q', q'', q_2^4) и увидев в своей клетке $\mathcal{A}'_5$, начинает двигаться в направлении $(q', 0)$ со скоростью V , догоняя $\mathcal{A}'_8$, а догнав его, останавливается.

- 7) $\mathcal{A}'_4, ((q', q'', q_2^4), (P'_0(\mathcal{A}'_4, \mathcal{A}'_5, q_3^5) = 1)), \rightarrow ((q', q'', q_3^4), (q'V, 0)).$
- 8) $\mathcal{A}'_4, ((q', q'', q_3^4), (P'_V(\mathcal{A}'_4, \mathcal{A}'_8, (q', q'', q_{c+1}^8) = 0)), \rightarrow ((q', q'', q_3^4), (q'V, 0)).$
- 9) $\mathcal{A}'_4, ((q', q'', q_3^4), (P'_V(\mathcal{A}'_4, \mathcal{A}'_8, (q', q'', q_{c+1}^8) = 1)), \rightarrow ((q', q'', q_4^4), (q'V, 0)).$

Аналогично, автомат $\mathcal{A}'_7$, находясь в состоянии (q', q'', q_2^7) и увидев в своей клетке $\mathcal{A}'_5$, начинает двигаться в направлении $(0, q'')$ со скоростью V , догоняя $\mathcal{A}'_9$, а догнав его, останавливается.

Перенумеруем построенный коллектив и обозначим его

$$K_2 = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_9)(V, V) = (\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \mathcal{A}'_6, \mathcal{A}'_3, \mathcal{A}'_8, \mathcal{A}'_9, \mathcal{A}'_4, \mathcal{A}'_7, \mathcal{A}'_5).$$

Пусть K_2 находится в (a_1, a_2, b) -расстановке с центром (x_0, y_0) . Автоматы $\mathcal{A}'_8$ и $\mathcal{A}'_9$, начиная с нулевого такта, движутся в направлениях $(\text{sgn}_0(a_1), 0)$ и $(0, \text{sgn}_0(a_2))$ соответственно. Подколлективы $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_9)$ и $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_8, \mathcal{B}_9)$ в нулевой такт находятся в $(|a_1|, b)$ -расстановке с центром (x_0, y_0) и в $(|a_2|, b)$ -расстановке с центром (x_0, y_0) соответственно. Эти подколлективы начинают функционировать, как коллектив K_1 из леммы 3. В итоге автомат $\mathcal{B}_7$ начинает догонять $\mathcal{B}_5$ в такт $2|a_1|]b/V[$ и догонит его в такт $2|a_1|(c+1)]b/V[$, а автомат $\mathcal{B}_8$ начинает догонять $\mathcal{B}_6$ в такт $2|a_2|]b/V[$ и догонит его в такт $2|a_2|(c+1)]b/V[$.

Таким образом, если K_2 стартует из (a_1, a_2, b) -расстановки с центром (x_0, y_0) , то в такт $2|a_1|(c+1)]b/V[$ автоматы $\mathcal{B}_5$ и $\mathcal{B}_7$ остановятся в клетке $(x_0 + 2a_1cV]b/V[y_0)$, а в такт $2|a_2|(c+1)]b/V[$ автоматы $\mathcal{B}_6$ и $\mathcal{B}_8$ остановятся в клетке $(x_0, y_0 + 2a_2cV]b/V[$. Введем автоматы $\mathcal{C}_7, \mathcal{C}_8$ такие, что $\mathcal{C}_7 = \mathcal{H}_3(\mathcal{C}_8, (0, V), c+1)$, $\mathcal{C}_8 = \mathcal{H}_3(\mathcal{C}_7, (V, 0), c+1)$, $\mathcal{B}_7 \circ \mathcal{C}_7^y \rightarrow \mathcal{A}_7$, $\mathcal{B}_8 \circ \mathcal{C}_8^x \rightarrow \mathcal{A}_8$.

Обозначим $K_c = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_9)$ коллектив $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_6, \mathcal{A}_7, \mathcal{A}_8, \mathcal{B}_9)$. Пусть в нулевой момент K_c расположен в (a_1, a_2, b) -расстановке с центром (x_0, y_0) . Тогда $\mathcal{A}_7$ и $\mathcal{A}_8$ в такт $2(|a_1| + |a_2|)(c+1)]b/V[$ окажутся в $(x_0 + 2a_1cV]b/V[, y_0 + 2a_2cV]b/V[$, и коллектив K_c остановится в $(a_1, a_2, b, (2a_1cV]b/V[, (2a_2cV]b/V[)$ -расстановке. Лемма доказана.

Пусть коллектив

$$K = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m), \quad m \geq 3,$$

расположен на плоскости так, что $\mathcal{A}_3$ находится в клетке $(x_0 + a, y_0)$, $a \in \mathbf{N}$, а все автоматы, кроме $\mathcal{A}_3$, расположены в клетке (x_0, y_0) . Будем говорить, что коллектив K находится в a -расстановке с центром (x_0, y_0) .

Лемма 5. *Существует коллектив $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)(V, V)$, который, стартуя в такт τ_0 из τ_0 -расстановки с центром (x_0, y_0) , в такт $\tilde{\tau}_0$ окажется в $(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0)$ -расстановке с центром (x_0, y_0) , где $\hat{\tau}_0 = \tau_0 +]\tau_0/(V-1)[$, $\tilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2]\tau_0/(V-1)[$.*

Доказательство. Опишем функционирование $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$, стартовавшего в такт τ_0 , $\tau_0 \in \mathbf{N}$, из τ_0 -расстановки с центром (x_0, y_0) . Приведем список автоматов и их внутренних алфавитов.

- 1) $(\mathcal{A}_1, \{-1, 1\}^2)$, $(\mathcal{A}_2, \{q_1^2, q_2^2\})$, $(\mathcal{A}_3, \{q^3\})$, $(\mathcal{A}_4, \{q_1^4, q_2^4, q_3^4\})$.

В этом коллективе $\mathcal{A}_1$ — неподвижный автомат, все состояния которого начальные, $\mathcal{A}_3 = \mathcal{H}_1$, этот автомат в произвольный такт τ находится в клетке $(x_0 + \tau, y_0)$. Автоматы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_4$, стартовав, движутся в направлении $(1, 0)$ со скоростью V , догоняя $\mathcal{A}_3$.

- 2) $\mathcal{A}_2, (q_1^2, (P_{V-1}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 0)) \rightarrow (q_1^2, (V, 0))$.

- 3) $\mathcal{A}_4, (q_1^4, (P_{V-1}(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 0)) \rightarrow (q_1^4, (V, 0))$.

- 4) $\mathcal{A}_2, (q_1^2, (P_{V-1}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 1)) \rightarrow (q_2^2, \text{ход в клетку, находящуюся на 1 правее расположения } \mathcal{A}_3)$.

- 5) $\mathcal{A}_4, (q_1^4, (P_{V-1}(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 1)) \rightarrow (q_2^4, \text{ход в клетку, находящуюся на 1 правее расположения } \mathcal{A}_3)$.

В такт $\hat{\tau}_0 = \tau_0 +]\tau_0/(V-1)[$ автоматы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_4$ окажутся в одной клетке с $\mathcal{A}_3$. После этого $\mathcal{A}_2$ останавливается, а $\mathcal{A}_4$ возвращается обратно к $\mathcal{A}_1$.

- 6) $\mathcal{A}_4, (q_2^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 0)) \rightarrow (q_2^4, (-V, 0))$.

- 7) $\mathcal{A}_4, (q_2^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 1)) \rightarrow (q_3^4, \text{ход в расположение } \mathcal{A}_1)$.

В такт $\tilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2]\tau_0/(V-1)[$ коллектив остановится в $(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0)$ -расстановке. Лемма доказана.

Лемма 6. *Существует коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_4)(V, V)$, который, стартуя из канонического расположения, обходит $\mathbf{Z}^2$, причем $\mathcal{A}_1$ проходит через каждую клетку счетное число раз.*

Доказательство. Расстановку коллектива $K = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_4)$ назовем треугольной a -расстановкой с центром (x_0, y_0) , $a \in \mathbf{N}$, если координаты автоматов $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_4$ равны (x_0, y_0) , (x_0, y_0) , $(x_0, y_0 + 1)$, $(x_0 + a, y_0)$ соответственно, где $(x_0, y_0) \in \mathbf{Z}^2$. Треугольник $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}, y \geq y_0, x \leq x_0 + a, (x - y) \geq x_0 - y_0 - 1\}$ называется соответствующим данной треугольной a -расстановке. Треугольная $(a + 3)$ -расстановка с центром $(x_0 - 2, y_0 - 1)$ называется следующей за треугольной a -расстановкой с центром (x_0, y_0) .

Последовательность треугольных расстановок коллектива K такую, что k -я расстановка для любого $k \in \mathbf{N}$ является треугольной $(3k - 2)$ -расстановкой, и $(k + 1)$ -я расстановка

является следующей за k -й расстановкой, назовем базовой. Обозначим Δ_k треугольник, соответствующий k -й расстановке.

Легко видеть, что для базовой последовательности расстановок выполнены свойства: $\Delta_k \subset \Delta_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$;

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k = \mathbb{Z}^2;$$

Δ_k — прямоугольный треугольник для всех $k \in \mathbb{N}$.

Построим коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_4)$, который, стартуя из канонического расположения, функционирует следующим образом.

- 1) Из канонического расположения K переходит в треугольную 1-расстановку.
- 2) Если K стартует из треугольной a -расстановки, $a \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{A}_1$ обходит соответствующий этой расстановке треугольник и K переходит в следующую за ней треугольную $(a+3)$ -расстановку.

Такой коллектив обходит последовательность треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \dots$. Каждый такой треугольник содержится во всех последующих, и объединение всех этих треугольников есть $\mathbb{Z}^2$. Следовательно, $\mathcal{A}_1$ проходит через каждую клетку $\mathbb{Z}^2$ счетное число раз. Значит, коллектив, удовлетворяющий 1) и 2), удовлетворяет требованию леммы.

Приведем перечень автоматов коллектива K и их алфавитов:

- 1) $(\mathcal{A}_1, \{q_0^1, q_1^1, \dots, q_4^1\}), (\mathcal{A}_2, \{q_0^2, q_1^2\}), (\mathcal{A}_3, \{q_0^3, q_1^3\}), (\mathcal{A}_4, \{q_0^4, q_1^4\})$.

Приведем описания перехода из канонического расположения в треугольную 1-расстановку:

- 2) $\mathcal{A}_1, (q_0^1) \rightarrow (q_1^1, (0, 0))$.
- 3) $\mathcal{A}_2, (q_0^2) \rightarrow (q_1^2, (0, 0))$.
- 4) $\mathcal{A}_3, (q_0^3) \rightarrow (q_1^3, (0, 1))$.
- 5) $\mathcal{A}_4, (q_0^4) \rightarrow (q_1^4, (1, 0))$.

Пусть в такт τ_0 коллектив K находится в треугольной $(3k-2)$ -расстановке с центром (x_0, y_0) .

$\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0, 1)$ со скоростью 1 до встречи с $\mathcal{A}_3$,

- 6) $\mathcal{A}_1, (q_1^1, P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 0) \rightarrow (q_1^1, (0, 1))$.

Когда $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_3$ оказались в одной клетке, причем в этой клетке не находится $\mathcal{A}_2$, автомат $\mathcal{A}_3$ сдвигается на вектор $(1, 1)$, а $\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0, -1)$ со скоростью 1 до встречи с $\mathcal{A}_2$,

- 7) $\mathcal{A}_3, (q_1^3, (P'_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_1^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2) = 0)) \rightarrow (q_1^3, (1, 1))$.
- 8) $\mathcal{A}_1, (q_1^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0)) \rightarrow (q_2^1, (0, -1))$.
- 9) $\mathcal{A}_1, (q_2^1, P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0) \rightarrow (q_2^1, (0, -1))$.

После того, как $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ оказались в одной клетке, причем в соседней клетке не находится $\mathcal{A}_4$, автоматы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сдвигаются на вектор $(1, 0)$,

10) $\mathcal{A}_1, (q_2^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4) = 0)), \rightarrow (q_1^1, (1, 0))$.

11) $\mathcal{A}_2, (q_1^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_2^1) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 0)), \rightarrow (q_1^2, (1, 0))$.

После этого K повторяет действия п. 6)–9) ($\mathcal{A}_1$ снова идет к $\mathcal{A}_3$, и т. д.).

После каждого прохода $\mathcal{A}_1$ вверх-вниз, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ смещаются на вектор $(1, 0)$, а $\mathcal{A}_3$ — на вектор $(1, 1)$.

После одного или нескольких повторений действий п. 6)–9) и п. 10)–11), $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ окажутся в клетке, соседней с расположением $\mathcal{A}_4$. Пусть это произошло в такт τ_1 . С такта τ_0 до такта τ_1 включительно, $\mathcal{A}_4$ находится в вершине при прямом угле Δ_k . Все это время $\mathcal{A}_2$, перемещается по горизонтальному катету треугольника Δ_k , пройдя его от клетки (x_0, y_0) до клетки, ближайшей слева к $\mathcal{A}_4$. Автомат $\mathcal{A}_3$ на этом промежутке времени перемещается по гипотенузе треугольника Δ_k , все время находясь либо на одной вертикали с $\mathcal{A}_2$, либо на соседней с ним вертикали. Перемещаясь между $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, автомат $\mathcal{A}_1$ за промежутков времени $[\tau_0, \tau_1]$ обходит весь треугольник Δ_k , кроме клетки $(x_0 - 1, y_0)$ и вертикального катета.

После этого автомат $\mathcal{A}_4$ сдвигается на вектор $(1, -1)$, перемещаясь в вершину при прямом угле Δ_{k+1} , а автоматы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сдвигаются на вектор $(0, 1)$, перемещаясь в вершину при прямом угле Δ_k , и $\mathcal{A}_1$ переходит в состояние q_3^1 ,

12) $\mathcal{A}_4, (q_1^4, (P_1(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 1)), \rightarrow (q_1^4, (-1, -1))$.

13) $\mathcal{A}_1, (q_2^1, (P_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4) = 1)), \rightarrow (q_3^1, (0, 1))$.

14) $\mathcal{A}_2, (q_1^2, (P_1(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1)), \rightarrow (q_1^2, (0, 1))$.

Затем начинается обратный проход (повторный обход треугольника) Δ_k . Автомат $\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0, 1)$ со скоростью 1 до встречи с $\mathcal{A}_3$,

15) $\mathcal{A}_1, (q_3^1, P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 0), \rightarrow (q_3^1, (0, 1))$.

16) $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_3$ оказались в одной клетке, и в этой клетке не находится $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ сдвигается на вектор $(-1, -1)$, а $\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0, -1)$ со скоростью 1 до встречи с $\mathcal{A}_2$,

17) $\mathcal{A}_3, (q_1^3, (P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2) = 0)), \rightarrow (q_1^3, (-1, -1))$.

18) $\mathcal{A}_1, (q_3^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0)), \rightarrow (q_4^1, (0, -1))$.

19) $\mathcal{A}_1, (q_4^1, P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0), \rightarrow (q_4^1, (0, -1))$.

После того, как $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ оказались в одной клетке, причем в этой клетке не находится $\mathcal{A}_3$, автоматы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сдвигаются на вектор $(-1, 0)$,

20) $\mathcal{A}_1, (q_4^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 0)), \rightarrow (q_3^1, (-1, 0))$.

21) $\mathcal{A}_2, (q_1^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_4^1) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 0)), \rightarrow (q_1^2, (-1, 0))$.

После этого K повторяет действия п. 15)–18) ($\mathcal{A}_1$ снова идет к $\mathcal{A}_3$, и т. д.).

После каждого прохода $\mathcal{A}_1$ вверх-вниз, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ смещаются на вектор $(-1, 0)$, а $\mathcal{A}_3$ — на вектор $(-1, -1)$.

После одного или нескольких повторений действий п. 15)–18) и п. 19)–20) $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ встретятся в одной клетке. Пусть это произошло в такт τ_2 . С такта τ_1 до такта τ_2

включительно, автомат $\mathcal{A}_2$, перемещается по горизонтальному катету треугольника Δ_k , пройдя его от вершины при прямом угле до клетки $(x_0 - 1, y_0)$. Автомат $\mathcal{A}_3$ на этом промежутке времени перемещается по гипотенузе треугольника Δ_k , все время находясь либо на одной вертикали с $\mathcal{A}_2$, либо на соседней с ним вертикали. Перемещаясь между $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, автомат $\mathcal{A}_1$ за промежуток времени $[\tau_1, \tau_2]$ обходит весь треугольник Δ_k .

После этого $\mathcal{A}_3$ сдвигается на вектор $(-1, 0)$, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сдвигаются на вектор $(-1, -1)$ и $\mathcal{A}_1$ переходит в состояние q_1^1 .

$$22) \mathcal{A}_3, (q_1^3, (P'_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2) = 1)), \rightarrow (q_1^3, (-1, 0)),$$

$$23) \mathcal{A}_1, (q_3^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 1)), \rightarrow (q_3^1, (-1, -1)).$$

$$24) \mathcal{A}_2, (q_1^2, (P'_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 1)), \rightarrow (q_1^2, (-1, -1)).$$

В результате этого автомат $\mathcal{A}_1$ коллектива K останавливается в треугольной $(3k + 1)$ -расстановке с центром (x_0, y_0) .

Таким образом, построенный коллектив $K = K(2, 2) = K(V, V)$, стартуя из канонического расположения, переходит в треугольную 1-расстановку. Коллектив K , стартуя в такт τ_0 из треугольной $(3k - 2)$ -расстановки, $k \in \mathbb{N}$, с центром (x_0, y_0) , которой соответствует треугольник Δ_k , обходит Δ_k , после чего автомат $\mathcal{A}_1$ переходит в состояние q_1^1 и K останавливается в треугольной $(3k + 1)$ -расстановке с центром (x_0, y_0) .

Коллектив K удовлетворяет требованиям п. 1), 2), что и доказывает лемму.

Пусть автомат U перемещается по плоскости с периодической выходной последовательностью. Обозначим длину периода этой последовательности d , длину предпериода — d_0 , а клетку, в которой U находится в такт $d_0 - (x, y)$. Рассмотрим минимальное натуральное n такое, что $nd \geq d_0$. Обозначим (s_1, s_2) перемещение U за период его выходной последовательности, перемещение U за первые $nd - d_0$ тактов n подряд идущих периодов его выходной последовательности обозначим (s'_1, s'_2) , а перемещение U за последние d_0 тактов n подряд идущих периодов его выходной последовательности — (s''_1, s''_2) . Назовем клетку $(x_0, y_0) = (x, y) - (s''_1, s''_2)$ условной клеткой старта автомата U . В обозначениях этого параграфа имеет место следующее утверждение.

Лемма 7. Для любого натурального $k \geq d_0/d$ автомат U в такт kd находится в клетке $(x_0, y_0) + k(s_1, s_2)$.

Доказательство. Наименьшее значение k , удовлетворяющее условию леммы, то есть такое, что $k \geq d_0/d$, есть n . В такт nd автомат U находится в клетке

$$(x, y) + (s'_1, s'_2) = (x_0, y_0) + (s''_1, s''_2) + (s'_1, s'_2) = (x_0, y_0) + n(s_1, s_2).$$

Таким образом, для $k = n$ утверждение леммы верно. После такта nd каждые d тактов U перемещается на вектор (s_1, s_2) , следовательно, утверждение леммы верно для всех $k \geq d_0/d$. Лемма доказана.

Назовем h -четверкой, $h \in \mathbb{N}$, четверку $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$, где $\tau_0, d \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$,

$$d \leq \tau_0, \quad |s_1| + |s_2| \leq \max\{hd, \tau_0\}.$$

Так определенная h -четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ характеризует автомат-жертву $U = U(R, h)$, перемещающийся по $\mathbf{Z}^2$, если U имеет периодическую выходную последовательность с длиной периода, не превосходящей d , длиной предпериода, не превосходящей τ_0 , вектор перемещения за период выходной последовательности (s_1, s_2) и условную клетку старта (x_0, y_0) .

Правильный коллектив $(W_1, \dots, W_{10})(R, V)$ расположен в $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ -позиции, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ — $(V - 1)$ -четверка, W_1 находится в состоянии $q = (\text{sgn}_0(s_1), \text{sgn}_0(s_2), q')$, и автоматы W_2, W_3, W_4 и W_{10} находятся в клетках $(x_0 + |s_1|, y_0), (x_0 + |s_2|, y_0), (x_0 + \tau_0, y_0), (x_0 + (V - 1)d, y_0)$ соответственно, а остальные автоматы — в клетке (x_0, y_0) .

Рассмотрим два коллектива автоматов

$$\begin{aligned} K(R, V) &= (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m), \\ K'(R, V) &= (\mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_{m'}), \quad m \geq m'. \end{aligned}$$

Пусть даны натуральные числа $i_1, \dots, i_{m'}, 1 \leq i_1, \dots, i_{m'} \leq m$, которые будем называть стыковочными. Введем понятие i_h -композиции коллективов K и K' : i_h -композицией коллективов K и K' , где $h \in \mathbf{N}, 1 \leq h \leq m'$, называется коллектив $K'' = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)(R, V)$, автоматы которого определяются так: $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}_i$ при $i \neq i_p, p = 1, \dots, m'$; $\mathcal{B}_{i_h}$ есть композиция $\mathcal{A}_{i_h}$ и $\mathcal{A}'_h$; диаграмма Мура $\mathcal{B}_{i_p}, p = 1, \dots, m', p \neq h$, получается из объединения диаграмм Мура $\mathcal{A}_{i_p}$ и $\mathcal{A}'_p$. Начальное состояние есть начальное состояние $\mathcal{A}_{i_p}$. Добавляются стрелки, описывающие следующие переходы: для каждого входного символа $\mathcal{A}'_p$, соответствующего тому, что некоторый $\mathcal{A}'_j, 1 \leq j \leq m'$, находится в зоне обзора $\mathcal{A}'_p$, автомат $\mathcal{B}_{i_p}$ из каждого состояния q_{i_p} , которое является финальным для $\mathcal{A}_{i_p}$, переходит в то же состояние и выдает тот же выходной символ, что и $\mathcal{A}'_p$ в некотором состоянии q'_p с этим же входным символом.

Другими словами, увидев автомат $\mathcal{B}_j$ в состоянии, являющимся состоянием $\mathcal{A}'_j$, автомат $\mathcal{B}_{i_p}$ выходит из финального состояния $\mathcal{A}_{i_p}$ и начинает функционировать как $\mathcal{A}'_p$ в состоянии q'_p . Состояние q'_p автомата $\mathcal{A}'_p$ называется сопоставленным состоянием q_{i_p} автомата $\mathcal{A}_{i_p}$. Состояния сопоставляются друг другу следующим образом:

- если автомат $\mathcal{A}_{i_p}, p \neq h$, имеет 4 финальных состояния, $(1, 1, q^{i_p}), (-1, 1, q^{i_p}), (1, -1, q^{i_p})$ и $(-1, -1, q^{i_p})$, а автомат $\mathcal{A}'_p$ имеет 4 начальных состояния, $(1, 1, \hat{q}^p), (-1, 1, \hat{q}^p), (1, -1, \hat{q}^p)$ и $(-1, -1, \hat{q}^p)$, где q^{i_p} и $\hat{q}^p$ произвольные, то каждому состоянию (q', q'', q^{i_p}) автомата $\mathcal{A}_{i_p}$ сопоставляется состояние $(q', q'', \hat{q}^p)$ автомата $\mathcal{A}'_p$ ($q', q'' \in \{-1, 1\}$);
- если автомат $\mathcal{A}'_p$ имеет единственное начальное состояние, каждому финальному состоянию автомата $\mathcal{A}_{i_p}$ сопоставляется начальное состояние автомата $\mathcal{A}'_p$;
- i_h -композиция K и K' определена только в том случае, если для всех $p \in \{1, \dots, m'\}$, для которых не имеет места ни случай а), ни случай б), специально указано, как производится сопоставление финальным состояниям $\mathcal{A}_{i_p}$ состояний $\mathcal{A}'_p$ (при $p = h$ речь идет не о сопоставлении, а о склеивании).

Содержательно, i_h -композиция — это коллектив K'' такой, что если при функционировании K автомат $\mathcal{A}_{i_h}$ обязательно останавливается и к моменту его остановки все остальные автоматы K уже остановятся, то K'' сначала функционирует как K , а после того, как $\mathcal{A}_{i_h}$ остановится, автоматы K'' с номерами $i_p, p = 1, \dots, m'$, начинают действовать, как коллектив K' , а остальные автоматы коллектива K'' стоят на месте.

Запись

$$(K \circ K')(i_1, \dots, i_{m'}) \xrightarrow{i_h} K''$$

означает, что строится коллектив K'' , по определению равный i_h -композиции коллективов K и K' при стыковочных числах $i_1, \dots, i_{m'}$.

Лемма 8. *Существует коллектив хищников $K = (W_1, \dots, W_{10})(R, V)$ такой, что для произвольной жертвы $U = U(R, V - 1)$ коллектив K , стартуя в такт τ из $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ -позиции, где $\tau \leq 3\tau_0$, останавливается в той же позиции, причем, если $(V - 1)$ -четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ характеризует U , то K обнаруживает U .*

Доказательство. Пусть $c = 3V - 1$. Рассмотрим коллектив $K_c = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_9)(V, V)$ из леммы 4. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1 &= \mathcal{H}_2^x(\mathcal{B}_6, (-V, 0)), & \mathcal{A}^2 &= \mathcal{H}_2^y(\mathcal{B}_1, (0, -V)), & \mathcal{A}^3 &= \mathcal{H}_2^y(\mathcal{B}_6, (0, V)), \\ \mathcal{A}^4 &= \mathcal{H}_2^x(\mathcal{B}_7, (V, 0)), & \mathcal{A}^5 &= \mathcal{H}_2^y(\mathcal{B}_5, (0, -V)), & \mathcal{A}^6 &= \mathcal{H}_2^x(\mathcal{B}_1, (-V, 0)). \end{aligned}$$

Построим вспомогательные автоматы $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ такие, что

$$\mathcal{A}^1 \circ \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^3 \circ \mathcal{A}^4 \rightarrow \mathcal{A}', \quad \mathcal{A}^5 \circ \mathcal{A}^6 \rightarrow \mathcal{A}'', \quad \mathcal{B}_8 \circ \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}'_8.$$

Заменяем в коллективе K_c автомат $\mathcal{B}_8$ на $\mathcal{B}'_8$ и добавим $\mathcal{B}_{10} = \mathcal{H}_0$. Полученный коллектив обозначим K_1 . Этот коллектив функционирует как K_c , а затем $\mathcal{B}'_8$ возвращается к $\mathcal{B}_1$ и останавливается.

$$(K_1 \circ K_{c'})(1, 10, 4, 8, 9) \xrightarrow{8} K_2 = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{10})(V, V),$$

где $c' = \lfloor V/(V - 1) \rfloor c$, $K_{c'} = K_{c'}(V, V)$ — коллектив из леммы 3.

$$\mathcal{C}_8 \circ \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{C}'_8.$$

Заменяем в коллективе K_2 автомат $\mathcal{C}_8$ на $\mathcal{C}'_8$. Этот автомат функционирует так же, как $\mathcal{C}_8$, а затем приходит к $\mathcal{C}'_7$ и останавливается.

$$((\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_7, \mathcal{C}'_8, \mathcal{C}_9, \mathcal{C}_{10}) \circ (\mathcal{A}^6, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}'', \mathcal{A}))(5, 6, 7, 8) \xrightarrow{8} K = (W_1, \dots, W_{10})(V, V).$$

Будем рассматривать коллектив K , как имеющий обзор R , то есть будем рассматривать $K(R, V)$, который действует так же, как и $K(V, V)$.

Покажем, что коллектив K удовлетворяет требованиям леммы. Сначала заметим, что все построения корректны, то есть, во-первых, при определении композиций и i_h -композиций всюду имеют место случаи а) и б) из определения i_h -композиции, а во-вторых, каждый из автоматов типа $\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y))$ используется лишь на таких промежутках времени, на которых автомат $\mathcal{A}$, по которому он строится, неподвижен.

Пусть K стартовал в такт $\tau \leq 3\tau_0$ из $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ -позиции. Тогда через

$$\tau_1 = 2(|s_1| + |s_2|)(c + 1)\tau_0/V[$$

тактов K останавливается в $(s_1, s_2, \tau_0, f_1, f_2)$ -расстановке, где

$$f_i = 2s_i c V \tau_0 / V[, \quad i = 1, 2.$$

Спустя еще

$$\tau_2 = 2(|s_1| + |s_2|)c\tau_0/V[$$

тактов W_8 возвращается в клетку (x_0, y_0) . Затем подколлектив $(W_1, W_{10}, W_4, W_8, W_9)$ функционирует

$$\tau_3 = 2d(V-1)c']\tau_0/V[$$

тактов, после чего автоматы W_5, W_6, W_7, W_8 возвращаются в клетку (x_0, y_0) за время $\tau_4 = 2\tau_2$ и останавливаются. Таким образом, в такты с $(\tau + \tau_1)$ по $(\tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$ автомат W_7 находится в клетке $(x_0 + f_1, y_0 + f_2)$, а в такт $\tau' = (\tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)$ коллектив останавливается в $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ -позиции.

Осталось показать, что если $(V-1)$ -четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ характеризует $U = U(R, V-1)$, перемещающийся по плоскости, то K обнаруживает U .

Положим

$$k = 2cV]\tau_0/V[.$$

Так как длина d_0 предпериода выходной последовательности U не превосходит τ_0 , имеет место неравенство

$$k \geq \tau_0/d \geq d_0/d.$$

По лемме 7, если U не будет обнаружен хищниками ранее, то в такт $\tau_5 = kd$ он будет находиться в клетке $(x_0, y_0) + k(s_1, s_2) = (x_0 + f_1, y_0 + f_2)$. Хищник W_7 окажется в этой клетке в такт $(\tau + \tau_1)$ и покинет эту клетку не раньше, чем через $(\tau_2 + \tau_3)$ тактов после этого. Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \tau + \tau_1 3\tau_0 + 2(|s_1| + |s_2|)(c+1)]\tau_0/V[&\leq]\tau_0/V[(3V + 2((V-1)d)(3V)) \\ &\leq 2V]\tau_0/V[d(3/2 + 3(V-1)) \\ &\leq 2V]\tau_0/V[dc = kd = \tau_5; \end{aligned}$$

здесь учтены соотношения

$$(|s_1| + |s_2|) \leq (V-1)d, \quad c = 3V-1,$$

а также

$$(\tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \geq \tau_3 = 2]\tau_0/V[c'(V-1)d \geq 2]\tau_0/V[Vcd = kd = \tau_5.$$

Таким образом, W_7 окажется в клетке $(x_0 + f_1, y_0 + f_2)$ не позже чем U , и покинет ее не раньше чем U . Следовательно, жертва будет обнаружена. Лемма доказана.

Фиксируем произвольное $k \in \mathbf{N}_0$. Построим упорядоченный набор M_k , элементами которого являются все пары (s_1, s_2) , $s_1, s_2 \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющие условию $(|s_1| + |s_2|) = k$. При $k = 0$ набор состоит из одного элемента $z^0 = (0, 0)$. При $k = 1$ набор состоит из элементов $z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1$, равных $(0, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, 0)$ соответственно. При $k > 1$ набор состоит из элементов $z_1^k, \dots, z_{4k}^k$ соответственно равных $(k, 0), (k-1, 1), \dots, (0, k), (-1, k-1), \dots, (-k, 0), (-(k-1), -1), \dots, (0, -k), (1, -(k-1)), \dots, (k-1, -1)$.

Пусть $(s_1, s_2) = z_i^k$. Пару (s'_1, s'_2) назовем h -следующей за парой (s_1, s_2) , $h \in \mathbf{N}$, если $k \leq h$ и

$$(s'_1, s'_2) = \begin{cases} z_{i+1}^k, & i < 4k, \\ z_1^{k+1}, & i = 4k, k < h. \end{cases}$$

Заметим, что h -следующая пара для пары $(s_1, s_2) = z_{4h}^h$ не определена.

Скажем, что 2-правильный коллектив $(W_1, \dots, W_{11})(R, V)$ расположен в сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ -позиции, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ — $(V - 1)$ -четверка, автоматы W_4 и W_{11} расположены в клетках (x_0, y_0) и $(x_0 + \tau_0, y_0)$, соответственно, а расстановка подколлектива $(W_1, \dots, W_{10})$ отличается от $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ -позиции лишь расположением W_4 .

Коллектив хищников $K = (W_1, \dots, W_{11})$ обрабатывает автоматы с параметрами (R, h) , где $h \in \mathbb{N}$, если для любой h -четверки $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ и любого автомата-жертвы $U = U(R, h)$, перемещающегося по $\mathbb{Z}^2$, K , стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ -позиции, функционирует так, что выполнены следующие условия.

1. K обнаруживает U , если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ характеризует U .
2. При $(s_1, s_2) \neq z_{4hd}^{hd}$ коллектив K оказывается в некоторый такт $\tau'_0 \geq \tau_0$ в сильной $(\tau'_0, d, (s'_1, s'_2), (x_0, y_0))$ -позиции, где (s'_1, s'_2) — (hd) -следующая за (s_1, s_2) пара, и все автоматы K находятся в начальных состояниях.
3. При $(s_1, s_2) = z_{4hd}^{hd}$, коллектив K оказывается в некоторый такт $\tau'_0 \geq \tau_0$ в сильной $(\tau'_0, d + 1, (0, 0), (x_0, y_0))$ -позиции, причем каждый из автоматов W_4 и W_5 останавливается в состоянии, отличном от начального, и все автоматы K , кроме W_{11} , останавливаются не позднее W_8 .

Заметим, что при $\tau'_0 \geq \tau_0 + 1$, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ — $(V - 1)$ -четверка, то рассмотренные выше четверки $(\tau'_0, d, (s'_1, s'_2), (x_0, y_0))$ и $(\tau'_0, d + 1, (0, 0), (x_0, y_0))$ также являются $(V - 1)$ -четверками. Действительно, свойства $(d + 1) \leq \tau'_0$, $(|s'_1| + |s'_2|) \leq \tau'_0$ следуют из того, что $(d + 1) \leq \tau_0 + 1 \leq \tau'_0$, $(|s'_1| + |s'_2|) \leq (|s_1| + |s_2|) + 1 \leq \tau_0 + 1 \leq \tau'_0$. Свойство $(|s'_1| + |s'_2|) \leq (V - 1)d$ следует из того, что $(|s'_1| + |s'_2|) \leq (|s_1| + |s_2|) + 1$, $(|s_1| + |s_2|) \leq (V - 1)d$, $(|s'_1| + |s'_2|) = (|s_1| + |s_2|) + 1$ только при $(|s_1| + |s_2|) < (V - 1)d$.

Лемма 9. Существует коллектив хищников $K = (W_1, \dots, W_{11})(R, V)$, который обрабатывает автоматы с параметрами $(R, V - 1)$.

Доказательство. Будем рассматривать коллектив $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)(V, V)$ из леммы 5 как имеющий обзор R . Этот коллектив, стартуя в такт τ_0 , $\tau_0 \in \mathbb{N}$, из τ_0 -расстановки, в такт $\tilde{\tau}_0$ окажется в горизонтальной $(\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0)$ -расстановке, где

$$\hat{\tau}_0 = \tau_0 + \lceil \tau_0 / (V - 1) \rceil, \quad \tilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2 \lceil \tau_0 / (V - 1) \rceil.$$

Обозначим K_1 коллектив $(\mathcal{A}_1, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{A}_3)$ и K_2 коллектив из леммы 8. Пусть

$$(K_1 \circ K_2)(1, \dots, 10) \xrightarrow{5} K_3 = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{11})(R, V).$$

Если K_3 стартовал в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ -позиции, то в такт $\tilde{\tau}_0$ подколлектив $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{10})$ оказывается в $(\hat{\tau}_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ -позиции. Имеют место неравенства

$$\tilde{\tau}_0 \leq \tau_0 + \frac{2\tau_0}{V-1} + 2 \leq \tau_0 \frac{3V}{V-1} \leq 3\left(\tau_0 + \frac{\tau_0}{V-1}\right) \leq 3\hat{\tau}_0.$$

Отсюда, по лемме 7 коллектив K_3 увидит жертву U , если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ (и следовательно, $(\hat{\tau}_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$) характеризует U .

Построим теперь коллектив $K_4 = (\mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_6)(R, V)$ такой, что коллектив $K' = (W'_1, \dots, W'_{11})(R, V)$, 8-композиция коллективов K_3 и K_4 , стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ -позиции, сначала функционирует как K_3 , а потом в некоторый такт τ'_0 при $(s_1, s_2) \neq z_{4(V-1)d}^{(V-1)d}$ коллектив K' останавливается в сильной $(\tau'_0, d, (s'_1, s'_2), (x_0, y_0))$ -позиции, а при $(s_1, s_2) = z_{4(V-1)d}^{(V-1)d}$ коллектив K' останавливается в сильной $(\tau'_0, d + 1, (0, 0), (x_0, y_0))$ -позиции. Приведем схему функционирования коллектива K_4 .

- 1) $(\mathcal{B}'_1, \{-1, 1\}^2), (\mathcal{B}'_2, \{q_0^2, q_1^2, q_2^2\}), (\mathcal{B}'_3, \{q^3\}), (\mathcal{B}'_4, \{q_0^4, q_1^4\}),$
 $(\mathcal{B}'_5, \{q_1^5, \dots, q_7^5\} \cup \{-1, 1\}^2 \times \{q_8^5, \dots, q_{16}^5\}), (\mathcal{B}'_6, \{q^6\})$. Все состояния автомата $\mathcal{B}'_1$ являются начальными.

Автомат $\mathcal{B}'_5$ идет к автомату $\mathcal{B}'_4$ и передвигает его в клетку (x_0, y_0) .

- 2) $\mathcal{B}'_5, (q_1^5, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_4) = 0), \rightarrow (q_1^5, (V, 0))$.
- 3) $\mathcal{B}'_5, (q_1^5, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_4) = 1), \rightarrow (q_2^5, \text{ход в распоряжение } \mathcal{B}'_4)$.
- 4) $\mathcal{B}'_5, (q_2^5, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0), \rightarrow (q_2^5, (-V, 0))$.
- 5) $\mathcal{B}'_5, (q_2^5, P'_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1, (q_1, q_2)) = 1), \rightarrow ((q_1, q_2, q_8^5), \text{ход в распоряжение } \mathcal{B}'_1),$
 где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\}$.
- 6) $\mathcal{B}'_4, (q_0^4, (P'_0(\mathcal{B}'_4, \mathcal{B}'_5, q_2^5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{B}'_4, \mathcal{B}'_1) = 0)), \rightarrow (q_0^4, (-V, 0))$.
- 7) $\mathcal{B}'_4, (q_0^4, (P'_0(\mathcal{B}'_4, \mathcal{B}'_5, q_2^5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{B}'_4, \mathcal{B}'_1) = 1)), \rightarrow (q_1^4, \text{ход в распоряжение } \mathcal{B}'_1)$.
 При $(s_1, s_2) = (0, 0)$ автомат $\mathcal{B}'_2$ смещается на вектор $(1, 0)$, а $\mathcal{B}'_5$ переходит в финальное состояние q_5^5 .
- 8) $\mathcal{B}'_2, (q_0^2, (P_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_1) = 1)), \rightarrow (q_0^2, (1, 0))$.
- 9) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_8^5), (P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 1)), \rightarrow (q_6^5, (0, 0)),$
 где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\}$.
 Если $(s_1, s_2) = z_{4hd}^{hd}$ при некотором $h = 1, \dots, (V - 1)$, автомат $\mathcal{B}'_5$ переходит в состояние q_3^5 , $\mathcal{B}'_1$ переходит в состояние $(1, 1)$, и $\mathcal{B}'_3$ перемещается на вектор $(1, 0)$.

- 10) $\mathcal{B}'_5, ((1, -1, q_8^5), P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 1), \rightarrow (q_3^5, (0, 0))$.

- 11) $\mathcal{B}'_1, ((1, -1), P_1(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_3) = 1), \rightarrow ((1, 1), (0, 0))$.

- 12) $\mathcal{B}'_3, (q_0^3, P'_1(\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_5, (1, -1, q_8^5)) = 1), \rightarrow (q_0^3, (1, 0))$.

Затем $\mathcal{B}'_5$ идет к $\mathcal{B}'_2$. При $|s_1| \leq (V - 1)d - 2$ автомат $\mathcal{B}'_2$ перемещается на вектор $(2, 0)$, а $\mathcal{B}'_5$ возвращается к $\mathcal{B}'_1$. После этого коллектив останавливается.

- 13) $\mathcal{B}'_5, (q_3^5, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 0), \rightarrow (q_3^5, (V, 0))$.
- 14) $\mathcal{B}'_5, (q_3^5, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 1), \rightarrow (q_4^5, \text{ход в распоряжение } \mathcal{B}'_2)$.
- 15) $\mathcal{B}'_5, (q_4^5, (P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_6) = 0)), \rightarrow (q_4^5, (-V, 0))$.
- 16) $\mathcal{B}'_5, (q_4^5, (P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_6) = 1)), \rightarrow (q_5^5, (-V, 0))$.
- 17) $\mathcal{B}'_5, (q_4^5, (P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_6) = 0)), \rightarrow (q_6^5, \text{ход в распоряжение } \mathcal{B}'_1)$.

18) $\mathcal{B}'_5, (q_4^5, (P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_6) = 1)), \rightarrow (q_7^5, \text{ход в расположение } \mathcal{B}'_1).$

19) $\mathcal{B}'_5, (q_5^5, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0), \rightarrow (q_5^5, (-V, 0)).$

20) $\mathcal{B}'_5, (q_5^5, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 1), \rightarrow (q_7^5, \text{ход в расположение } \mathcal{B}'_1).$

21) $\mathcal{B}'_2, (q_0^2, (P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, q_4^5) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_6) = 0)), \rightarrow (q_0^4, (2, 0)).$

При $|s_1| < (V - 1)d - 2$ автомат $\mathcal{B}'_6$ передвигается на вектор $(V - 1, 0)$, а автомат $\mathcal{B}'_2$ возвращается к $\mathcal{B}'_1$ вместе с $\mathcal{B}'_5$. После этого коллектив останавливается.

22) $\mathcal{B}'_6, (q^6, (P'_1(\mathcal{B}'_6, \mathcal{B}'_5, q_4^5) = 1)), \rightarrow (q^6, (V - 1, 0)).$

23) $\mathcal{B}'_2, (q_0^2, ((P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, q_4^5) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_6) = 1) \vee (P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, q_5^5) = 1)) \wedge (P_V(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_1) = 0)), \rightarrow (q_0^2, (-V, 0)).$

24) $\mathcal{B}'_2, (q_0^2, ((P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, q_4^5) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_6) = 1) \vee (P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, q_5^5) = 1)) \wedge (P_V(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_1) = 1)), \rightarrow (q_1^2, \text{ход в расположение } \mathcal{B}'_1).$

Если $(s_1, s_2) \neq z_{4hd}^{hd}$ ни при каком $h = 0, 1, \dots, (V - 1)$, то автомат $\mathcal{B}'_5$, находясь в состоянии (q_1, q_2, q_8^5) , при $(s_1, s_2) \neq z_{hd+1}^{hd}, z_{2hd+1}^{hd}$ переходит в состояние (q_1, q_2, q_9^5) , а при $(s_1, s_2) = z_{hd+1}^{hd}$ или $(s_1, s_2) = z_{2hd+1}^{hd}$ — в состояние (q_1, q_2, q_{13}^5) , где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\}$. При $(s_1, s_2) = z_{hd+1}^{hd}$, $(s_1, s_2) = z_{2hd+1}^{hd}$ или $(s_1, s_2) = z_{3hd}^{hd}$ автомат $\mathcal{B}'_1$ меняет свое состояние.

25) $\mathcal{B}'_1, ((1, 1), (P_0(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_3) = 0)) \rightarrow ((-1, 1), (0, 0)).$

26) $\mathcal{B}'_1, ((-1, 1), P_0(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_3) = 1) \rightarrow ((-1, -1), (0, 0)).$

27) $\mathcal{B}'_1, ((-1, -1), P_1(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = 1) \rightarrow ((1, -1), (0, 0)).$

28) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_8^5), ((P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 0) \vee (q_2 = -1)) \wedge ((P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 0) \vee ((P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 0) \wedge (q_1 = 1))) \wedge ((P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 0) \vee (q_1 = -1) \vee (q_2 = 1))), \rightarrow ((q_1, q_2, q_9^5), (0, 0)).$

29) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_8^5), ((P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 0) \wedge (q_2 = 1)) \vee ((P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 1) \wedge (q_1 = -1))), \rightarrow ((q_1, q_2, q_{13}^5), (0, 0)).$

Затем автомат $\mathcal{B}'_5$ идет к автомату $\mathcal{B}'_2$.

30) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 0), \rightarrow ((q_1, q_2, q_i^5), (V, 0)),$
где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\}$, $i = 9, 13$.

31) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 1), \rightarrow ((q_1, q_2, q_{i+1}^5), \text{ход в расположение } \mathcal{B}'_2),$
где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\}$, $i = 9, 13$.

$\mathcal{B}'_2$ смещается на 1 в нужную сторону.

32) $\mathcal{B}'_2, (q_0^2, P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, (q_1, q_2, q_{10}^5)) = 1), \rightarrow (q_0^2, (-q_1 q_2, 0)), \text{ где } (q_1, q_2) \in \{-1, 1\}.$

33) $\mathcal{B}'_2, (q_0^2, P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, (q_1, q_2, q_{14}^5)) = 1), \rightarrow (q_0^2, (q_1 q_2, 0)), \text{ где } (q_1, q_2) \in \{-1, 1\}.$

Автомат $\mathcal{B}'_5$ возвращается к $\mathcal{B}'_1$ и идет к автомату $\mathcal{B}'_3$.

34) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0), \rightarrow ((q_1, q_2, q_i^5), (-V, 0)), \text{ где } (q_1, q_2) \in \{-1, 1\},$
 $i = 10, 14.$

- 35) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 1), \rightarrow ((q_1, q_2, q_{i+1}^5), \text{ход в расположение } \mathcal{B}'_1),$
где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\}, i = 10, 14.$
- 36) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 0), \rightarrow ((q_1, q_2, q_i^5), (V, 0)),$ где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\},$
 $i = 11, 15.$
- 37) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 1), \rightarrow ((q_1, q_2, q_{i+1}^5), \text{ход в расположение } \mathcal{B}'_3),$
где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\}, i = 11, 15.$
 $\mathcal{B}'_3$ смещается на 1 в нужную сторону.
- 38) $\mathcal{B}'_3, (q_0^3, P'_0(\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_5, (q_1, q_2, q_{12}^5)) = 1), \rightarrow (q_0^3, (q_1 q_2, 0)),$ где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\}.$
- 39) $\mathcal{B}'_3, (q_0^3, P'_0(\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_5, (q_1, q_2, q_{16}^5)) = 1), \rightarrow (q_0^3, (-q_1 q_2, 0)),$ где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\}.$
Автомат $\mathcal{B}'_5$ возвращается к $\mathcal{B}'_1$ и коллектив останавливается.
- 40) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0), \rightarrow ((q_1, q_2, q_i^5), (-V, 0)),$ где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\},$
 $i = 12, 16.$
- 41) $\mathcal{B}'_5, ((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 1), \rightarrow (q_6^5, \text{ход в расположение } \mathcal{B}'_1),$
где $(q_1, q_2) \in \{-1, 1\}, i = 12, 16.$

Таким образом K_4 построен,

$$(K_3 \circ K_4)(1, 2, 3, 4, 8, 10) \xrightarrow{8} K'.$$

Модифицируем K' так, чтобы в случае, когда W'_8 останавливается в состоянии q_6^5 , в следующий такт времени $\mathcal{A}_8$ и все автоматы, находящиеся с ним в одной клетке, переходили в свои начальные состояния (в этом случае все остальные автоматы также находятся в начальных состояниях). Заметим, что если W'_8 останавливается в состоянии q_7^5 , то W'_4 и W'_5 останавливаются в состояниях, отличных от начального.

Полученный коллектив $K = (W_1, \dots, W_{11})(R, V)$ удовлетворяет требованию леммы. Лемма доказана.

Лемма 10. *Существует коллектив хищников $K = (W_1, \dots, W_{14})(R, V)$, который, стартуя из канонического расположения, обнаруживает любую жертву $U = U(R, V - 1)$, при любом начальном взаимном расположении K и U .*

Доказательство. Обозначим $K_1 = (W'_1, \dots, W'_{11})(R, V)$ коллектив из леммы 9, обрабатывающий автоматы с параметрами $(R, V - 1)$. K_1 , стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (0, 0), (x_0, y_0))$ -позиции, перебирает $(V - 1)$ -четверки со всевозможными допустимыми значениями третьей компоненты (при некоторых значениях первой компоненты, второй компоненте, равной d , и четвертой компоненте, равной (x_0, y_0)), обнаруживает автоматы-жертвы, которые они характеризуют, и оказывается в $(\tau'_0, (d + 1), (0, 0), (x_0, y_0))$ -позиции, $\tau'_0 \in \mathbb{N}$, $\tau'_0 \geq \tau_0$. Если автомат-жертва U имеет предпериод выходной последовательности, не превосходящий τ_0 , период выходной последовательности, не превосходящий d , и условную клетку старта (x_0, y_0) , то K_1 , стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (0, 0), (x_0, y_0))$ -позиции, обнаруживает U .

В доказательстве леммы 6 построен коллектив $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_4)(2, 2)$ такой, что $\mathcal{A}_1$ обходит $\mathbb{Z}^2$, побывав в каждой клетке счетное число раз. Модифицируем K_1 , добавив к нему автоматы W'_{12} , W'_{13} и W'_{14} , которые совместно с W'_1 образуют подколлектив $(W'_1, W'_{12}, W'_{13}, W'_{14})$, функционирующий точно так же, как $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_4)$, но с паузами в работе после каждого хода. Если W'_1 переместился из клетки (x'_0, y'_0) в клетку (x'_0, y'_0) ,

то все автоматы из K_1 перемещаются на тот же вектор $(x'_0 - x_0, y'_0 - y_0)$. Для перемещения автоматов коллектива K_1 , которые не находятся в одной клетке с W'_1 (то есть автоматов W'_2, W'_3, W'_{10} и W'_{11}) на вектор $(x'_0 - x_0, y'_0 - y_0)$ используется механизм, аналогичный тому, который используется при построении коллектива K_4 в доказательстве леммы 8. Затем запускается коллектив K_1 и функционирует вплоть до остановки. После остановки подколлектива K_1 снова делает ход подколлектив $(W'_1, W'_{12}, W'_{13}, W'_{14})$, и все автоматы из K_1 перемещаются на соответствующий вектор.

При каждом следующем запуске подколлектива K_1 производится перебор $(V - 1)$ -параметризующих четверок вида $(\tau_0, d, (s_x, s_y), (x_0, y_0))$ со всеми допустимыми значениями (s_x, s_y) при некоторых значениях τ_0 и фиксированных значениях d и (x_0, y_0) . При каждом новом запуске K_1 значение d увеличивается. Компонента (x_0, y_0) счетное число раз пробегает все клетки плоскости при всех запусках K_1 . Полученный коллектив обозначим $K_2 = (W''_1, \dots, W''_{11})$.

Рассмотрим коллектив $K_3 = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{10})(R, V)$, где $\mathcal{B}_1$ — неподвижный автомат с внутренним алфавитом $\{q_0\} \cup \{-1, 1\}^2$, который в первый такт функционирования переходит из состояния с q_0 в состояние $(1, 1)$, автомат $\mathcal{B}_{10}$ в первый такт смещается на $(1, 0)$ и останавливается, и $\mathcal{B}_i = \mathcal{H}_0$ при всех $i = 2, \dots, 9$. Коллектив K_3 из канонического расположения в клетке (x_0, y_0) за 1 такт переходит в сильную $(1, 1, (0, 0), (x_0, y_0))$ -позицию.

$$(K_3 \circ (W''_1, \dots, W''_{10}))(1, \dots, 10) \xrightarrow{1} (W_1, \dots, W_{10}).$$

Коллектив $(W_1, \dots, W_{10}, W''_{11})$ обозначим через $K = (W_1, \dots, W_{11})(R, V)$.

Покажем, что K удовлетворяет требованию теоремы. Для любого автомата-жертвы $U = U(R, V - 1)$ существует $(V - 1)$ -четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$, которая характеризует U . При функционировании K , подколлектив K_1 счетное число раз запускается из расположений, являющихся $(\tau'_0, d', (0, 0), (x_0, y_0))$ -позициями, при некоторых значениях τ'_0, d' . Среди $(V - 1)$ -четверок $(\tau'_0, d', (s'_1, s'_2), (x_0, y_0))$, которые перебирает K_1 при таких запусках, найдется такая, что $\tau'_0 \geq \tau_0, d' \geq d, (s'_1, s'_2) = (s_1, s_2)$. Такая $(V - 1)$ -четверка характеризует U , следовательно, по лемме 8 автомат U будет обнаружен. Лемма доказана.

Пусть даны целочисленные векторы (x_0, y_0) и (s_1, s_2) , и $h \in \mathbf{N}_0$. Множество

$$L = L_{(x_0, y_0), (s_1, s_2)} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2, (x, y) = (x_0, y_0) + \alpha(s_1, s_2), \alpha \in \mathbf{R}, \alpha \geq 0\}$$

назовем полупрямой. Точку (x_0, y_0) назовем началом L , а вектор (s_1, s_2) — направлением L . Будем рассматривать целочисленную плоскость $\mathbf{Z}^2$ как подмножество действительно-значной плоскости $\mathbf{R}^2$. Будем называть полуполосой множество

$$\hat{L} = \hat{L}_{(x_0, y_0), (s_1, s_2)}^H = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{Z}^2, \rho((x, y), L) \leq H\}.$$

В этой формуле

$$\rho((x, y), L) = \inf_{(x', y') \in L} (|x - x'| + |y - y'|).$$

Величина

$$\inf_{(x, y) \in L_1, (x', y') \in L_2} (|x - x'| + |y - y'|)$$

называется расстоянием между множествами L_1 и L_2 .

Лемма 11. Для любых полупрямых $L_1 = L_{(x_1, y_1), (s_1^1, s_2^1)}, \dots, L_n = L_{(x_n, y_n), (s_1^n, s_2^n)}$ и любых (s_1^0, s_2^0) и H , где $s_1^0, s_2^0 \in \mathbf{Z}$, $H \in \mathbf{N}_0$, существует клетка (x_0, y_0) такая, что расстояние от $L_0 = L_{(x_0, y_0), (s_1^0, s_2^0)}$ до L_i не меньше H при любом $i = 1, \dots, n$.

Рис. 1

Рис. 2

Доказательство. Полупрямые L_i , $1 \leq i \leq n$, пересекаются между собой в конечном числе точек. Рассмотрим круг на плоскости, внутренность которого содержит все эти точки пересечения и начала всех полупрямых. Каждая L_i пересекает границу этого круга в одной точке. Все такие точки различны. Выберем произвольную из этих точек для начала отсчета, и, двигаясь по окружности против часовой стрелки, перенумеруем полупрямые в том порядке, в котором они встречаются на окружности. Рассмотрим направление полупрямой L_1 , и, начиная с этого направления, занумеруем направления полупрямых векторов (s_1^i, s_2^i) в порядке возрастания угла между (s_1^1, s_2^1) и (s_1^i, s_2^i) . Утверждается, что при такой нумерации направление полупрямой L_i имеет номер i (с точностью до перенумерации параллельных направлений полупрямых). Действительно, если направление полупрямой L_i имеет больший номер, чем направление полупрямой L_j при $1 \leq i \leq j \leq n$ (см. рис. 1), то это означает, что эти полупрямые пересекаются вне рассматриваемого круга, что невозможно. Итак, считаем, что номер направления L_i равен i при любом $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим направление (s_1^0, s_2^0) и направления (s_1^i, s_2^i) и (s_1^j, s_2^j) , где i — наибольшее такое, что угол от (s_1^1, s_2^1) до (s_1^i, s_2^i) не превосходит угла от (s_1^1, s_2^1) до (s_1^0, s_2^0) , а j — наименьшее такое, что угол от (s_1^1, s_2^1) до (s_1^j, s_2^j) больше угла от (s_1^1, s_2^1) до (s_1^0, s_2^0) , $1 \leq i \leq j \leq n$. Между полупрямыми L_i и L_j находится сектор, неограниченно расширяющийся с удалением от рассматриваемого круга. В этом секторе не находится фрагментов полупрямых L_k , $1 \leq k \leq n$. Выберем в этом секторе точку (x_0, y_0) (см. рис. 2), удаленную от L_i и L_j на расстояние, не меньшее H . Расстояния между $L_0 = L_{(x_0, y_0), (s_1^0, s_2^0)}$ и L_i и между L_0 и L_j будут также не меньше H . Следовательно, для всех $k = 1, \dots, n$, расстояние между L_0 и L_k не меньше H . Лемма доказана.

Следствие 1. Для любых полуполос $\hat{L}_1 = \hat{L}_{(x_1, y_1), (s_1^1, s_2^1)}^{h_1}, \dots, \hat{L}_n = \hat{L}_{(x_n, y_n), (s_1^n, s_2^n)}^{h_n}$, любого целочисленного вектора (s_1^0, s_2^0) и любых $h_0, k \in \mathbf{N}_0$ существует клетка (x_0, y_0) такая, что расстояние от $\hat{L}_0 = \hat{L}_{(x_0, y_0), (s_1^0, s_2^0)}^{h_0}$ до $\hat{L}_i$ не меньше k при любом $i = 1, \dots, n$.

Для доказательства следствия достаточно применить лемму 11 к полупрямым $L_1 = L_{(x_1, y_1), (s_1^1, s_2^1)}, \dots, L_n = L_{(x_n, y_n), (s_1^n, s_2^n)}$, вектору (s_1^0, s_2^0) и числу

$$H = k + \max(h_0, h_1, \dots, h_n) + 1.$$

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть дана произвольная независимая система хищников $K(R, V) = (W_1, \dots, W_m)$, начальные расположения хищников на плоскости $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ и жертва $U(R', V')$. Назовем траекторией автомата множество клеток плоскости, в которых он бывает за время своего функционирования. По лемме 1 автоматы $U, W_1, \dots, W_m$ двигаются по плоскости с периодами выходных последовательностей $d_0, d_1, \dots, d_m$ соответственно, и с векторами перемещения за свой период $(s_1^0, s_2^0), (s_1^1, s_2^1), \dots, (s_1^m, s_2^m)$. Следовательно, траектория каждого хищника $W_i(R, V)$ лежит в полуполосе $\hat{L}_{(x_i, y_i), (s_1^i, s_2^i), (V d_i)}$, а траектория жертвы $U(R', V')$ лежит в полуполосе $\hat{L}_{(x_0, y_0), (s_1^0, s_2^0), (V' d_0)}$, где (x_0, y_0) — клетка старта $U(R', V')$. По следствию из леммы 11 существует клетка старта жертвы такая, что полуполоса, содержащая траекторию жертвы будет удалена от полуполос, содержащих траектории хищников не менее, чем на R . Следовательно, стартовав из такой клетки, жертва не будет обнаружена и не будет поймана. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть дан $U = U(R, V - 1)$. Требуется доказать утверждения 1) и 2).

Докажем утверждение 1). Пусть $R \geq V_1 + V_2$ и даны автоматы $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1(R, V_1)$ и $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2(R, V_2)$ с внутренними алфавитами Q_1 и Q_2 и функциями переходов и выходов φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2 соответственно.

Суммой автоматов $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ называется автомат $\mathcal{B} = \mathcal{B}(R, V_1 + V_2)$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$) с внутренним алфавитом $Q = Q_1 \times Q_2$ и функциями переходов φ и выходов ψ , определяемых из соотношений $\varphi((q_1, q_2), a) = (\varphi_1(q_1, a), \varphi_2(q_2, a))$ и $\psi((q_1, q_2), a) = \psi_1(q_1, a) + \psi_2(q_2, a)$, где a — произвольный входной символ $\mathcal{B}$, $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$.

Суммой коллективов $K_1 = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)(R, V_1)$ и $K_2 = (\mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_n)(R, V_2)$ называется коллектив $K(R, V_1 + V_2) = K_1 + K_2 = (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}_n + \mathcal{B}'_n)$.

В [3] построен коллектив $K_0 = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)(1, 1)$, обходящий целочисленную плоскость. Будем считать, что K_0 имеет обзор, равный R . Рассмотрим коллектив $K_1(R, V) = K_0(R, 1) + (U, U, U)(R, V - 1)$. K_1 перемещается относительно U так же, как K_0 относительно неподвижной точки. Следовательно, K_1 обнаруживает U при любом начальном взаимном расположении K_1 и U . По лемме 2 существует коллектив $K = (W_1, W_2, W_3)(R, V)$, который ловит U при любом начальном взаимном расположении K и U .

Докажем утверждение 2). Пусть дан произвольный коллектив из двух автоматов $(W_1, W_2)(R', V')$ с числом состояний n_1 и n_2 соответственно. Покажем, что при любых начальных расположениях W_1 и W_2 существует расположение U такое, что (W_1, W_2) не ловит U . Фиксируем начальные расположения W_1 и W_2 и рассмотрим функционирование (W_1, W_2) в отсутствие U . Возможны два случая: 1) W_1 и W_2 не попадают в зоны обзора друг друга; 2) W_1 и W_2 попадают в зоны обзора друг друга в такт τ_0 . В первом случае W_1 и W_2 действуют, как независимая система автоматов, и по теореме 1 существует расположение U такое, что (W_1, W_2) не ловит U при данных начальных расположениях W_1, W_2 и U .

Рассмотрим подробнее второй случай. Пусть W_1 и W_2 после такта τ_0 оказались вне зоны обзора друг друга в течение $\max(n_1, n_2)$ тактов подряд (с такта τ_1 по такт τ_2). Как следует из леммы 1, за это время W_1 и W_2 завершат прохождение предпериодов своих выходных последовательностей и начнут двигаться с периодическими последовательностями выходных символов. Обозначим d_1 и d_2 длины периодов выходных после-

довательностей W_1 и W_2 соответственно, а клетки, в которых W_1 и W_2 находятся в такт τ_2 , обозначим (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Справедливы неравенства $d_1 \leq n_1$ и $d_2 \leq n_2$. Так как до такта τ_2 автоматы W_1 и W_2 находились вне зоны обзора друг друга не более $\max(n_1, n_2)$ тактов подряд,

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leq R' + 2 \max(n_1, n_2) V'.$$

Начиная с такта τ_2 , перемещения W_1 относительно W_2 являются периодическими, с длиной периода $d \leq d_1 d_2$. Пусть за этот период W_1 смещается относительно W_2 на вектор (s_1, s_2) , где $|s_1| + |s_2| \leq 2V'd$.

При $(s_1, s_2) = (0, 0)$ либо W_1 и W_2 окажутся в зоне обзора друг друга не позднее, чем в такт $\tau_2 + d$, либо не окажутся никогда.

Пусть $(s_1, s_2) \neq (0, 0)$. Пока W_1 , W_2 находятся вне зоны обзора друг друга, в системе координат, связанной с W_2 , W_1 перемещается в полуполосе $\hat{L}_{((x_1-x_2), (y_1-y_2)), (s_1, s_2)}^{2V'd}$. Обозначим через $R'_{\min}$ минимальное расстояние между W_1 и W_2 за время нахождения W_1 и W_2 вне зоны обзора друг друга, начиная с такта τ_2 , а через $R'_{\min}$ — минимальное расстояние, на котором W_1 и W_2 находятся в такты вида $\tau_2 + kd$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ясно, что

$$R'_{\min} = \min_{k \in \mathbb{N}_0} (|x_1 - x_2 + ks_1| + |y_1 - y_2 + ks_2|).$$

Расстояние $R'_{\min}$ между W_1 и W_2 достигается не позднее, чем через d тактов после достижения расстояния $R'_{\min}$. Укажем такты, в которые расстояние между W_1 и W_2 равно $R'_{\min}$.

При $|s_1| > |s_2|$ и $(x_1 - x_2)s_1 \geq 0$, при $|s_2| > |s_1|$ и $(y_1 - y_2)s_2 \geq 0$, а так же при $|s_1| = |s_2|$, $(x_1 - x_2)s_1 \geq 0$ и $(y_1 - y_2)s_2 \geq 0$ расстояние $R'_{\min}$ достигается в такт τ_2 .

При $|s_1| > |s_2|$ и $(x_1 - x_2)s_1 < 0$, ($|s_2| > |s_1|$ и $(y_1 - y_2)s_2 < 0$), расстояние $R'_{\min}$ достигается в такт $\tau_2 + [(x_2 - x_1)/s_1]d$, либо в такт $\tau_2 + [(x_2 - x_1)/s_1]d$ (в такт $\tau_2 + [(y_2 - y_1)/s_2]d$, либо в такт $\tau_2 + [(y_2 - y_1)/s_2]d$).

Наконец, в случае $|s_1| = |s_2|$ при $(x_1 - x_2)s_1 < 0$ или $(y_1 - y_2)s_1 < 0$ расстояние $R'_{\min}$ достигается либо в такт $\tau_2 + d \max_{(a_1, a_2) \in \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}, (a_2 - a_1)s_1 < 0} [(a_1 - a_2)/s_1]$, либо в такт $\tau_2 + d \max_{(a_1, a_2) \in \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}, (a_2 - a_1)s_1 < 0} [(a_1 - a_2)/s_1]$.

Таким образом, мы получаем, что в любом случае не позднее, чем в такт $\tau_3 = \tau_2 + d \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) + d$ между W_1 и W_2 достигается расстояние $R'_{\min}$. Используя оценки сверху для d , τ_2 и $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, получаем, что

$$\tau_3 \leq \tau_1 + \max(n_1, n_2) - 1 + (n_1 n_2 + 1)(R' + 2V' \max(n_1, n_2)).$$

Если с такта τ_1 до такта τ_3 автоматы W_1 и W_2 находятся вне зоны обзора друг друга, то они будут вне зоны обзора друг друга и далее, так как в такт τ_3 расстояние между ними минимально. Таким образом, либо, начиная с некоторого такта τ_1 , (W_1, W_2) действует как независимая система автоматов, либо W_1 и W_2 не покидают зоны обзора друг друга более чем на

$$\tau_4 = \max(n_1, n_2) + (n_1 n_2 + 1)(R' + V' \max(n_1, n_2))$$

тактов. В первом случае траектории W_1 и W_2 (целиком, то есть с нулевого такта) лежат в полуполосах ширины $(n_1 + \tau_1)V'$ и $(n_2 + \tau_1)V'$ соответственно. Во втором случае расстояние между W_1 и W_2 не превосходит $R_0 = R' + V'\tau_4$. Не позднее чем через $\tau_5 = n_1 n_2 (R_0^2 + (R_0 + 1)^2)$ тактов W_1 и W_2 окажутся в тех же состояниях и в том же относительном расположении, что и ранее. Следовательно, выходные последовательности W_1

и W_2 периодические с суммой периода и предпериода не превосходящей τ_5 . Траектории W_1 и W_2 лежат в полуполосах ширины $\tau_5 V'$.

В обоих случаях, как и в доказательстве теоремы 1, существует начальное расположение U , при котором полуполоса, содержащая его траекторию, не пересекается с полуполосами, содержащими траектории W_1 и W_2 , то есть (W_1, W_2) не ловит U . Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть по плоскости перемещается произвольная независимая система жертв $S = (U_1, \dots, U_n)(R, V - 1)$.

Предположим, что $R > V$. Построим автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$, который, не видя жертв, стоит на месте, а увидев какую-либо из жертв, $\mathcal{A}$ не позднее, чем через $(R - V)$ тактов ловит некоторую жертву и возвращается в исходное расположение. Начальным состоянием $\mathcal{A}$ является $(0, q_0, \dots, q_0)$.

1) $(\mathcal{A}, Q_{\mathcal{A}} = \{0, 1, \dots, n\} \times (\{q_0\} \cup \{-V, \dots, -1, 0, 1, \dots, V\}^2)^{R-V} \cup \{q_1\})$.

Увидев в такт τ_0 какую-либо жертву, $\mathcal{A}$ преследует ближайшую к нему (одну из ближайших) жертву, запоминая в своей первой компоненте номер преследуемой жертвы, а в s -й компоненте — свой ход в такт $\tau_0 + s - 1$, где $1 \leq s \leq (R - V)$.

2) $\mathcal{A}, ((0, q_0, \dots, q_0), (P_R''(\mathcal{A}, U_j) = 1)), \rightarrow ((j, (v_1, v_2), q_0, \dots, q_0), (v_1, v_2))$, где j — номер ближайшей к $\mathcal{A}$ (одной из ближайших) жертвы, (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой U_j находился в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

3) $\mathcal{A}, ((j, (v_1^1, v_2^1), \dots, (v_1^s, v_2^s), q_0, \dots, q_0), (P_R''(\mathcal{A}, U_j) = 1)), \rightarrow ((j, (v_1^1, v_2^1), \dots, (v_1^s, v_2^s), (v_1, v_2), q_0, \dots, q_0), (v_1, v_2))$, где $1 \leq j \leq n$, $1 \leq s \leq (R - V - 2)$, (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой U_j находился в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

4) $\mathcal{A}, ((j, (v_1^1, v_2^1), \dots, (v_1^{(R-V-1)}, v_2^{(R-V-1)}), q_0), (P_R''(\mathcal{A}, U_j) = 1)), \rightarrow ((j, (v_1^1, v_2^1), \dots, (v_1^{(R-V-1)}, v_2^{(R-V-1)}), (v_1, v_2), (v_1, v_2))$, где $1 \leq j \leq n$, (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой U_j находился в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

Не позднее, чем через $R - V$ тактов жертва U_j будет поймана. После этого $\mathcal{A}$ возвращается в исходное расположение (не реагируя на другие жертвы), используя ранее сохраненные координаты своих перемещений. Это возвращение также происходит не более чем за $R - V$ тактов.

5) $\mathcal{A}, ((j, (v_1^1, v_2^1), \dots, (v_1^s, v_2^s), q_0, \dots, q_0), (P_R''(\mathcal{A}, U_j) = 0)), \rightarrow ((j, (v_1^1, v_2^1), \dots, (v_1^{s-1}, v_2^{s-1}), q_0, \dots, q_0), (-v_1^s, -v_2^s))$, $1 \leq j \leq n$, $2 \leq s \leq (R - V)$.

6) $\mathcal{A}, ((j, (v_1^1, v_2^1), q_0, \dots, q_0), (P_R''(\mathcal{A}, U_j) = 0)), \rightarrow (q_1, (-v_1^1, -v_2^1))$.

В лемме 10 построен коллектив хищников, обнаруживающий любой автомат-жертву $U = U(R, V - 1)$. Для этого коллектива введем новое обозначение $K_1 = (W'_1, \dots, W'_{14})(R, V)$. Внутренний алфавит W'_i , $1 \leq i \leq 14$, обозначим Q'_i , а его начальное состояние — q_0^i .

При функционировании коллектива K_1 его подколлектив $(W'_1, \dots, W'_{11})$ при каждом своем запуске функционирует не менее 7 тактов (W'_5 идет к W'_{11} и обратно не менее 2 тактов, W'_9 не менее одного раза идет к W'_4 и обратно (см. доказательство леммы 7), после

остановки коллектива K_3 (см. доказательство леммы 8) W'_5 идет к W'_4 и обратно, а затем еще хотя бы один такт тратится на перемещение автоматов W'_2 и W'_3 . Автоматы W'_1 , W'_{12} , W'_{13} и W'_{14} перемещаются только в паузах между запусками подколлектива $(W'_1, \dots, W'_{11})$, то есть не чаще, чем 1 раз в 8 тактов. За одну такую паузу каждый из этих автоматов делает 1 ход, перемещаясь на некоторый вектор $\vec{s}$ такой, что $|\vec{s}| \leq 2$. Автомат W'_{10} за время работы коллектива $(W'_1, \dots, W'_{11})$ перемещается на вектор $((V-1), 0)$, а автомат W'_{11} за каждый такт работы коллектива $(W'_1, \dots, W'_{11})$ перемещается на вектор $(1, 0)$.

Добавим к коллективу K_1 автоматы $W''_1, \dots, W''_{14}$, устроенные следующим образом.

Каждый хищник W''_i при $i = 1, 10, 11, 12, 13, 14$ имеет две группы состояний, Q'_i и $Q_{\mathcal{A}}$. Начальным состоянием W''_i является q_0^i . Автомат W''_i , находясь в состоянии $q \in Q'_i$, перемещается и меняет свое состояние так же, как автомат W'_i в состоянии q при том же входном символе, если $P''_R(W''_i, U_j) = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, и перемещается и меняет свое состояние так же, как автомат $\mathcal{A}$ в состоянии $(0, q_0, \dots, q_0)$ при том же входном символе, если $P''_R(W''_i, U_j) = 1$ для некоторого $j = 1, \dots, n$. Находясь в состоянии $q \in Q_{\mathcal{A}}$, $q \neq q_1$, хищник W''_i перемещается и меняет свое состояние так же, как и $\mathcal{A}$ в состоянии q при том же входном символе.

Каждый хищник W''_i при $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ имеет внутренний алфавит

$$Q''_i = \{-1, 1\}^2 \times (Q_i^0 \cup \{q_2, q_3\}), \quad Q_i^0 = Q'_i \cup Q_{\mathcal{A}}.$$

Начальным состоянием W''_i является $(1, 1, q_1^i)$.

Рассмотрим четыре квадранта, на которые целочисленная плоскость разбивается горизонтальной и вертикальной целочисленными прямыми, проходящими через расположение W'_1 . Из построений лемм 8, 9, 10 нетрудно видеть, что каждый хищник W'_i может перейти из одного рассматриваемого квадранта в другой только оказавшись в одной клетке с W_1 . Хищник W''_i также переходит из одного квадранта в другой (не считая времени преследования увиденной жертвы и возвращения на траекторию W'_i), только оказавшись в одной клетке с W_1 . Поэтому W''_i в каждый момент времени (кроме, может быть, времени преследования увиденной жертвы и возвращения на траекторию W'_i) знает величины $\text{sgn}_0(a_1)$ и $\text{sgn}_0(a_2)$, где (a_1, a_2) — вектор разности расположений W'_i и W'_1 .

Определим функцию переходов автомата W''_i так, что первая и вторая компоненты состояния W''_i в каждый момент времени (кроме, может быть, времени преследования увиденной жертвы и возвращения на траекторию W'_i) будут равны $\text{sgn}_0(a_1)$ и $\text{sgn}_0(a_2)$ соответственно. Если $P''_R(W''_i, U_j) = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, автомат W''_i , находясь в состоянии (q', q'', q) , где $q', q'' \in \{-1, 1\}$, $q \in Q'_i$, перемещается так же, как W'_i , находящийся в состоянии q , при том же входном символе и переходит в состояние с третьей компонентой, равной состоянию, в которое переходит W'_i из состояния q при том же входном символе. Если $P''_R(W''_i, U_j) = 1$ для некоторого $j = 1, \dots, n$, автомат W''_i , находясь в состоянии (q', q'', q) , где $q \in Q'_i$, перемещается так же, как $\mathcal{A}$, находящийся в состоянии $(0, q_0, \dots, q_0)$, при том же входном символе и переходит в состояние с третьей компонентой, равной состоянию, в которое переходит $\mathcal{A}$ из состояния $(0, q_0, \dots, q_0)$ при том же входном символе. Автомат W''_i , находясь в состоянии (q', q'', q) , где $q \in Q_{\mathcal{A}}$, перемещается так же, как $\mathcal{A}$, находящийся в состоянии q , при том же входном символе и переходит в состояние с третьей компонентой, равной состоянию, в которое переходит $\mathcal{A}$ из состояния q при том же входном символе.

Каждый хищник W''_i при $i = 1, \dots, 14$ до того, как увидит какую-либо жертву, перемещается совместно с W'_i . Увидев какую-либо жертву, W''_i функционирует как автомат $\mathcal{A}$, то есть за время, не большее $2(R-V)$, ловит некоторую жертву и возвращается в клетку, из которой он начинал преследование жертвы.

Пусть $i \in \{1, 12, 13, 12\}$. Перемещение $\vec{s}_i$ автомата W_i' за время преследования автоматом W_i'' жертвы таково, что

$$|\vec{s}_i| \leq 2]2(R - V)/8[\leq (R - V)/2 + 2 \leq R/2 + 1 \leq R,$$

то есть автомат W_i'' , оказавшись в состоянии q_1 (финальном состоянии автомата $\mathcal{A}$), увидит W_i' . Доопределим W_i'' , так что W_i'' в состоянии q_1 , видя W_i' , идет к нему со скоростью V , а оказавшись в одной клетке с W_i' , останавливается, переходя в то состояние, в котором находится W_i' .

Пусть $i \in \{10, 11\}$. Доопределим W_i'' так, что он, находясь в состоянии q_1 , не видя W_i' , идет со скоростью V в направлении $(1, 0)$, пока не увидит W_i' , а видя W_i' , идет к нему со скоростью V . Оказавшись в одной клетке с W_i' , автомат W_i'' останавливается, переходя в то состояние, в котором находится W_i' .

Перемещение $\vec{s}_i$ автомата W_i' за некоторый промежуток времени длиной τ тактов есть сумма $\vec{s}_i = \vec{s}_i' + \vec{s}_1$, где $\vec{s}_i'$ — перемещение W_i' как элемента подколлектива $(W_1', \dots, W_{11}')$, а $\vec{s}_1$ — перемещение автомата W_1' за рассматриваемый промежуток времени. Ясно, что $\vec{s}_i' = (x_i, 0)$. Справедливы неравенства

$$0 \leq x_{10} \leq (V - 1)\tau/8[, \quad 0 \leq x_{11} \leq \tau, \quad |\vec{s}_1| \leq 2]\tau/8[.$$

Нетрудно видеть, что автомат W_i'' , оказавшись в состоянии q_1 , увидит W_i' не позднее, чем через время τ_i , где

$$\tau_{10} = 2(R - V)]V/V - 1[, \quad \tau_{11} =]4(R - V)/7[.$$

Увидев W_i' , автомат W_i'' остановится в одной клетке с ним.

Пусть $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Как нетрудно видеть из построений лемм 8, 9, 10, автомат W_i' перемещается так, что в любой такт времени ему, чтобы вернуться к W_1' , достаточно пройти не более одного горизонтального и не более одного вертикального отрезка. Попав в состояние (q', q'', q_1) , автомат W_i'' находится в клетке, где он ранее находился вместе с W_i' . Доопределим W_i'' так, чтобы после попадания в состояние (q', q'', q_1) , он перемещался в клетку, в которой находится W_1' , и останавливался в состоянии $(1, 1, q_3)$ (как видно из построений лемм 8, 9, 10, это можно сделать, используя для такого перемещения состояния вида (q', q'', q_1) и (q', q'', q_2) , $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$). Когда все W_i' и все W_i'' , $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, оказываются в той же клетке, что и W_1' , причем каждый W_i'' находится в состоянии $(1, 1, q_3)$, тогда каждый W_i'' переходит в то же состояние, в которое переходит W_1' и делает тот же ход, что и W_1' .

Пусть $K = (W_1, \dots, W_{28}) = (W_1', \dots, W_{14}', W_1'', \dots, W_{14}'')$ — полученный коллектив. Покажем, что коллектив K удовлетворяет требованию теоремы. Подколлектив $(W_1', \dots, W_{14}')$ функционирует так же, как коллектив K_1 . Пусть в момент, когда все автоматы K_1 перемещаются в следующую клетку, уже поймано h жертв, и каждый хищник W_i'' , $i = 1, \dots, 14$, находится в той же клетке и в том же состоянии, что и W_i' . Хищники W_i'' и W_i' передвигаются совместно, пока не обнаружат некоторую жертву (по лемме 10 некоторая пара W_i'' и W_i' рано или поздно обнаруживает жертву). После этого W_i'' ловит жертву, а затем возвращается к W_1' при $i = 1, \dots, 9$ и возвращается к W_i' при $i = 10, \dots, 14$. В некоторый следующий момент, когда все автоматы K_1 перемещаются в следующую клетку (не позднее, чем через 14 таких моментов), все W_i'' , $i = 1, \dots, 14$, снова окажутся в той же клетке и в том же состоянии, что и W_i' , и будет поймано $h + 1$ жертва. Таким образом, все жертвы будут пойманы. Теорема доказана.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш., Независимые системы автоматов в лабиринтах. *Дискретная математика* (2003) **15**, №2, 3–39.
3. Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш., Коллективы автоматов в лабиринтах. *Дискретная математика* (2003) **15**, №3, 3–39.
4. Грунская В. И., О динамическом взаимодействии автоматов. В кн.: *Математическая кибернетика и ее приложения к биологии*. МГУ, Москва, 1987, с. 8–18.

Статья поступила 15.06.2005.