Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Предельные теоремы для промежуточно докритического и строго докритического ветвящихся процессов в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 1, 132–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:34:35

Предельные теоремы для промежуточно докритического и строго докритического ветвящихся процессов в случайной среде

© 2001 г. В. И. Афанасьев

Пусть $\{\xi_n\}$ — промежуточно докритический ветвящийся процесс в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями, m_n^+ — условное математическое ожидание ξ_n при условии, что случайная среда фиксирована и $\xi_n > 0$. Установлена сходимость в смысле конечномерных распределений при $n \rightarrow \infty$ последовательности случайных процессов

$$\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}^+, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\}.$$

В качестве следствия установлена сходимость в смысле конечномерных распределений последовательности случайных процессов

$$\{\ln \xi_{[nt]} / \sqrt{n}, t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0\}$$

к некоторому процессу, выражаемому через броуновскую извилину.

Для строго докритического ветвящегося процесса в случайной среде $\{\xi_n\}$ (с дробно-линейными производящими функциями) установлена сходимость в смысле конечномерных распределений последовательности случайных процессов

$$\{\xi_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\}$$

к некоторому процессу, все сечения которого независимы и одинаково распределены.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 98-01-00524, и INTAS, проект 99-01317.

1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, где

$$\pi_n = \{\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}, \dots\}, \pi_n^{(i)} \geq 0, i = 0, 1, \dots, \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} = 1, n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

причем последовательности π_n одинаково распределены и независимы при разных n . По определению это означает, что случайные величины ξ_n являются неотрицательными целочисленными и

$$\xi_0 = 1, \quad \mathbf{M}(s^{\xi_{n+1}} \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n) = (f_n(s))^{\xi_n},$$

где

$$f_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} s^i, \quad s \in [-1, 1], \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Ветвящийся процесс в случайной среде называется надкритическим, если $\mathbf{M} \ln f'_0(1) > 0$; критическим, если $\mathbf{M} \ln f'_0(1) = 0$; умеренно докритическим, если $\mathbf{M} \ln f'_0(1) < 0$ и $\mathbf{M}(f'_0(1) \ln f'_0(1)) > 0$; промежуточно докритическим, если $\mathbf{M} \ln f'_0(1) < 0$ и $\mathbf{M}(f'_0(1) \ln f'_0(1)) = 0$; строго докритическим, если $\mathbf{M} \ln f'_0(1) < 0$, $\mathbf{M}(f'_0(1) \ln f'_0(1)) < 0$.

Положим

$$m_n = \mathbf{M}_\pi \xi_n, \quad m_n^+ = \mathbf{M}_\pi(\xi_n \mid \xi_n > 0)$$

($\mathbf{P}_\pi$ и $\mathbf{M}_\pi$ означают вероятность и математическое ожидание, вычисленные при условии, что случайная среда $\{\pi_n\}$ фиксирована).

В дальнейшем всюду предполагается, что производящие функции $\{f_n(s)\}$ дробно-линейны.

В работе [1] для критического ветвящегося процесса в случайной среде установлено, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}, t \in (0, 1] \mid \xi_n > 0t\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\mu_1(t), t \in (0, 1]\},$$

где знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[u, 1]$ с топологией Скорохода при каждом $u \in (0, 1)$; $\{\mu_1(t)\}$ — случайный процесс с положительными постоянными реализациями на $(0, 1]$.

В работе [2] для умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде установлено, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\mu_2(t), t \in (0, 1)\},$$

где знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[u, 1 - u]$ с топологией Скорохода при каждом $u \in (0, 1/2)$; $\{\mu_2(t)\}$ — случайный процесс с положительными постоянными реализациями на $(0, 1)$.

Предельная теорема в промежуточно докритическом случае отличается от указанных теорем в критическом и умеренно докритическом случаях своеобразием предельного процесса, траектории которого уже не являются постоянными. Чтобы сформулировать соответствующий результат, сначала зададим положительный случайный процесс $\{\mu_3(t), t \in (0, 1)\}$, который фигурирует в качестве предельного в промежуточно-докритическом случае. Для этого зададим преобразования Лапласа его конечномерных распределений. Зафиксируем натуральное число m и действительные числа

$$t_1, \dots, t_m, \quad 0 < t_1 < \dots < t_m < 1$$

(введем для упрощения записей $t_0 = 0$). Положим

$$\varphi_{t_1, \dots, t_m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \mathbf{M} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu_3(t_i) \right),$$

где $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. Чтобы задать $\varphi_{t_1, \dots, t_m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, необходимо рассмотреть броуновскую извилину $\{W^+(t)\}$. Напомним ее определение. Если $\{W(t)\}$ — стандартное броуновское движение, выходящее из нуля, и

$$\tau = \sup\{t \in [0, 1]: W(t) = 0\}, \quad \Delta = 1 - \tau,$$

то

$$W^+(t) = |W(\tau + t\Delta)|/\sqrt{\Delta}, \quad t \in [0, 1].$$

Положим

$$\psi_k = \inf_{t \in [1-t_k, 1-t_{k-1}]} W^+(t), \quad k = 1, \dots, m; \quad \psi_{k,l} = \min_{k < i \leq l} \psi_i. \quad (1)$$

Тогда по определению

$$\varphi_{t_1, \dots, t_m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \mathbf{M}(h_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m))^{-2}, \quad (2)$$

где

$$h_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = 1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i + \sum_{k=2}^m \sum_{I_{k,m}} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \chi\{\psi_{i_0, i_1} > \dots > \psi_{i_{k-1}, i_k}\}, \quad (3)$$

$$I_{k,m} = \{(i_0, i_1, \dots, i_k) : 0 = i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq m\}. \quad (4)$$

Отсюда, в частности, следует, что одномерные распределения случайного процесса $\{\mu_3(t), t \in (0, 1)\}$ совпадают и являются гамма-распределениями с плотностью вероятностей

$$p(x) = x \exp(-x), \quad x \geq 0.$$

Положим

$$X_n = \ln f'_{n-1}(1), \quad \eta_n = f''_{n-1}(1)/(2f'_{n-1}(1)^2), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Поскольку компоненты среды $\pi_1, \pi_2, \dots$ независимы и одинаково распределены, случайные векторы $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$ независимы и одинаково распределены. В частности, случайная последовательность

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbf{N},$$

представляет собой случайное блуждание.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — промежуточно докритический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}_0$, дробно-линейны. Пусть $0 < \mathbf{M}(X_1^2 \exp X_1) < \infty$ и существуют такие положительные постоянные M_1, M_2 , $M_1 < M_2$, что п. н.

$$M_1 \leq \eta_1 \exp X_1 \leq M_2.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}^+, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\} \Rightarrow \{\mu_3(t), t \in (0, 1)\},$$

где знак $\Rightarrow$ означает сходимость в смысле конечномерных распределений.

В качестве следствия теоремы 1 получается следующий результат. Положим при $t \in [0, 1]$

$$W^*(t) = \sup_{s \in [1-t, 1]} (W^+(1-t) - W^+(s)).$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\{\ln \xi_{[nt]} / (\sigma^* \sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid \xi_n > 0\} \Rightarrow \{W^*(t), t \in [0, 1]\},$$

где $\sigma^* = \sqrt{\mathbf{M}(X_1^2 \exp X_1) / \mathbf{M} \exp X_1}$.

В строго докритическом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\{\xi_n\}$ — строго докритический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}$, дробно-линейны. Пусть $\mathbf{M}(\eta_1 \exp X_1) < \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\} \Rightarrow \{\mu_4(t), t \in (0, 1)\},$$

где $\{\mu_4(t)\}$ — положительный случайный процесс, у которого все сечения независимы и одинаково распределены.

2. В этом пункте рассматривается произвольный ветвящийся процесс в случайной среде $\{\xi_n\}$ в предположении, что случайная среда $\{\pi_n\}$ фиксирована. Тогда на случайный процесс $\{\xi_n\}$ можно смотреть как на неоднородный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона. Как и прежде, будем предполагать, что фиксированы $m \in \mathbf{N}$ и

$$t_1, \dots, t_m \in \mathbf{R}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1.$$

Пусть $F_k(s)$ — производящая функция числа потомков в $[nt_k]$ -м поколении от одной частицы из $[nt_{k-1}]$ -го поколения. Выражение многомерной производящей функции случайного вектора $\{\xi_{[nt_1]}, \dots, \xi_{[nt_m]}\}$ через $F_1(s), \dots, F_m(s)$ указывается в ниже-следующей лемме (доказательство см., например, в [3], гл. 1).

Лемма 1. При всех $s_1, s_2, \dots, s_m \in [-1, 1]$ справедливо равенство

$$\mathbf{M}_\pi(s_1^{\xi_{[nt_1]}} s_2^{\xi_{[nt_2]}} \dots s_m^{\xi_{[nt_m]}}) = F_1(s_1 F_2(s_2 (\dots F_m(s_m) \dots))).$$

Пусть $T = \inf\{n > 0: \xi_n = 0\}$ — момент вырождения процесса $\{\xi_n\}$. Пусть q_m означает вероятность, вычисленную при фиксированной среде, того, что ветвящийся процесс, начинающийся с одной частицы из $[nt_m]$ -го поколения, выродится до момента n .

Лемма 2. При всех $s_1, s_2, \dots, s_m \in [-1, 1]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\pi(s_1^{\xi_{[nt_1]}} s_2^{\xi_{[nt_2]}} \dots s_m^{\xi_{[nt_m]}}; T > n) \\ = F_1(s_1 F_2(s_2 (\dots F_m(s_m) \dots))) - F_1(s_1 F_2(s_2 (\dots F_m(s_m q_m) \dots))). \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{M}_\pi(s_1^{\xi_{[nt_1]}} \dots s_m^{\xi_{[nt_m]}}; T > n) = \mathbf{M}_\pi(s_1^{\xi_{[nt_1]}} \dots s_m^{\xi_{[nt_m]}}) - \mathbf{M}_\pi(s_1^{\xi_{[nt_1]}} \dots s_m^{\xi_{[nt_m]}}; T \leq n).$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}_\pi(s_1^{\xi_{[nt_1]}} \dots s_m^{\xi_{[nt_m]}}; T \leq n) \\
 &= \sum_{k_1, \dots, k_m \in \mathbf{N}_0} s_1^{k_1} \dots s_m^{k_m} \mathbf{P}_\pi(\xi_{[nt_1]} = k_1, \dots, \xi_{[nt_m]} = k_m, T \leq n) \\
 &= \sum_{k_1, \dots, k_m \in \mathbf{N}_0} s_1^{k_1} \dots s_m^{k_m} \mathbf{P}_\pi(\xi_{[nt_1]} = k_1, \dots, \xi_{[nt_m]} = k_m) q_m^{k_m} \\
 &= \sum_{k_1, \dots, k_m \in \mathbf{N}_0} s_1^{k_1} \dots (s_m q_m)^{k_m} \mathbf{P}_\pi(\xi_{[nt_1]} = k_1, \dots, \xi_{[nt_m]} = k_m) \\
 &= \mathbf{M}_\pi(s_1^{\xi_{[nt_1]}} \dots s_{m-1}^{\xi_{[nt_{m-1}]}} (s_m q_m)^{\xi_{[nt_m]}}).
 \end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 1, получаем утверждение леммы 2.

Положим

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad a_n = e^{-S_n}, \quad b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i}, \quad n \in \mathbf{N},$$

$$A_0 = 1, \quad B_0 = 0, \quad A_k = a_{[nt_k]}, \quad B_k = b_{[nt_k]}, \quad k = 1, \dots, m; \quad A = a_n, \quad B = b_n.$$

Лемма 3. Если производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}$, дробно-линейны, то при $k = 1, \dots, m$ и $s \in [-1, 1]$

$$F_k(s) = 1 - \frac{A_{k-1}(1-s)}{A_k + (B_k - B_{k-1})(1-s)}.$$

Доказательство. Из определения $F_k(s)$ следует, что

$$F_k(s) = f_{[nt_{k-1}]}(f_{[nt_{k-1}]+1}(\dots f_{[nt_k]-1}(s) \dots)).$$

В работе [4] установлено, что если производящие функции $\{f_n(s)\}$ дробно-линейны, то при $s \in [-1, 1]$, $l, r \in \mathbf{N}$, $l < r$

$$f_l(f_{l+1}(\dots f_{r-1}(s) \dots))$$

$$= 1 - \left(\left(\prod_{j=l}^{r-1} f'_j(1) \right)^{-1} \frac{1}{1-s} + \sum_{i=l}^{r-1} \frac{f''_i(1)}{2(f'_i(1))^2} \left(\prod_{j=l}^{i-1} f'_j(1) \right)^{-1} \right)^{-1}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned}
 \prod_{j=l}^{i-1} f'_j(1) &= e^{S_i - S_l} = \frac{a_l}{a_i}, \\
 \sum_{i=l}^{r-1} \frac{f''_i(1)}{2(f'_i(1))^2} \left(\prod_{j=l}^{i-1} f'_j(1) \right)^{-1} &= \frac{1}{a_l} \sum_{i=l}^{r-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} = \frac{1}{a_l} (b_r - b_l),
 \end{aligned}$$

находим, что

$$f_l(f_{l+1}(\dots f_{r-1}(s) \dots)) = 1 - \left(\frac{a_r}{a_l(1-s)} + \frac{1}{a_l} (b_r - b_l) \right)^{-1}, \quad (5)$$

откуда, подставляя $l = [nt_{k-1}]$, $r = [nt_k]$, получаем утверждение леммы 3.

Положим

$$H_m(t_1, \dots, t_m) = 1 + \sum_{i=1}^m t_i B_i + \sum_{k=2}^m \sum_{I_{k,m}} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k} B_{i_1} (B_{i_2} - B_{i_1} - A_{i_1}) \dots (B_{i_k} - B_{i_{k-1}} - A_{i_{k-1}}) \quad (6)$$

(множество индексов $I_{k,m}$ определено в (4)). Следующая лемма играет важную роль в дальнейшем.

Лемма 4. Если производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}$, дробно-линейны, то при всех $s_1, \dots, s_m, \tilde{s}_m \in [-1, 1]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} F_1(s_1(\dots F_{m-1}(s_{m-1}F_m(s_m))\dots)) - F_1(s_1(\dots F_{m-1}(s_{m-1}F_m(\tilde{s}_m))\dots)) \\ = \frac{s_1 \dots s_{m-1}(s_m - \tilde{s}_m)}{A_m H_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m) H_m(t_1, \dots, t_{m-1}, \tilde{t}_m)}, \end{aligned}$$

где $t_i = (1 - s_i)/A_i$, $i = 1, \dots, m$; $\tilde{t}_m = (1 - \tilde{s}_m)/A_m$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Пусть $\tilde{s}_i \in [-1, 1]$, $\tilde{t}_i = (1 - \tilde{s}_i)/A_i$, $i = 1, \dots, m-1$. При $m = 1$, используя лемму 3, получаем, что

$$\begin{aligned} F_1(s_1) - F_1(\tilde{s}_1) &= \frac{1 - \tilde{s}_1}{A_1 + B_1(1 - \tilde{s}_1)} - \frac{1 - s_1}{A_1 + B_1(1 - s_1)} \\ &= \frac{A_1(s_1 - \tilde{s}_1)}{(A_1 + B_1(1 - s_1))(A_1 + B_1(1 - \tilde{s}_1))} = \frac{s_1 - \tilde{s}_1}{A_1(1 + t_1 B_1)(1 + \tilde{t}_1 B_1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть утверждение леммы верно при некотором $l < m$. Докажем его справедливость для $l + 1$. По предположению индукции

$$\begin{aligned} F_1(s_1(\dots F_l(s_l F_{l+1}(s_{l+1}))\dots)) - F_1(s_1(\dots F_l(s_l F_{l+1}(\tilde{s}_{l+1}))\dots)) \\ = \frac{s_1 \dots s_{l-1} s_l (F_{l+1}(s_{l+1}) - F_{l+1}(\tilde{s}_{l+1}))}{A_l H_l(t_1, \dots, t_{l-1}, u_l) H_l(t_1, \dots, t_{l-1}, \tilde{u}_l)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$u_l = \frac{1 - s_l F_{l+1}(s_{l+1})}{A_l}, \quad \tilde{u}_l = \frac{1 - s_l F_{l+1}(\tilde{s}_{l+1})}{A_l}.$$

По лемме 3

$$\begin{aligned} u_l &= \frac{1}{A_l} \left(1 - s_l \left(1 - \frac{A_l(1 - s_{l+1})}{A_{l+1} + (B_{l+1} - B_l)(1 - s_{l+1})} \right) \right) \\ &= \frac{1}{A_l} \left(A_l t_l + \frac{(1 - A_l t_l) A_l t_{l+1}}{1 + (B_{l+1} - B_l) t_{l+1}} \right) = \frac{t_l + t_{l+1} + (B_{l+1} - B_l - A_l) t_l t_{l+1}}{1 + (B_{l+1} - B_l) t_{l+1}}. \end{aligned}$$

Подставив найденное значение u_l в $H_l(t_1, \dots, t_{l-1}, u_l)$, получим, что

$$\begin{aligned}
 H_l(t_1, \dots, t_{l-1}, u_l) &= 1 + \sum_{i=1}^{l-1} t_i B_i \\
 &+ \sum_{k=2}^{l-1} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k < l} t_{i_1} \dots t_{i_k} B_{i_1} (B_{i_2} - B_{i_1} - A_{i_1}) \dots (B_{i_k} - B_{i_{k-1}} - A_{i_{k-1}}) + u_l B_l \\
 &+ \sum_{k=2}^l \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k = l} t_{i_1} \dots t_{i_{k-1}} u_l B_{i_1} (B_{i_2} - B_{i_1} - A_{i_1}) \dots (B_l - B_{i_{k-1}} - A_{i_{k-1}}) \\
 &= \frac{Q_{l+1}(t_1, \dots, t_{l+1})}{1 + (B_{l+1} - B_l)t_{l+1}}, \tag{9}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_{l+1}(t_1, \dots, t_{l+1}) &= (1 + (B_{l+1} - B_l)t_{l+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^{l-1} t_i B_i \right. \\
 &+ \sum_{k=2}^{l-1} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k < l} t_{i_1} \dots t_{i_k} B_{i_1} (B_{i_2} - B_{i_1} - A_{i_1}) \dots (B_{i_k} - B_{i_{k-1}} - A_{i_{k-1}}) \Big) \\
 &+ (t_l + t_{l+1} + (B_{l+1} - B_l - A_l)t_l t_{l+1}) \\
 &+ \left(B_l + \sum_{k=2}^l \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k = l} t_{i_1} \dots t_{i_{k-1}} B_{i_1} (B_{i_2} - B_{i_1} - A_{i_1}) \dots (B_l - B_{i_{k-1}} - A_{i_{k-1}}) \right).
 \end{aligned}$$

Покажем, что

$$Q_{l+1}(t_1, \dots, t_{l+1}) = H_{l+1}(t_1, \dots, t_{l+1}). \tag{10}$$

Коэффициенты при $t_{i_1} \dots t_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l$, очевидно, совпадают в левой и в правой частях (10). Коэффициент при $t_{i_1} \dots t_{i_{k-1}} t_{l+1}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} < l$, в левой части (10) равен

$$\begin{aligned}
 &B_{i_1} (B_{i_2} - B_{i_1} - A_{i_1}) \dots (B_{i_{k-1}} - B_{i_{k-2}} - A_{i_{k-2}}) (B_{l+1} - B_l) \\
 &+ B_{i_1} (B_{i_2} - B_{i_1} - A_{i_1}) \dots (B_{i_{k-1}} - B_{i_{k-2}} - A_{i_{k-2}}) (B_l - B_{i_{k-1}} - A_{i_{k-1}}) \\
 &= B_{i_1} (B_{i_2} - B_{i_1} - A_{i_1}) \dots (B_{i_{k-1}} - B_{i_{k-2}} - A_{i_{k-2}}) (B_{l+1} - B_{i_{k-1}} - A_{i_{k-1}}),
 \end{aligned}$$

то есть совпадает с соответствующим коэффициентом в правой части (10). И наконец, коэффициент при $t_{i_1} \dots t_{i_{k-1}} t_l t_{l+1}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} < l$, в левой части (10) равен

$$B_{i_1} (B_{i_2} - B_{i_1} - A_{i_1}) \dots (B_l - B_{i_{k-1}} - A_{i_{k-1}}) (B_{l+1} - B_l - A_l),$$

то есть совпадает с соответствующим коэффициентом в правой части (10). Итак, соотношение (10) доказано. Из соотношений (9) и (10) следует, что

$$H_l(t_1, \dots, t_{l-1}, u_l) = \frac{H_{l+1}(t_1, \dots, t_l, t_{l+1})}{1 + (B_{l+1} - B_l)t_{l+1}}. \tag{11}$$

Аналогично показывается, что

$$H_l(t_1, \dots, t_{l-1}, \tilde{u}_l) = \frac{H_{l+1}(t_1, \dots, t_l, \tilde{t}_{l+1})}{1 + (B_{l+1} - B_l)\tilde{t}_{l+1}}. \quad (12)$$

Так же, как соотношение (7), устанавливается, что

$$F_{l+1}(s_{l+1}) - F_{l+1}(\tilde{s}_{l+1}) = \frac{A_l(s_{l+1} - \tilde{s}_{l+1})}{A_{l+1}(1 + (B_{l+1} - B_l)t_{l+1})(1 + (B_{l+1} - B_l)\tilde{t}_{l+1})}. \quad (13)$$

Из соотношений (8), (11)–(13) вытекает, что

$$\begin{aligned} F_1(s_1(\dots F_l(s_l F_{l+1}(s_{l+1})) \dots)) - F_1(s_1(\dots F_l(s_l(F_{l+1}(\tilde{s}_{l+1}))) \dots)) \\ = \frac{s_1 \dots s_l(s_{l+1} - \tilde{s}_{l+1})}{A_{l+1}H_{l+1}(t_1, \dots, t_l, t_{l+1})H_{l+1}(t_1, \dots, t_l, \tilde{t}_{l+1})}. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbb{N}$, дробно-линейны, то при всех $s_1, \dots, s_m \in [-1, 1]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(s_1^{\xi_{[nt_1]}} \dots s_{m-1}^{\xi_{[nt_{m-1}]}} s_m^{\xi_{[nt_m]}}; T > n) \\ = \mathbf{M} \frac{s_1 \dots s_{m-1} s_m (1 - q_m)}{A_m H_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m) H_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m / (A + B - B_m))}, \end{aligned}$$

где $H_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m)$ задается формулой (6),

$$t_i = (1 - s_i)/A_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad q_m = 1 - A_m/(A + B - B_m).$$

Доказательство. Полагая $\tilde{s}_m = s_m q_m$, из лемм 2 и 4 получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\pi(s_1^{\xi_{[nt_1]}} \dots s_{m-1}^{\xi_{[nt_{m-1}]}} s_m^{\xi_{[nt_m]}}; T > n) \\ = \frac{s_1 \dots s_{m-1} s_m (1 - q_m)}{A_m H_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m) H_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m (A + B - B_m))}. \end{aligned}$$

Переходя к математическим ожиданиям и учитывая (см. соотношение (5) при $s = 0$, $l = [nt_m]$, $r = n$), что

$$q_m = 1 - \frac{a_{[nt_m]}}{a_n + b_n - b_{[nt_m]}},$$

получаем утверждение леммы 5.

3. Пусть $\{\xi_n\}$ — произвольный ветвящийся процесс в случайной среде. Будем предполагать, что

$$\mathbf{M} \exp X_1 < \infty.$$

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $(\tilde{X}_1, \tilde{\eta}_1)$, $(\tilde{X}_2, \tilde{\eta}_2), \dots$, такую что

$$\mathbf{P}(\tilde{X}_1 \leq x, \tilde{\eta}_1 \leq y) = \frac{1}{\mathbf{M} \exp X_1} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^u d\mathbf{P}(X_1 \leq u, \eta_1 \leq v).$$

Случайное блуждание

$$\tilde{S}_0 = 0, \quad \tilde{S}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i, \quad n \in \mathbf{N},$$

является сопряженным к случайному блужданию $\{S_n\}$. Осуществим переход от последовательности $(\tilde{X}_1, \tilde{\eta}_1), \dots, (\tilde{X}_n, \tilde{\eta}_n)$ к последовательности $(X_1^*, \eta_1^*), \dots, (X_n^*, \eta_n^*)$ с помощью процедур обращения и отражения:

$$X_i^* = -\tilde{X}_{n-i+1}, \quad \eta_i^* = \tilde{\eta}_{n-i+1} e^{\tilde{X}_{n-i+1}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Последовательность

$$S_0^* = 0, \quad S_k^* = \sum_{i=1}^k X_i^*, \quad k = 1, \dots, n,$$

представляет начальный отрезок случайного блуждания. Очевидно,

$$S_k^* = \tilde{S}_{n-k} - \tilde{S}_n, \quad \tilde{S}_k = S_{n-k}^* - S_n^*, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Нетрудно показать, что и для промежуточно докритического, и для строго докритического ветвящихся процессов в случайной среде $\mathbf{M} \exp X_1 < 1$. Заметим, что

$$\mathbf{M} X_1^* = -\mathbf{M} \tilde{X}_1 = -\mathbf{M}(X_1 \exp X_1) / \mathbf{M} \exp X_1 = -\mathbf{M}(f_0'(1) \ln f_0'(1)) / \mathbf{M} f_0'(1).$$

Отсюда следует, что если $\{\xi_n\}$ — промежуточно докритический ветвящийся процесс в случайной среде, то случайное блуждание $\{S_k^*, k = 0, 1, \dots, n\}$ имеет нулевой снос, а если $\{\xi_n\}$ — строго докритический ветвящийся процесс в случайной среде, то случайное блуждание $\{\tilde{S}_k, k \in \mathbf{N}_0\}$ имеет отрицательный снос. Заметим далее, что

$$\mathbf{M}(X_1^*)^2 = \mathbf{M} \tilde{X}_1^2 = \mathbf{M}(X_1^2 \exp X_1) / \mathbf{M} \exp X_1 = (\sigma^*)^2$$

(именно эта σ^* встречается в формулировке теоремы 2). Нам потребуется следующее утверждение, доказательство которого очевидно.

Лемма 6. Пусть g — неслучайная функция, определенная на всем $\mathbf{R}^{2n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M} g(S_1, \eta_1, \dots, S_n, \eta_n) &= (\mathbf{M} \exp X_1)^n \mathbf{M}(e^{-\tilde{S}_n} g(\tilde{S}_1, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{S}_n, \tilde{\eta}_n)) \\ &= (\mathbf{M} \exp X_1)^n \mathbf{M}(e^{S_n^*} g(S_{n-1}^* - S_n^*, \eta_n^* e^{X_n^*}, S_{n-2}^* - S_n^*, \eta_{n-1}^* e^{X_{n-1}^*}, \dots, -S_n^*, \eta_1^* e^{X_1^*})). \end{aligned}$$

Положим при $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k &= e^{-\tilde{S}_k}, \quad \tilde{b}_0 = 0, \quad \tilde{b}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\eta}_{i+1} e^{-\tilde{S}_i}, \\ a_k^* &= e^{-S_k^*}, \quad b_0^* = 0, \quad b_k^* = \sum_{i=0}^{k-1} \eta_{i+1}^* e^{-S_i^*}, \end{aligned}$$

затем при $k = 1, \dots, m$ положим

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= 1, \quad \tilde{B}_0 = 0, \quad \tilde{A}_k = \tilde{a}_{[nt_k]}, \quad \tilde{B}_k = \tilde{b}_{[nt_k]}, \quad k = 1, \dots, m; \\ \tilde{A} &= \tilde{a}_n, \quad \tilde{B} = \tilde{b}_n; \\ A_0^* &= 1, \quad B_0^* = 0, \quad A_k^* = a_{n-[nt_k]}^*, \quad B_k^* = b_n^* - b_{n-[nt_k]}^*, \quad k = 1, \dots, m; \\ A^* &= a_n^*, \quad B^* = b_n^*. \end{aligned}$$

Лемма 7. Пусть g — неслучайная функция, определенная на всем $\mathbf{R}^{2(m+1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M}g(A_1, B_1, \dots, A_m, B_m, A, B) \\ = (\mathbf{M} \exp X_1)^n \mathbf{M}(\tilde{A}g(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{A}_m, \tilde{B}_m, \tilde{A}, \tilde{B})) \\ = (\mathbf{M} \exp X_1)^n \mathbf{M}\left(\frac{1}{A^*} g\left(\frac{A_1^*}{A^*}, \frac{B_1^*}{A^*}, \dots, \frac{A_m^*}{A^*}, \frac{B_m^*}{A^*}, \frac{1}{A^*}, \frac{B^*}{A^*}\right)\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство сразу следует из леммы 6. Чтобы получить второе равенство, заметим, что при $k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &= \tilde{a}_{[nt_k]} = e^{-\tilde{S}_{[nt_k]}} = e^{S_n^* - S_{n-[nt_k]}^*} = \frac{a_{n-[nt_k]}^*}{a_n^*} = \frac{A_k^*}{A^*}, \\ \tilde{B}_k &= \tilde{b}_{[nt_k]} = \sum_{i=0}^{[nt_k]-1} \tilde{\eta}_{i+1} e^{-\tilde{S}_i} = \sum_{i=0}^{[nt_k]-1} \eta_{n-i}^* e^{X_{n-i}^*} e^{S_n^* - S_{n-i}^*} \\ &= e^{S_n^*} \sum_{i=0}^{[nt_k]-1} \eta_{n-i}^* e^{-S_{n-i-1}^*} = e^{S_n^*} \sum_{i=n-[nt_k]}^{n-1} \eta_{i+1}^* e^{-S_i^*} \\ &= \frac{b_n^* - b_{n-[nt_k]}^*}{a_n^*} = \frac{B_k^*}{A^*}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$\tilde{A} = \frac{1}{A^*}, \quad \tilde{B} = \frac{B^*}{A^*}.$$

Лемма 7 доказана.

4. В этом пункте предполагаем, что $\{\xi_n\}$ — промежуточно докритический ветвящийся процесс в случайной среде, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Удобно считать, что случайное блуждание $\{S_k^*\}$ задано при всех $k \in \mathbf{N}_0$. Пусть $\tau_0^*, \tau_1^*, \tau_2^*, \dots$ — строгие нижние лестничные моменты для блуждания $\{S_k^*\}$, то есть

$$\tau_0^* = 0, \quad \tau_1^* = \inf\{n: S_n^* < 0\}, \quad \tau_2^* = \inf\{n > \tau_1^*: S_n^* < S_{\tau_1^*}^*\}, \dots$$

По условию теоремы 1

$$\mathbf{M}X_1^* = 0, \quad 0 < \mathbf{M}(X_1^*)^2 = (\sigma^*)^2 < \infty. \quad (14)$$

Отсюда следует (см. [5] и [1]), что при всех $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*) \sim \frac{c_1^*}{\sqrt{n}}, \quad (15)$$

где c_1^* — положительная постоянная, и

$$\{S_{[nt]}^*/(\sigma^* \sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*\} \xrightarrow{\mathscr{D}} \{W^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (16)$$

где знак $\xrightarrow{\mathscr{D}}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода. По условию теоремы 1 существуют такие положительные постоянные M_1 и M_2 , что

$$M_1 \leq \eta_1 \exp X_1 \leq M_2 \text{ п.н.} \Rightarrow M_1 \leq \tilde{\eta}_1 \exp \tilde{X}_1 \leq M_2 \text{ п.н.}$$

Но это означает, что

$$M_1 \leq \eta_1^* \leq M_2 \text{ п.н.} \quad (17)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\mathbf{M}\eta_1^* < \infty, \quad \mathbf{M}|X_1^*\eta_1^*| < \infty. \quad (18)$$

Поскольку выполнены условия (14) и (18), то (см. [6]) при всех $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{b_{[nt]}^*, t \in (0, 1] \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*\} \Rightarrow \nu_j^*, \quad (19)$$

где ν_j^* не зависит от t и $\nu_j^* > 0$ п.н., причем процессы

$$\begin{aligned} &\{b_{[nt]}^*, t \in (0, 1] \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*\}, \\ &\{S_{[nt]}^*/(\sigma^*\sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*\} \end{aligned}$$

асимптотически независимы при $n \rightarrow \infty$ в смысле конечномерных распределений.

Лемма 8. В условиях теоремы 1 при всех $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{1}{\sigma^*\sqrt{n}} \ln \frac{B_1^*}{A_1^*}, \dots, \frac{1}{\sigma^*\sqrt{n}} \ln \frac{B_m^*}{A_m^*} \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^* \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^*(t_1), \dots, W^*(t_m)\}.$$

Доказательство. По определению при $k = 1, \dots, m$

$$B_k^* = b_n^* - b_{n-[nt_k]}^* = \sum_{i=n-[nt_k]}^{n-1} \eta_{i+1}^* e^{-S_i^*}, \quad A_k^* = a_{n-[nt_k]}^* = e^{-S_{n-[nt_k]}^*},$$

поэтому

$$M_1 \exp \left(\max_{i \in [n-[nt_k], n)} (-S_i^*) \right) \leq B_k^* \leq n M_2 \exp \left(\max_{i \in [n-[nt_k], n)} (-S_i^*) \right)$$

и, следовательно,

$$\ln M_1 + \max_{i \in [n-[nt_k], n)} (S_{n-[nt_k]}^* - S_i^*) \leq \ln \frac{B_k^*}{A_k^*} \leq \ln(n M_2) + \max_{i \in [n-[nt_k], n)} (S_{n-[nt_k]}^* - S_i^*).$$

После деления на $\sigma^*\sqrt{n}$ и перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$, учитывая (16), получаем утверждение леммы 8.

В следующей лемме находятся одномерные распределения процесса $\{W^*(t)\}$.

Лемма 9. При $t \in (0, 1)$ случайная величина $W^*(t)$ положительна, причем при $x \in [0, \infty)$

$$\mathbf{P}(W^*(t) \leq x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} \exp \left(-\frac{u^2}{2t(1-t)} \right) du.$$

Доказательство. Зафиксируем $t \in (0, 1)$ и $x \in [0, \infty)$. Положим

$$F(x) = \mathbf{P}(W^*(t) \leq x).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\max_{i \in [n - [nt], n)} (-S_i^* + S_{n - [nt]}^*) / (\sigma^* \sqrt{n}) \leq x \mid \tau_1^* > n \right) \\ &= \frac{\mathbf{P}(\tau_1^* > n - [nt])}{\mathbf{P}(\tau_1^* > n)} \int_0^\infty \mathbf{P} \left(\max_{i \in [0, [nt]]} (-S_i^*) / (\sigma^* \sqrt{n}) \leq \min(x, y) \right) d_y \mathbf{P}(S_{n - [nt]}^* / (\sigma^* \sqrt{n}) \\ & \leq y \mid \tau_1^* > n - [nt]). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, в силу соотношений (15), (16) и теоремы Донскера находим, что

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-t}} \int_0^\infty \mathbf{P} \left(\sup_{s \in [0, 1]} W(s) \leq \frac{\min(x, y)}{\sqrt{t}} \right) d_y \mathbf{P} \left(W^+(1) \leq \frac{y}{\sqrt{1-t}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t}} \mathbf{P} \left(W^+(1) \geq \frac{x}{\sqrt{1-t}} \right) \mathbf{P} \left(\sup_{s \in [0, 1]} W(s) \leq \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{1-t}} \int_0^x \mathbf{P} \left(\sup_{s \in [0, 1]} W(s) \leq \frac{y}{\sqrt{t}} \right) d_y \mathbf{P} \left(W^+(1) \leq \frac{y}{\sqrt{1-t}} \right). \end{aligned}$$

Откуда, учитывая, что плотность распределения случайной величины $W^+(1)$ равна (см., например, [7]) $x \exp(-x^2/2)$, $x \in [0, \infty)$, а плотность распределения $\sup_{s \in [0, 1]} W(s)$ равна (см., например, [8]) $(2/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2)$, $x \in [0, \infty)$, получаем, что

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-t}} \mathbf{P} \left(W^+(1) \geq \frac{x}{\sqrt{1-t}} \right) \left(\mathbf{P} \left(\sup_{s \in [0, 1]} W(s) \leq \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right)'_x \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp \left(-\frac{x^2}{2(1-t)} \right) \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{x^2}{2t} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} \exp \left(-\frac{x^2}{2t(1-t)} \right). \end{aligned}$$

Лемма 9 доказана.

Положим

$$\Psi_k^* = \min_{t \in [1 - t_k, 1 - t_{k-1}]} \frac{S_{[nt]}^*}{\sigma^* \sqrt{n}}, \quad k = 1, \dots, m; \quad \Psi_{k,l}^* = \min_{k < i \leq l} \Psi_i^*. \quad (20)$$

Из соотношения (16) следует, что при всех $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\Psi_1^*, \dots, \Psi_k^* \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\psi_1, \dots, \psi_m\}, \quad (21)$$

где $\psi_1, \dots, \psi_m$ определены в (1).

Лемма 10. В условиях теоремы 1 при всех $j \in \mathbf{N}$,

$$k = 2, \dots, m, \quad 0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m, \quad l = 1, \dots, k, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\left\{ \frac{B_{i_1}^* - B_{i_0}^*}{B_{i_l}^* - B_{i_{l-1}}^*}, \dots, \frac{B_{i_k}^* - B_{i_{k-1}}^*}{B_{i_l}^* - B_{i_{l-1}}^*} \mid D_{j,l,n} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}, \quad (22)$$

где

$$D_{j,l,n} = \left\{ \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \Psi_{i_{l-1}, i_l}^* < \min_{p=1, \dots, k, p \neq l} \Psi_{i_{p-1}, i_p}^* \right\},$$

и единица в правой части (22) стоит на l -м месте.

Доказательство. Из вида правой части (22) следует, что достаточно установить покомпонентную сходимость по распределению. Покажем, например, что при $l \neq 2$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{B_{i_2}^* - B_{i_1}^*}{B_{i_l}^* - B_{i_{l-1}}^*} \mid D_{j,l,n} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0.$$

Так как $B_{i_p}^* \geq B_{i_{p-1}}^*$, $p = 1, \dots, k$, достаточно показать, что при любом $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\mathbf{P} \left(\frac{B_{i_2}^* - B_{i_1}^*}{B_{i_l}^* - B_{i_{l-1}}^*} \geq \varepsilon \mid D_{j,l,n} \right) = 0. \quad (23)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} B_{i_2}^* - B_{i_1}^* &= b_{n-[nt_{i_1}]}^* - b_{n-[nt_{i_2}]}^* = \sum_{i=n-[nt_{i_2}]}^{n-[nt_{i_1}]-1} \eta_{i+1}^* e^{-S_i^*} \\ &\leq M_2 n \exp \left(- \min_{i \in [n-[nt_{i_2}], n-[nt_{i_1}]]} S_i^* \right), \\ B_{i_l}^* - B_{i_{l-1}}^* &= \sum_{i=n-[nt_{i_l}]}^{n-[nt_{i_{l-1}}]-1} \eta_{i+1}^* e^{-S_i^*} \\ &\geq M_1 \exp \left(- \min_{i \in [n-[nt_{i_l}], n-[nt_{i_{l-1}}]]} S_i^* \right). \end{aligned}$$

Поэтому (см. (20))

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left(\frac{B_{i_2}^* - B_{i_1}^*}{B_{i_l}^* - B_{i_{l-1}}^*} \geq \varepsilon \mid D_{j,l,n} \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left(\frac{M_2 n}{M_1} \exp \left(\min_{i \in [n-[nt_{i_l}], n-[nt_{i_{l-1}}]]} S_i - \min_{i \in [n-[nt_{i_2}], n-[nt_{i_1}]]} S_i \right) > \varepsilon \mid D_{j,l,n} \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\Psi_{i_{l-1}, i_l}^* - \Psi_{i_1, i_2}^* > \frac{1}{\sigma^* \sqrt{n}} \ln \frac{\varepsilon M_1}{M_2 n} \mid D_{j,l,n} \right), \end{aligned}$$

но последняя вероятность в силу (21) стремится при $n \rightarrow \infty$ к вероятности

$$\mathbf{P}(\psi_{i_{l-1}, i_l} - \psi_{i_1, i_2} > 0 \mid \psi_{i_{l-1}, i_l} < \min_{p=1, \dots, k, p \neq l} \psi_{i_{p-1}, i_p}),$$

которая, очевидно, равна 0 (здесь учтено, что $\psi_{i_{l-1}, i_l} \neq \psi_{i_1, i_2}$ п.н.). Отсюда следует соотношение (23). Лемма 10 доказана.

Рассмотрим m различных чисел $d_1, \dots, d_m$. Упорядочим их по возрастанию. Пусть r_i — номер, полученный d_i после проведения этой процедуры. Положим

$$\bar{r}(d_1, \dots, d_m) = (r_1, \dots, r_m)$$

(заметим, что в статистике этот вектор называется ранжировкой). Из соотношения (21) следует, что если $\bar{r}$ — произвольная перестановка чисел $1, \dots, m$, то при всех $j \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r} \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*) = \mathbf{P}(\bar{r}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = \bar{r}). \quad (24)$$

Переформулируем некоторые указанные результаты, рассматривая вместо условия $\{\tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*\}$ условие

$$\{\tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r}\},$$

где $\bar{r}$ — произвольная перестановка чисел $1, \dots, m$. Точно так же, как установлена при $n \rightarrow \infty$ асимптотическая независимость в смысле конечномерных распределений

$$\{b_{[nt]}^*, t \in (0, 1] \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*\}, \quad \left\{ \frac{S_{[nt]}^*}{\sigma^* \sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^* \right\},$$

может быть доказана асимптотическая независимость в смысле конечномерных распределений

$$\{b_{[nt]}^*, t \in (0, 1] \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*\}, \quad \{\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*\}.$$

Отсюда с учетом (19) и (24) получаем, что при фиксированном $t \in (0, 1]$, произвольном $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{b_{[nt]}^* \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \nu_j^*. \quad (25)$$

Далее, поскольку $W^*(t) > 0$ при $t \in (0, 1)$ (см. лемму 9), в силу леммы 8 при всех $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{A_1^*}{B_1^*}, \dots, \frac{A_m^*}{B_m^*} \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^* \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{0, \dots, 0\}.$$

Откуда, учитывая (24), находим, что при всех $j \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{A_1^*}{B_1^*}, \dots, \frac{A_m^*}{B_m^*} \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{0, \dots, 0\}. \quad (26)$$

Наконец, из леммы 10 с учетом (24) получаем, что при всех $j \in \mathbf{N}$, $k = 2, \dots, m$, $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{B_{i_1}^* - B_{i_0}^*}{B_{i_1}^* - B_{i_{l-1}}^*}, \dots, \frac{B_{i_k}^* - B_{i_{k-1}}^*}{B_{i_k}^* - B_{i_{l-1}}^*} \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}, \quad (27)$$

где l определяется соотношением

$$r_{i_{l-1}, i_l} = \min_{1 \leq p \leq k} r_{i_{p-1}, i_p}, \quad r_{k, l} = \min_{k < i \leq l} r_i,$$

и единица в правой части (27) стоит на l -м месте.

Нам потребуется еще одно утверждение (см. [5]): если выполнены условия (14) и (18), то при фиксированном $t \in (0, 1]$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=l}^{\infty} \mathbf{M} \left(\frac{1}{1 + b_{[nt]}^*} \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j \right) = 0. \quad (28)$$

5. Докажем теорему 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — промежуточно докритический ветвящийся процесс в случайной среде. Очевидно, что при $n \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{M}_\pi \xi_n = f'_0(1) \dots f'_{n-1}(1) = e^{S_n} = a_n^{-1},$$

а ввиду соотношения (5)

$$\mathbf{P}_\pi(\xi_n > 0) = \frac{1}{a_n + b_n}.$$

Поэтому

$$m_n = \mathbf{M}_\pi(\xi_n \mid \xi_n > 0) = \frac{\mathbf{M}_\pi \xi_n}{\mathbf{P}_\pi(\xi_n > 0)} = \frac{a_n + b_n}{a_n}$$

и при $i = 1, \dots, m$

$$m_{[nt_i]} = \frac{A_i + B_i}{A_i}.$$

Итак, нас интересует сходимость по распределению при $n \rightarrow \infty$ случайного вектора

$$\left\{ \frac{\xi_{[nt_1]} A_1}{A_1 + B_1}, \dots, \frac{\xi_{[nt_m]} A_m}{A_m + B_m} \mid T > n \right\}.$$

Рассмотрим его преобразование Лапласа

$$\Phi_{t_1, \dots, t_m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \mathbf{M} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_{[nt_i]} A_i / (A_i + B_i) \right) \mid T > n \right],$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, \infty)$. В силу леммы 5

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(T > n) \Phi_{t_1, \dots, t_m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ &= \mathbf{M} \frac{s_1 \dots s_{m-1} s_m (1 - q_m)}{A_m H_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m) H_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m / (A + B - B_m))}, \end{aligned}$$

где $H_m(t_1, \dots, t_m)$ задается формулой (6) и

$$\begin{aligned} s_i &= \exp(-\lambda_i A_i / (A_i + B_i)), \quad t_i = (1 - s_i) / A_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ q_m &= 1 - A_m / (A + B - B_m). \end{aligned}$$

Откуда, используя лемму 7, получаем, что

$$\mathbf{P}(T > n) \Phi_{t_1, \dots, t_m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\mathbf{M} \exp X_1)^n \mathbf{M} G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad (29)$$

где

$$G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \frac{s_1^* \dots s_{m-1}^* s_m^*}{(1 + B^* - B_m^*) H_m^*(t_1^*, \dots, t_{m-1}^*, t_m^*) H_m^*(t_1^*, \dots, t_{m-1}^*, v_m^*)}, \quad (30)$$

и, в свою очередь,

$$\begin{aligned} H_m^*(t_1^*, \dots, t_m^*) &= 1 + \sum_{i=1}^m t_i^* B_i^* + \sum_{k=2}^m \sum_{I_{k,m}} t_{i_1}^* t_{i_2}^* \dots t_{i_k}^* B_{i_1}^* (B_{i_2}^* - B_{i_1}^* - A_{i_1}^*) \dots (B_{i_k}^* - B_{i_{k-1}}^* - A_{i_{k-1}}^*), \\ s_i^* &= \exp\left(\frac{-\lambda_i A_i^*}{A_i^* + B_i^*}\right), \quad t_i^* = \frac{1 - s_i^*}{A_i^*}, \quad v_m^* = t_m^* + s_m^*/(1 + B^* - B_m^*). \end{aligned} \quad (31)$$

Для нахождения асимптотики $\mathbf{M}G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ при $n \rightarrow \infty$ воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} \mathbf{M}G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= \sum_{\bar{r}} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} [G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r}] \\ &\quad \times \mathbf{P}(\tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r}), \end{aligned} \quad (32)$$

где суммирование в первой сумме ведется по всем перестановкам $\bar{r}$ чисел $1, \dots, m$ и еще одному $\bar{r}$, равному, например, $\bar{0} = (0, \dots, 0)$, соответствующему случаю, когда ранги не определены вследствие совпадения некоторых элементов последовательности $\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*$. Используя соотношения (25)–(27), находим, что при всех $j \in \mathbf{N}$, $\bar{r} \neq \bar{0}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{1}{1 + B^* - B_m^*} \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{1}{1 + \nu_j^*}; \quad (33)$$

$$\left\{ \frac{B_m^*}{1 + B^* - B_m^*} \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0; \quad (34)$$

$$\{s_i^* \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 1, \quad i = 1, \dots, m; \quad (35)$$

$$\{t_i^* B_i^* \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (36)$$

а также

$$\left\{ \frac{B_{i_1}^*}{A_{i_1}^* + B_{i_1}^*} \frac{(B_{i_2}^* - B_{i_1}^* - A_{i_1}^*)}{A_{i_2}^* + B_{i_2}^*} \dots \frac{(B_{i_k}^* - B_{i_{k-1}}^* - A_{i_{k-1}}^*)}{A_{i_k}^* + B_{i_k}^*} \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi\{r_{i_0, i_1} > r_{i_1, i_2} > \dots > r_{i_{k-1}, i_k}\}, \quad (37)$$

где $k = 2, \dots, m$, $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$. Заметим, что все левые части соотношений (33)–(37) могут быть объединены в один вектор и для него имеет место сходимость по распределению к соответствующему вектору, составленному из правых частей (33)–(37). Поскольку $G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq 1$ (см. (30), (31)), откуда следует,

что при всех $j \in \mathbf{N}$ и $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m) \neq \bar{0}$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}[G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r}] \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i + \sum_{k=2}^m \sum_{I_{k,m}} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \chi\{r_{i_0, i_1} > r_{i_1, i_2} > \dots > r_{i_{k-1}, i_k}\} \right)^{-2} \mathbf{M} \frac{1}{1 + \nu_j^*}. \end{aligned} \quad (38)$$

Ввиду соотношений (15) и (24) при всех $j \in \mathbf{N}$, $\bar{r} \neq \bar{0}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r}) \sim \frac{c_1^*}{\sqrt{n}} \mathbf{P}(\bar{r}(\psi_1, \dots, \psi_m) = \bar{r}). \quad (39)$$

Поскольку (см. (30), (31))

$$G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \leq \frac{1}{1 + B^* - B_m^*} = \frac{1}{1 + b_{n-[nt_m]}^*},$$

при $k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{r}} \sum_{j=l}^{\infty} \mathbf{M}[G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m); \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*, \bar{r}(\Psi_1^*, \dots, \Psi_m^*) = \bar{r}] \\ & \leq \sum_{j=l}^{\infty} \mathbf{M} \left(\frac{1}{1 + b_{n-[nt_m]}^*}; \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^* \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Из соотношений (28), (32) и (38)–(40) вытекает, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m) & \sim \frac{c_1^*}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{1 + \nu_j^*} \right) \left(\sum_{\bar{r}} \mathbf{P}(\bar{r}(\psi_1, \dots, \psi_m) = \bar{r}) \right. \\ & \times \left. \left(1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i + \sum_{k=2}^m \sum_{I_{k,m}} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} \chi\{r_{i_0, i_1} > r_{i_1, i_2} > \dots > r_{i_{k-1}, i_k}\} \right)^{-2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая определение $h_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ (см. (3)), находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \sim \frac{c_1^*}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{1 + \nu_j^*} \mathbf{M}(h_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m))^{-2}.$$

Следовательно, ввиду (29) при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \Phi_{t_1, \dots, t_m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \sim c_1^* \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{1 + \nu_j^*} \frac{(\mathbf{M} \exp X_1)^n}{\sqrt{n}} \mathbf{M}(h_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m))^{-2}. \quad (41)$$

Полагая $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim c_1^* \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{1 + \nu_j^*} \frac{(\mathbf{M} \exp X_1)^n}{\sqrt{n}}. \quad (42)$$

Из соотношений (41), (42) следует (см. (2)), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_1, \dots, t_m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \varphi_{t_1, \dots, t_m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

Теорема 1 доказана.

6. Теорему 1 можно уточнить, рассматривая вместо условного преобразования Лапласа случайного вектора

$$\{\xi_{[nt_i]} A_i / (A_i + B_i), i = 1, \dots, m\}$$

при условии $\{T > n\}$ условное математическое ожидание

$$\mathbf{M} \left(\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_{[nt_i]} A_i / (A_i + B_i) \right) \chi \{ \bar{r}(\Psi_1, \dots, \Psi_m) = \bar{r} \} \mid T > n \right),$$

где

$$\Psi_k = \min_{t \in [t_{k-1}, t_k]} S_{[nt]}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. В условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$, любых

$$m \in \mathbf{N}, \quad t_1, \dots, t_m \in \mathbf{R}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1,$$

и любой перестановки $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ чисел $1, \dots, m$

$$\{\xi_{[nt_i]}/m_{[nt_i]}^+, i = 1, \dots, m \mid T > n, \bar{r}(\Psi_1, \dots, \Psi_m) = \bar{r}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\mu_3^{(\bar{r})}(t_i), i = 1, \dots, m\},$$

где $\{\mu_3^{(\bar{r})}(t_i), i = 1, \dots, m\}$ — случайный вектор, преобразование Лапласа которого равно

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu_3^{(\bar{r})}(t_i) \right) \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i + \sum_{k=2}^m \sum_{I_{k,m}} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} \chi \{ r_{i_0, i_1} > r_{i_1, i_2} > \dots > r_{i_{k-1}, i_k} \} \right)^{-2} \end{aligned} \quad (43)$$

и

$$r_{k,l} = \min_{k < i \leq l} r_i.$$

Рассмотрим структуру вектора $\{\mu_3^{(\bar{r})}(t_1), \dots, \mu_3^{(\bar{r})}(t_m)\}$. Все его компоненты имеют гамма-распределение с плотностью вероятностей

$$p(x) = x \exp(-x), \quad x \geq 0.$$

Кроме того, справедливы следующие два свойства.

1. Пусть $r_1 = \min(r_1, r_2, \dots, r_l)$ для некоторого $l \leq m$. Тогда

$$\mu_3^{(\bar{r})}(t_1) = \mu_3^{(\bar{r})}(t_2) = \dots = \mu_3^{(\bar{r})}(t_l) \text{ п.н.}$$

В самом деле, преобразование Лапласа случайного вектора

$$\{\mu_3^{(\bar{r})}(t_1), \dots, \mu_3^{(\bar{r})}(t_l)\}$$

равно

$$\left(1 + \sum_{i=1}^l \lambda_i + \sum_{k=2}^l \sum_{I_{k,l}} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} \chi\{r_{i_0, i_1} > r_{i_1, i_2} > \dots > r_{i_{k-1}, i_k}\} \right)^{-2}.$$

Поскольку

$$r_1 < \min(r_2, \dots, r_l),$$

всегда $r_{i_0, i_1} < r_{i_1, i_2}$, но это означает, что вторая сумма равна нулю и преобразование Лапласа поэтому равно

$$\left(1 + \sum_{i=1}^l \lambda_i \right)^{-2},$$

что влечет равенство компонент случайного вектора $\{\mu_3^{(\bar{r})}(t_1), \dots, \mu_3^{(\bar{r})}(t_l)\}$. Это свойство обобщается на случай, когда

$$r_k = \min(r_k, r_{k+1}, \dots, r_l).$$

Тогда

$$\mu_3^{(\bar{r})}(t_k) = \mu_3^{(\bar{r})}(t_{k+1}) = \dots = \mu_3^{(\bar{r})}(t_l)$$

почти наверное.

2. Пусть $r_{l+1} = \min(r_1, r_2, \dots, r_{l+1})$ для некоторого $l < m$. Тогда случайный вектор

$$\{\mu_3^{(\bar{r})}(t_1), \dots, \mu_3^{(\bar{r})}(t_l)\}$$

не зависит от случайного вектора

$$\{\mu_3^{(\bar{r})}(t_{l+1}), \dots, \mu_3^{(\bar{r})}(t_m)\}.$$

Действительно, рассмотрим выражение

$$R_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = 1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i + \sum_{k=2}^m \sum_{I_{k,m}} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} \chi\{r_{i_0, i_1} > r_{i_1, i_2} > \dots > r_{i_{k-1}, i_k}\}. \quad (44)$$

Если в правую часть (44) входит слагаемое $\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$, где

$$0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq l, \quad k = 1, \dots, l,$$

и, кроме того,

$$r_{l, j_1} > r_{j_1, j_2} > \dots > r_{j_{p-1}, j_p},$$

где

$$l < j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq m, \quad p = 1, \dots, m - l,$$

то из соотношения

$$r_{l+1} < \min(r_1, r_2, \dots, r_l)$$

вытекает, что $r_{i_{k-1}, i_k} > r_{l, j_1} = r_{i_k, j_1}$ и поэтому

$$r_{i_0, i_1} > r_{i_1, i_2} > \dots > r_{i_{k-1}, i_k} > r_{i_k, j_1} > r_{j_1, j_2} > \dots > r_{j_{p-1}, j_p},$$

а следовательно, в правую часть (44) входит слагаемое

$$\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_p}.$$

Но это означает, что

$$\begin{aligned} R_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= R_l(\lambda_1, \dots, \lambda_l) + R_l(\lambda_1, \dots, \lambda_l)(R_{m-l}(\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_m) - 1) \\ &= R_l(\lambda_1, \dots, \lambda_l)R_{m-l}(\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_m). \end{aligned} \quad (45)$$

Из соотношений (43)–(45) получаем независимость

$$\{\mu_3^{(\bar{r})}(t_1), \dots, \mu_3^{(\bar{r})}(t_l)\}$$

и

$$\{\mu_3^{(\bar{r})}(t_{l+1}), \dots, \mu_3^{(\bar{r})}(t_m)\}.$$

Из доказанных двух свойств можно сделать следующий вывод. Пусть в последовательности $r_1, \dots, r_m$ минимальные рекордные значения есть

$$r_1, r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_p}.$$

Тогда почти наверное

$$\begin{aligned} \mu_3^{(\bar{r})}(t_1) &= \mu_3^{(\bar{r})}(t_2) = \dots = \mu_3^{(\bar{r})}(t_{j_1-1}), \\ \mu_3^{(\bar{r})}(t_{j_1}) &= \mu_3^{(\bar{r})}(t_{j_1+1}) = \dots = \mu_3^{(\bar{r})}(t_{j_2-1}), \\ &\dots \\ \mu_3^{(\bar{r})}(t_{j_p}) &= \mu_3^{(\bar{r})}(t_{j_p+1}) = \dots = \mu_3^{(\bar{r})}(t_m), \end{aligned}$$

и все эти группы случайных величин не зависят друг от друга. Поэтому преобразование Лапласа случайного вектора $\{\mu_3^{(\bar{r})}(t_1), \dots, \mu_3^{(\bar{r})}(t_m)\}$ равно

$$\frac{1}{(1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{j_1-1})^2} \frac{1}{(1 + \lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_2-1})^2} \dots \frac{1}{(1 + \lambda_{j_p} + \dots + \lambda_m)^2}.$$

Из сказанного следует, что для понимания того, как взаимосвязаны случайные величины $\{\xi_{[nt_i]}/m_{[nt_i]}^+ \mid T > n\}$, $i = 1, \dots, m$, надо знать, как соотносятся между собой отрезки случайного блуждания $\{S_n\}$ от 0 до $[nt_1]$, от $[nt_1]$ до $[nt_2]$ и так далее. До тех пор пока какой-нибудь отрезок случайного блуждания не опустится ниже отрезка от 0 до $[nt_1]$, рассматриваемые случайные величины будут асимптотически равны друг другу. Как только некоторый отрезок случайного блуждания опустится ниже отрезка от 0 до $[nt_1]$, начинается новая серия асимптотически равных случайных величин, но асимптотически независимая от первоначальной серии, и она завершится как только какой-нибудь новый отрезок случайного блуждания опустится ниже всего предыдущего случайного блуждания и так далее.

7. В этом пункте мы докажем теорему 2. Пусть $\{\xi_n\}$ — промежуточно докритический ветвящийся процесс в случайной среде. Сначала изучим сходимость логарифма нормировочного коэффициента в теореме 1 при условии $\{T > n\}$.

Лемма 11. В условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{1}{\sigma^* \sqrt{n}} \ln \frac{a_{[nt]} + b_{[nt]}}{a_{[nt]}}, t \in (0, 1) \mid T > n \right\} \Rightarrow \{W^*(t), t \in (0, 1)\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $m \in \mathbf{N}$, $t_1, \dots, t_m \in \mathbf{R}$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$. По условию теоремы 1

$$\begin{aligned} \ln \min(1, M_1) + \max_{i \in (0, [nt_k]]} (-S_i + S_{[nt_k]}) &\leq \ln \frac{a_{[nt_k]} + b_{[nt_k]}}{a_{[nt_k]}} \\ &\leq \ln(n \max(1, M_2)) + \max_{i \in (0, [nt_k]]} (-S_i + S_{[nt_k]}). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно установить, что для произвольных $x_1, \dots, x_m \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{1}{\sigma^* \sqrt{n}} \max_{i \in (0, [nt_k]]} (-S_i + S_{[nt_k]}) > x_k, k = 1, \dots, m \mid T > n \right) \\ = \mathbf{P}(W^*(t_k) > x_k, k = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (46)$$

Поскольку

$$\mathbf{P}_\pi(\xi_n > 0) = \frac{1}{a_n + b_n},$$

ввиду леммы 6

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{1}{\sigma^* \sqrt{n}} \max_{i \in (0, [nt_k]]} (-S_i + S_{[nt_k]}) > x_k, k = 1, \dots, m \mid T > n \right) \\ = \frac{1}{\mathbf{P}(T > n)} \mathbf{M} \left(\frac{1}{a_n + b_n} \chi \left\{ \max_{i \in (0, [nt_k]]} (-S_i + S_{[nt_k]}) / (\sigma^* \sqrt{n}) > x_k, k = 1, \dots, m \right\} \right) \\ = \frac{(\mathbf{M} \exp X_1)^n}{\mathbf{P}(T > n)} M(n), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$M(n) = \mathbf{M} \left(\frac{1}{1 + b_n^*} \chi \left\{ \max_{i \in [n - [nt_k], n)} (S_i^* - S_{n - [nt_k]}^*) / (\sigma^* \sqrt{n}) > x_k, k = 1, \dots, m \right\} \right).$$

Запишем представление

$$\begin{aligned} M(n) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(\tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*) \\ &\times \mathbf{M} \left(\frac{1}{1 + b_n^*} \chi \left\{ \max_{i \in [n - [nt_k], n)} \frac{S_i^* - S_{n - [nt_k]}^*}{\sigma^* \sqrt{n}} > x_k, k = 1, \dots, m \right\} \mid \tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^* \right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая асимптотическую независимость случайной величины b_n^* и случайного события

$$\left\{ \frac{1}{\sigma^* \sqrt{n}} \max_{i \in [n - [nt_k], n)} (S_i^* - S_{n - [nt_k]}^*) > x_k, k = 1, \dots, m \right\},$$

рассматриваемых при условии $\{\tau_{j-1}^* \leq n < \tau_j^*\}$, и соотношения (15), (16) и (19), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$M(n) \sim \frac{c_1^*}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{1 + \nu_j^*} \mathbf{P}(W^*(t_k) > x_k, k = 1, \dots, n). \quad (48)$$

Из соотношений (42), (47) и (48) следует (46). Лемма 11 доказана.

Лемма 12. В условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_n \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi,$$

где ξ — некоторая положительная случайная величина.

Доказательство. Найдем условную производящую функцию случайной величины ξ_n при условии $\{\xi_n > 0\}$. В силу соотношения (5) при $s \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\pi}(s^{\xi_n}; T > n) &= \mathbf{M}_{\pi} s^{\xi_n} - \mathbf{M}_{\pi}(s^{\xi_n}; T \leq n) \\ &= \left(1 - \frac{(1-s)}{a_n + b_n(1-s)}\right) - \left(1 - \frac{1}{a_n + b_n}\right) \\ &= \frac{a_n s}{(a_n + b_n)(a_n + b_n(1-s))}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}(s^{\xi_n}; T > n) = \mathbf{M} \frac{a_n s}{(a_n + b_n)(a_n + b_n(1-s))}. \quad (49)$$

Откуда, применяя лемму 7, получаем, что

$$\mathbf{M}(s^{\xi_n}; T > n) = (\mathbf{M} \exp X_1)^n \mathbf{M} \frac{s}{(1 + b_n^*)(1 + b_n^*(1-s))}. \quad (50)$$

Стандартным образом (см. доказательство леммы 11) находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M} \frac{s}{(1 + b_n^*)(1 + b_n^*(1-s))} \sim \frac{c_1^*}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{s}{(1 + \nu_j^*)(1 + \nu_j^*(1-s))}. \quad (51)$$

Из соотношений (42), (50) и (51) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(s^{\xi_n} \mid T > n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{s}{(1 + \nu_j^*)(1 + \nu_j^*(1-s))} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{1 + \nu_j^*} \right)^{-1}.$$

Поскольку предел правой части при $s \rightarrow 0$ равен нулю, а при $s \uparrow 1$ равен 1, справедливо утверждение леммы 12.

Из теоремы 1 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \ln \frac{\xi_{[nt]}}{m_{[nt]}^+}, t \in (0, 1) \mid T > n \right\} \Rightarrow \{\ln \mu_3(t), t \in (0, 1)\}.$$

Откуда находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln \xi_{[nt]}}{\sigma^* \sqrt{n}} - \frac{1}{\sigma^* \sqrt{n}} \ln \frac{a_{[nt]} + b_{[nt]}}{a_{[nt]}}, t \in (0, 1) \mid T > n \right\} \Rightarrow 0.$$

Учитывая теперь лемму 11, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln \xi_{[nt]}}{\sigma^* \sqrt{n}}, t \in (0, 1) \mid T > n \right\} \Rightarrow \{W^*(t), t \in (0, 1)\}.$$

Осталось заметить, что $W^*(0) = W^*(1) = 0$ и при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln \xi_0}{\sigma^* \sqrt{n}} \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0, \quad \left\{ \frac{\ln \xi_n}{\sigma^* \sqrt{n}} \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0,$$

причем последнее соотношение является следствием леммы 12. Теорема 2 доказана.

8. Докажем теорему 3. Пусть $\{\xi_n\}$ — строго докритический ветвящийся процесс в случайной среде. В силу лемм 5 и 7

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(s^{\xi_{[nt_1]}} \dots s^{\xi_{[nt_m]}}; T > n) &= (\mathbf{M} \exp X_1)^n \\ &\times \mathbf{M} \frac{\tilde{A}}{\tilde{A} + \tilde{B} - \tilde{B}_m} \frac{s_1 \dots s_m}{\tilde{H}_m(s_1, \dots, s_{m-1}, s_m) \tilde{H}_m(s_1, \dots, s_{m-1}, v_m)}, \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}_m(s_1, \dots, s_m) &= 1 + \sum_{i=1}^m (1 - s_i) \frac{\tilde{B}_i}{\tilde{A}_i} + \sum_{k=2}^m \sum_{I_{k,m}} (1 - s_1) \dots (1 - s_k) \\ &\times \frac{\tilde{B}_{i_1}}{\tilde{A}_{i_1}} \frac{\tilde{B}_{i_2} - \tilde{B}_{i_1} - \tilde{A}_{i_1}}{\tilde{A}_{i_2}} \dots \frac{\tilde{B}_{i_k} - \tilde{B}_{i_{k-1}} - \tilde{A}_{i_{k-1}}}{\tilde{A}_{i_k}}, \\ v_m &= s_m \left(1 - \frac{\tilde{A}_m}{\tilde{A} + \tilde{B} - \tilde{B}_m} \right). \end{aligned}$$

Покажем, что случайные величины

$$\frac{\tilde{B}_1}{\tilde{A}_1}, \frac{\tilde{B}_2 - \tilde{B}_1}{\tilde{A}_2}, \dots, \frac{\tilde{B}_m - \tilde{B}_{m-1}}{\tilde{A}_m}, \frac{\tilde{B} - \tilde{B}_m}{\tilde{A}}$$

независимы и сходятся по распределению к одной и той же случайной величине γ . Очевидно, что

$$\frac{\tilde{B}_k - \tilde{B}_{k-1}}{\tilde{A}_k} = \sum_{i=[nt_{k-1}]}^{[nt_k]-1} \tilde{\eta}_{i+1} e^{\tilde{S}_{[nt_k]} - \tilde{S}_i},$$

откуда, во-первых, следует независимость рассматриваемых случайных величин, а, во-вторых, полагая

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i^{(k)} &= \tilde{X}_{[nt_k]-i+1}, & \tilde{S}_i^{(k)} &= \sum_{j=1}^i \tilde{X}_j^{(k)}, \\ \tilde{\eta}_i^{(k)} &= \tilde{\eta}_{[nt_k]-i+1}, & i &= 1, \dots, [nt_k], \end{aligned}$$

получаем, что

$$\frac{\tilde{B}_k - \tilde{B}_{k-1}}{\tilde{A}_k} = \sum_{i=1}^{[nt_k] - [nt_{k-1}]} \tilde{\eta}_i^{(k)} e^{\tilde{S}_i^{(k)}}.$$

Отсюда видно, что случайная величина $(\tilde{B}_k - \tilde{B}_{k-1})/\tilde{A}_k$ распределена так же, как случайная величина

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^{[nt_k] - [nt_{k-1}]} \tilde{\eta}_i e^{\tilde{S}_i}.$$

Поскольку случайное блуждание $\{\tilde{S}_n\}$ имеет отрицательный снос и по условию теоремы 1 $\mathbf{M}\tilde{\eta}_1 < \infty$, в силу усиленного закона больших чисел ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\eta}_i \exp \tilde{S}_i$$

сходится почти наверное к некоторой случайной величине γ . Итак, доказано, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\tilde{B}_1}{\tilde{A}_1}, \frac{\tilde{B}_2 - \tilde{B}_1}{\tilde{A}_2}, \dots, \frac{\tilde{B}_m - \tilde{B}_{m-1}}{\tilde{A}_m}, \frac{\tilde{B} - \tilde{B}_m}{\tilde{A}} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1}\}, \quad (53)$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1}$ — независимые случайные величины, распределенные, как γ . В частности, при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{A} + \tilde{B} - \tilde{B}_m} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{1}{1 + \gamma}. \quad (54)$$

Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0, \quad \dots, \quad \frac{\tilde{A}_{m-1}}{\tilde{A}_m} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0, \quad \frac{\tilde{A}_m}{\tilde{A}} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0. \quad (55)$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$v_m = s_m \left(1 - \frac{(\tilde{A}_m/\tilde{A})}{1 + (\tilde{B} - \tilde{B}_m)/\tilde{A}} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} s_m. \quad (56)$$

Из соотношений (52) (при $s_1 = s_2 = \dots = s_m = 1$) и (54) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim (\mathbf{M} \exp X_1)^n \mathbf{M} \frac{1}{1 + \gamma}. \quad (57)$$

Далее, из соотношений (52)–(56), замечая, что выражение стоящее под знаком второго математического ожидания в правой части (52) не превосходит 1, находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}(s_1^{\xi_{[nt_1]}} \dots s_m^{\xi_{[nt_m]}}; T > n) \sim (\mathbf{M} \exp X_1)^n \mathbf{M} \left[\frac{s_1 \dots s_m}{(1 + \gamma_{m+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^m (1 - s_i) \gamma_i + \sum_{k=2}^m \sum_{I_{k,m}} (1 - s_1) \gamma_1 \dots (1 - s_m) \gamma_m \right)^2} \right]. \quad (58)$$

Но последнее математическое ожидание в силу независимости $\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1}$ равно

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left(\frac{1}{1 + \gamma_{m+1}} \frac{s_1}{(1 + (1 - s_1)\gamma_1)^2} \cdots \frac{s_m}{(1 + (1 - s_m)\gamma_m)^2} \right) \\ = \mathbf{M} \frac{1}{1 + \gamma} \mathbf{M} \frac{s_1}{(1 + (1 - s_1)\gamma)^2} \cdots \mathbf{M} \frac{s_m}{(1 + (1 - s_m)\gamma)^2}. \end{aligned} \quad (59)$$

Из соотношений (57)–(59) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(s_1^{\xi_{[nt_1]}} \dots s_m^{\xi_{[nt_m]}} \mid T > n) = \mathbf{M} \frac{s_1}{(1 + (1 - s_1)\gamma)^2} \cdots \mathbf{M} \frac{s_m}{(1 + (1 - s_m)\gamma)^2},$$

откуда вытекает утверждение теоремы 3.

Замечание 1. В добавление к теореме 3 отметим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_n \mid \xi_n > 0\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta,$$

где ζ — положительная случайная величина, производящая функция которой равна

$$\left(\mathbf{M} \frac{1}{1 + \gamma} \right)^{-1} \mathbf{M} \frac{s}{(1 + \gamma)(1 + \gamma(1 - s))}, \quad s \in [-1, 1],$$

где γ — та же случайная величина, что и рассмотренная при доказательстве теоремы 3. В самом деле, в силу соотношения (49) и леммы 7

$$\mathbf{M}(s^{\xi_n}; \xi_n > 0) = (\mathbf{M} \exp X_1)^n \mathbf{M} \left(s \left(1 + \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \right)^{-1} \left(1 + \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} (1 - s) \right)^{-1} \right).$$

Осталось учесть соотношение (57) и то, что $\tilde{b}_n/\tilde{a}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \gamma$ при $n \rightarrow \infty$

9. Сравним предельные теоремы для критического, умеренно докритического, промежуточно докритического и строго докритического ветвящихся процессов в случайной среде (см. п. 1). На первый взгляд, эти теоремы существенно различаются. Действительно, в них используются различные нормировочные множители для процесса

$$\{\xi_{[nt]}, t \in [0, 1] \mid T > n\}.$$

Но можно показать, что во всех четырех случаях может быть использована одна и та же нормировка $m_{[nt]}^+$ и при этом формулировки теорем сохраняются. Далее, в этих теоремах различаются предельные процессы. Однако это является проявлением некоторой общей закономерности. Чтобы ее объяснить, введем понятие уровня случайной среды на промежутке $[0, t]$:

$$L_n(t) = \inf_{t' \in [0, t]} S_{[nt']}. \quad \cdot$$

Пусть $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ — строгие нижние лестничные моменты для блуждания $\{S_n\}$. При изучении критического и умеренно докритического ветвящихся процессов в случайной среде используется представление

$$\{T > n\} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \{T > n, \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\},$$

причем при любом $j \in \mathbb{N}_0$ отношение

$$\mathbf{P}(T > n, \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) / \mathbf{P}(T > n)$$

имеет конечный положительный предел при $n \rightarrow \infty$. В критическом случае событие $\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$ при $n \rightarrow \infty$ эквивалентно (см. [5]) событию

$$\{\tau_j \leq \varepsilon n, n < \tau_{j+1}\}$$

при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1)$. Но это означает, что уровень среды $L_n(t)$ не меняется при всех $t \in [\varepsilon, 1]$. Именно поэтому предельный процесс для

$$\{\xi_{[nt]} / m_{[nt]}^+ \mid T > n\}$$

имеет постоянные траектории на $[\varepsilon, 1]$. В умеренно докритическом случае событие $\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$ означает (см. [2]), что осуществляется либо событие $\{\tau_j \leq \varepsilon n, n < \tau_{j+1}\}$, либо событие $\{\tau_1 > (1 - \varepsilon)n, n < \tau_{j+1}\}$. Но это означает, что уровень среды не меняется при всех $t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Именно поэтому предельный процесс имеет постоянные траектории на $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

В умеренно докритическом случае при условии $\{T > n\}$ с ненулевой вероятностью возможно падение уровня среды на любом временном отрезке, содержащемся в $(0, 1)$. Из сказанного в п. 6 следует, что падение уровня среды приводит к разрыву предельного процесса, а сохранение уровня среды означает продление участка постоянства этого процесса.

Наконец, в сильно докритическом случае, как нетрудно показать, при условии $\{T > n\}$ падение уровня среды обязательно происходит на любом временном отрезке, содержащемся в $(0, 1)$. Именно поэтому предельный процесс рвется в каждый момент времени.

Список литературы

1. Афанасьев В. И., Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 52–67.
2. Афанасьев В. И., Предельные теоремы для умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1998) **10**, №1, 141–157.
3. Харрис Т. Е., *Теория ветвящихся случайных процессов*. Мир, Москва, 1966.
4. Agresti A., On the extinction times of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Probab.* (1975) **12**, №1, 39–46.
5. Козлов М. В., Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №4, 813–825.
6. Афанасьев В. И., Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1993) **5**, №1, 45–58.
7. Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R., Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion. *Ann. Probab.* (1977) **5**, №1, 117–129.
8. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*. Наука, Москва, 1977.

Статья поступила 20.01.2000.