Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Емец, С. И. Недобачий, Л. Н. Колечкина, Неприводимая система ограничений комбинаторного многогранника в дробно-линейной задаче оптимизации на перестановках, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 1, 110–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:35:04

Неприводимая система ограничений комбинаторного многогранника в дробно-линейной задаче оптимизации на перестановках

© 2001 г. О. А. Емец, С. И. Недобачий, Л. Н. Колечкина

В статье исследуется система линейных ограничений, описывающая область допустимых решений задачи с линейной функцией цели, к которой сводится задача оптимизации на перестановках с дробно-линейной целевой функцией.

В последнее время опубликовано большое количество работ, посвященных исследованию задач комбинаторной оптимизации, в частности, задач на евклидовых комбинаторных множествах с дробно-линейными функциями цели.

Исследования идут как в плане изучения свойств целевых функционалов на комбинаторных множествах, так и в плане выявления и обоснования свойств множеств допустимых решений таких задач, разработке методов их решения [1–14]. Разным аспектам решения этих проблем посвящены работы В. А. Емеличева, М. М. Ковалева и М. К. Кравцова [1], И. В. Сергиенко [2, 3], Ю. Г. Стояна [4–7], Н. З. Шора и Д. И. Соломона [8], С. В. Яковлева [4] и других.

В данной статье исследуется система линейных ограничений, описывающая область допустимых решений задачи с линейной функцией цели, к которой сводится задача на перестановках с дробно-линейной целевой функцией.

Введем необходимые понятия и обозначения. Мультимножеством [5, 6] называется совокупность элементов, среди которых могут быть одинаковые. Мультимножество A можно представить его основанием $S(A)$, множеством всех его разных элементов, с указанием их кратностей, чисел, указывающих количество повторений каждого элемента основания в мультимножестве. Множество первых k натуральных чисел обозначим J_k .

Пусть дано мультимножество $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ с основанием

$$S(G) = \{e_1, \dots, e_n\},$$

где $e_j \in \mathbb{R}^1$, $j \in J_n$, $n \leq k$. Обозначим $K(e_j)$ кратность элемента e_j мультимножества G и пусть $K(e_j) = \eta_j$, $j \in J_n$. Будем считать, что для элементов мультимножества G и его основания $S(G)$ выполняются соотношения

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_k, \quad (1)$$

$$0 \leq e_1 < e_2 < \dots < e_n. \quad (2)$$

Упорядоченные k -выборки из мультимножества G , то есть такие, которые отличаются между собой только порядком следования элементов, образуют общее множество перестановок (множество перестановок с повторениями) $E_{kn}(G)$ (см. [4, 5]). Будем рассматривать его элементы как точки пространства $\mathbf{R}^k$. Известно [4, 5], что выпуклая оболочка множества $E_{kn}(G)$ — общий перестановочный многогранник $\Pi_{kn}(G)$, который определяется системой ограничений

$$\sum_{j=1}^k x_j \leq \sum_{j=1}^k g_j, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^i x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^i g_j, \quad (4)$$

где $\alpha_j \in J_k$, $\alpha_j \neq \alpha_t$, $j \neq t$, $j, t \in J_i$, $i \in J_k$.

Обозначим $\text{vert } M$ множество вершин многогранника M . Имеет место соотношение [4, 5]

$$\text{vert } \Pi_{kn}(G) = E_{kn}(G).$$

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n) \in E_{kn} \subset \mathbf{R}^k$. Рассмотрим следующую задачу: найти

$$F(X^*) = \text{extr}_{x \in E_{kn}(G)} F(x), \quad (5)$$

$$X^* = \arg \text{extr}_{x \in E_{kn}(G)} F(x), \quad (6)$$

где

$$F(X) = \sum_{j=1}^k c_j x_j / \sum_{j=1}^k d_j x_j, \quad c_j \in \mathbf{R}^1, \quad d_j \in \mathbf{R}^1, \quad d_j \geq 0, \quad j \in J_k,$$

и существует такое j , что $x_j \neq 0$, $d_j \neq 0$.

От задачи (5), (6) перейдем к задаче с линейной функцией цели. Положим

$$y_0 = \left(\sum_{j=1}^k d_j x_j \right)^{-1}, \quad y_j = x_j y_0, \quad j \in J_k. \quad (7)$$

Отметим, что $y_0 > 0$, $y_j \geq 0$, $j \in J_k$, и существует такое j , что $y_j \neq 0$. Соотношения (7) определяют некоторое отображение

$$\psi(x) = y,$$

где $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_k) \in \mathbf{R}^{k+1}$. Пусть $\psi(E_{kn}(G)) = E \subset \mathbf{R}^{k+1}$. При этом задача (5), (6) сводится к задаче: найти

$$F(x^*) = \Phi(y^*) = \text{extr}_{y \in E} \Phi(y), \quad (8)$$

$$y^* = \arg \text{extr}_{y \in E} \Phi(y), \quad (9)$$

где

$$\Phi(y) = \sum_{j=1}^k c_j y_j.$$

Рассмотрим образ множества $P_{kn}(G)$ при отображении ψ . Из соотношений (7) и системы (3), (4) следует, что

$$\sum_{j=1}^k y_j \leq \sum_{j=1}^k g_j y_0, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^i y_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^i g_j y_0, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^k d_j y_j = 1, \quad (12)$$

где $y_0 > 0$, $y_j \geq 0$, $\alpha_j \in J_k$, $\alpha_j \neq \alpha_t$, $j \neq t$, $j, t \in J_i$, $i \in J_k$.

Множество, заданное системой (10)–(12), обозначим $Q_{kn}(G)$. Ясно, что $Q_{kn}(G) \subset \mathbf{R}^{k+1}$. Система (10), (11) определяет выпуклый многогранный конус с вершиной в точке $(0, \dots, 0)$ (см. [1], стр. 17), а (12) — гиперплоскость, которая пересекает конус и не проходит через его вершину. Следовательно, $Q_{kn}(G)$ есть основание пирамиды [1, 14].

Установим неприводимую систему ограничений многогранника $Q_{kn}(G)$ и определим уравнения всех его гиперграней. Это даст возможность применить для решения задачи (8), (9) метод отсечений [12].

Следуя [5, 6], введем понятия i -го союза неравенств системы (10)–(12) и характеристической точки $(k-2)$ -плоскости, ограничивающей многогранник $Q_{kn}(G)$.

Определение 1. Совокупность неравенств (11), имеющих одинаковое значение величины i называется i -м союзом неравенств системы (10)–(12), а неравенство (10) — неравенством нулевого союза.

Определение 2. Точка $y' = (y'_0, y'_1, \dots, y'_k)$ называется характеристической, относительно основания $Q_{kn}(G)$ пирамиды, точкой $(k-2)$ -плоскости, определяемой произвольным неравенством (11), если ее координаты удовлетворяют соотношениям

$$y'_0 = \left(\sum_{j=1}^i d_{\alpha_j} \left(\frac{g_1 + g_2 + \dots + g_i}{i} \right) + \sum_{j=i+1}^k d_{\alpha_j} \left(\frac{g_{i+1} + g_{i+2} + \dots + g_k}{k-i} \right) \right)^{-1},$$

$$y'_{\alpha_1} = y'_{\alpha_2} = \dots = y'_{\alpha_i} = \frac{g_1 + g_2 + \dots + g_i}{i} y'_0,$$

$$y'_{\alpha_{i+1}} = y'_{\alpha_{i+2}} = \dots = y'_{\alpha_k} = \frac{g_{i+1} + g_{i+2} + \dots + g_k}{k-i} y'_0,$$

где $\alpha_j \in J_k$, $\alpha_j \neq \alpha_t$, $j \neq t$, $j, t \in J_i$, $i \in J_k$.

Покажем, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. Если многогранник $Q_{kn}(G)$ порождается мультимножеством G и $K(e_1) = \eta_1 > 1$ или $K(e_n) = \eta_n > 1$, где $e_1, e_n \in S(G)$, то в системе (10)–(12) избыточными ограничениями являются в первом случае

$$\text{все неравенства союзов } 2, 3, \dots, \eta_1, \quad (13)$$

и во втором случае

$$\text{все неравенства союзов } k - \eta_n, k - \eta_n + 1, \dots, k - 2. \quad (14)$$

Других избыточных ограничений, отличных от указанных, система (10)–(12) не имеет.

Доказательство. Избыточность всех неравенств, входящих в союзы (13), при $\eta_1 > 1$ и в (14) при $\eta_n > 1$ очевидна. Следовательно, надо доказать, что система (10)–(12) не имеет избыточных ограничений, отличных от неравенств союзов (13), (14). В тривиальных случаях, то есть когда $\eta_1 = k - 1$, $\eta_1 = k$, $\eta_n = k - 1$, $k \leq 3$ утверждение справедливо. Действительно, если $\eta_1 = k - 1$, то удалив из системы (10)–(12) неравенства союзов (13), получим систему, состоящую из неравенств союзов 0, 1, k и равенства (12); если $\eta_1 = k$, то после удаления из системы (10)–(12) неравенств союзов (13) эта система будет содержать только неравенства союзов 0, 1 и равенство (12). В каждом из этих случаев неизбыточность оставшихся в системе (10)–(12) ограничений очевидна. Случай, когда $\eta_n = k - 1$, аналогичен случаю, когда $\eta_1 = k - 1$. Случай $k \leq 3$ и при этом $\eta_1 > 1$, или $\eta_n > 1$ сводится к рассмотренным выше.

Таким образом, остается показать, что при условиях

$$\eta_1 < k - 1, \quad \eta_n < k - 1, \quad k > 3, \quad (15)$$

утверждение также справедливо. Доказательство состоит из двух частей. В первой мы покажем, что в характеристической точке $(k - 2)$ -плоскости, определяемой произвольно выбранным неравенством из произвольного союза $m \in J_{k-1}$, отличного от союзов (13), (14), каждое из ограничений системы (10)–(12), за исключением ограничений союзов 0, k , равенства (12) и выбранного неравенства, преобразуются в строгое числовое неравенство. Во второй части покажем, что существует такая точка $\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)$, которая удовлетворяет всем ограничениям системы, кроме выбранного неравенства, то есть исключение из системы выбранного неравенства приводит к изменению многогранника $Q_{kn}(G)$.

Докажем первую часть. Рассмотрим сначала неравенства тех союзов m , для которых выполняется условие

$$\eta_1 < m < k - \eta_n, \quad (16)$$

а затем неравенства союзов 1 и $k - 1$. Выберем произвольное неравенство

$$y'_{\alpha_1} + \dots + y'_{\alpha_m} \geq (g_1 + \dots + g_m)y_0 \quad (17)$$

произвольного союза m , где m удовлетворяет условию (16). Введем обозначение $\omega' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Пусть $y^{(0)} = (y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_k^{(0)})$ — характеристическая точка $(k - 2)$ -плоскости, которая определяется неравенством (17). Положим

$$\frac{g_1 + \dots + g_m}{m} = \alpha, \quad \frac{g_{m+1} + \dots + g_k}{k - m} = \beta,$$

тогда

$$y_0^{(0)} = \left(\alpha \sum_{i=1}^m d_{\alpha_i} + \beta \sum_{j=i+1}^k d_{\alpha_j} \right)^{-1},$$

и, полагая $\alpha_{y_0}^{(0)} = \alpha^y$, $\beta_{y_0}^{(0)} = \beta^y$, получим, что

$$y_{\alpha_1}^{(0)} = \dots = y_{\alpha_m}^{(0)} = \alpha^y, \quad y_{\alpha_{m+1}}^{(0)} = \dots = y_{\alpha_k}^{(0)} = \beta^y.$$

Учитывая (1), (15), (16) и определение характеристической точки находим, что

$$g_1 < \alpha < g_m, \quad (18)$$

$$g_{m+1} < \beta < g_k, \quad (19)$$

$$\alpha < \beta. \quad (20)$$

Следовательно, найдутся такие числа t_1 и t_2 , для которых выполняются соотношения

$$g_1 \leq \dots \leq g_{t_1} < \alpha \leq g_{t_1+1} \leq g_{t_1+2} \leq \dots \leq g_k, \quad (21)$$

$$g_1 \leq \dots \leq g_{t_2} < \beta \leq g_{t_2+1} \leq g_{t_2+2} \leq \dots \leq g_k, \quad (22)$$

причем $1 \leq t_1 < m$, $m+1 \leq t_2 < k$. В точке $y^{(0)}$ неравенство (17) преобразуется в числовое равенство

$$m\alpha_{y_0} = m\alpha^y = (g_1 + g_2 + \dots + g_m)y_0. \quad (23)$$

Покажем, что все неравенства союзов i , $i \in J_{k-1}$, системы (10)–(12) в точке $y^{(0)}$ преобразуются в строгие. Рассмотрим случаи $i = m$, $0 < i < m$, $m < i < k$.

В случае $i = m$, произвольное неравенство союза $i = m$, отличное от неравенства (17), содержит u , $u \in J_m$, переменных y_{α_j} , где $\alpha_j \in J_k \setminus \omega'$, $j \in J_k \setminus J_m$, и поэтому в точке $y^{(0)}$ его левая часть равна

$$u\beta^y + (m - u)\alpha^y = u\beta y_0 + (m - u)\alpha y_0.$$

Учитывая неравенство (20), получим, что

$$u\beta^y + (m - u)\alpha^y = u(\beta^y - \alpha^y) + m\alpha^y = uy^0(\beta - \alpha) + m\alpha y_0 > m\alpha y_0 = (g_1 + \dots + g_m)y_0.$$

Следовательно, каждое из ограничений союза m , за исключением (17), в точке $y^{(0)}$ преобразуется в строгое неравенство.

В случае $0 < i < m$ рассмотрим те неравенства союзов i , которые в левой части содержат только переменные y_{α_j} , где $\alpha_j \in \omega'$. В точке $y^{(0)}$ каждое из них имеет вид

$$i\alpha^y \geq (g_1 + \dots + g_i)y_0$$

или

$$i\alpha y_0 \geq (g_1 + \dots + g_i)y_0.$$

На основании соотношений (18) и (21)

$$i\alpha^y > (g_1 + \dots + g_i)y_0$$

или

$$i\alpha y_0 > (g_1 + \dots + g_i)y_0.$$

Следовательно, все неравенства союзов i , $0 < i < m$, которые содержат только переменные y_{α_j} , где $\alpha_j \in \omega'$ в точке $y^{(0)}$, преобразуются в строгие.

Выберем теперь любое неравенство союза i , $0 < i < m$, то есть такое, которое содержит v , $v \in J_i$, переменных y_{α_j} , где $\alpha_j \in J_k \setminus \omega'$, $j \in J_k \setminus J_m$. Левая часть такого неравенства в точке $y^{(0)}$ имеет вид

$$v\beta^y + (i - v)\alpha^y = v(\beta^y - \alpha^y) + i\alpha^y,$$

или

$$v\beta y_0 + (i - v)\alpha y_0 = v y_0(\beta - \alpha) + i\alpha y_0.$$

Учитывая неравенство (20), получим, что

$$v\beta^y + (i - v)\alpha^y > i\alpha^y \geq (g_1 + \dots + g_i)y_0.$$

Таким образом, все неравенства союзов i , $0 < i < m$, в точке $y^{(0)}$ преобразуются в строгие.

В случае $m < i < k$, как и в предыдущем случае, вначале рассмотрим лишь те неравенства союзов i , которые содержат все переменные y_{α_j} , где $\alpha_j \in \omega'$. В точке $y^{(0)}$ каждое из этих неравенств принимает вид

$$m\alpha^y + (i - m)\beta^y \geq (g_1 + \dots + g_m + g_{m+1} + \dots + g_i)y_0,$$

то есть

$$(m\alpha + (i - m)\beta)y_0 \geq (g_1 + \dots + g_m + g_{m+1} + \dots + g_i)y_0.$$

Если $m < i \leq t_2$, $m < t_2 < k$, то из соотношения (22) следует, что

$$(i - m)\beta^y > (g_{m+1} + g_{m+2} + \dots + g_i)y_0$$

или

$$(i - m)\beta y_0 > (g_{m+1} + g_{m+2} + \dots + g_i)y_0.$$

Учитывая (23), получим, что

$$(m\alpha + (i - m)\beta)y_0 > (g_1 + \dots + g_m + g_{m+1} + \dots + g_i)y_0.$$

Если $t_2 < i < k$, то в этом случае, в силу соотношений (19) и (22), получим неравенство

$$(k - i)\beta^y > (g_{i+1} + g_{i+2} + \dots + g_k)y_0. \quad (24)$$

Рассмотрим равенство

$$(g_1 + \dots + g_i)y_0 = (g_1 + \dots + g_k - (g_{i+1} + g_{i+2} + \dots + g_k))y_0.$$

Поскольку

$$m\alpha^y + (k - m)\beta^y = (g_1 + \dots + g_k)y_0,$$

справедливо равенство

$$(g_1 + \dots + g_i)y_0 = m\alpha^y + (k - m)\beta^y - (g_{i+1} + g_{i+2} + \dots + g_k)y_0.$$

Учитывая неравенство (24), находим, что

$$\begin{aligned} m\alpha^y + (i - m)\beta^y &= m\alpha^y + (k - m)\beta^y - (k - i)\beta^y \\ &> m\alpha^y + (k - m)\beta^y - (g_{i+1} + g_{i+2} + \dots + g_k)y_0 \\ &= (g_1 + \dots + g_n)y_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Следовательно, неравенства союзов i , $m < i < k$, которые содержат все переменные y_{α_j} , где $\alpha_j \in \omega'$, в точке $y^{(0)}$ преобразуются в строгие.

Итак, рассмотрены все возможные случаи и получено, что произвольное неравенство союзов i , где $i \in J_{k-1}$, за исключением неравенства (17), в характеристической точке $y^{(0)}$ $(k-2)$ -плоскости, определяемой неравенством (17) при условии (16), преобразуется в строгое.

Для случаев $m = 1$ или $m = k - 1$ первая часть утверждения доказывается аналогично изложенному выше.

Изложим вторую часть доказательства. Выберем произвольное неравенство

$$y_{\alpha_1} + \dots + y_{\alpha_m} \geq (g_1 + \dots + g_m)y_0 \quad (26)$$

некоторого союза $m \in J_{k-1}$, отличного от союзов (13) и (14), системы (10)–(12). Пусть $y^* = (y_0^*, y_1^*, \dots, y_k^*)$ – характеристическая точка $(k-2)$ -плоскости, определяемая неравенством (26). По доказанному в первой части, в точке y^* все неравенства союзов $i \in J_{k-1}$, за исключением неравенства (26), преобразуются в строгие числовые неравенства. Пусть p – число таких неравенств. Пронумеруем все строгие числовые неравенства и обозначим $X_s^* > G_s^*$ то из них, номер которого равен s . Введем обозначения

$$\frac{g_1 + \dots + g_m}{m} = \alpha^*, \quad \frac{g_{m+1} + g_{m+2} + \dots + g_k}{k - m} = \beta^*.$$

Тогда

$$y_0^* = \left(\alpha^* \sum_{i=1}^m d_{\alpha_j} + \beta^* \sum_{j=i+1}^k d_{\alpha_j} \right)^{-1},$$

$$y_{\alpha_1}^* = y_{\alpha_2}^* = \dots = y_{\alpha_m}^* = \alpha^* y_0^*, \quad y_{\alpha_{m+1}}^* = y_{\alpha_{m+2}}^* = \dots = y_{\alpha_k}^* = \beta^* y_0^*.$$

Понятно, что для любого $s \in J_p$ существует $\varepsilon(s) > 0$ такое, что $x_s^* - \varepsilon(s) > G_s^*$. Возьмем

$$\varepsilon = \min_{s \in J_p} \{\varepsilon(s)\}.$$

Рассмотрим систему (10)–(12) в точке $\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)$, где

$$\bar{y}_j = y_j^* - \varepsilon/m, \quad j \in J_m,$$

$$\bar{y}_j = y_j^* + \varepsilon/(k - m), \quad j \in J_k \setminus J_m,$$

то есть

$$\bar{y}_j = \alpha^* y_0^* - \varepsilon/m, \quad j \in J_m,$$

$$\bar{y}_j = \beta^* y_0^* + \varepsilon/(k - m), \quad j \in J_k \setminus J_m.$$

В этой точке неравенства союзов 0 и k системы (10)–(12) преобразуются в числовые равенства. Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_k &= m(\alpha^* y_0^* - \varepsilon/m) + (k - m)(\beta^* y_0^* + \varepsilon/(k - m)) \\ &= m\alpha^* y_0^* + (k - m)\beta^* y_0^*. \end{aligned}$$

Неравенство (26) не выполняется, поскольку

$$\begin{aligned} y_{\alpha_1} + \dots + y_{\alpha_m} &= m(\alpha^* y_0 - \varepsilon/m) \\ &= m\alpha^* y_0 - \varepsilon < m\alpha^* y_0 \\ &= (g_1 + \dots + g_m)y_0. \end{aligned}$$

Все остальные ограничения системы (10)–(12) в точке $\bar{y}$, в силу выбора ε , выполняются как строгие неравенства. Следовательно, точка y удовлетворяет всем ограничениям системы (10)–(12), за исключением неравенства (26), то есть исключение из этой системы неравенства (26) приводит к изменению многогранника $Q_{kn}(G)$. Следовательно, это неравенство не является избыточным в системе ограничений многогранника $Q_{kn}(G)$.

Из произвольности выбора m -союза, отличного от союзов (13) и (14), и произвольности выбора в этом союзе неравенства (26) следует справедливость второй части теоремы. Теорема доказана.

Таким образом, если $k(e_1) = \eta_1 > 1$ или $k(e_n) = \eta_n > 1$, где $e_1, e_n \in S(G)$, то удалив из системы (10)–(12) все неравенства союзов (13) и (14), как избыточные, и заменив неравенства союзов 0 и k равенством, получим систему

$$\sum_{j=1}^i y_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^i g_j y_0, \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^k y_j = \sum_{j=1}^k g_j y_0, \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^k d_j x_j = 1, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} y_0 > 1, \quad y_j \geq 0, \quad \alpha_j \in J_k, \quad \alpha_j \neq \alpha_t, \quad j \neq t, \quad j, t \in J_i, \\ i \in J_{k-1} \setminus \{2, \dots, \eta_1, k - \eta_n, \dots, k - 2\}. \end{aligned}$$

Так как среди неравенств этой системы избыточных нет и система содержит два жестких ограничения, то по определению 4.3 из [1] она неприводима. Каждое из неравенств (27) в системе с равенствами (28), (29) описывает гипергрань многогранника $Q_{kn}(G)$.

Результаты данной статьи могут быть применены при исследовании некоторых новых свойств многогранника допустимых решений рассматриваемой задачи. Полученная неприводимая система ограничений также может быть использована при разработке методов решения задач оптимизации на перестановках с дробно-линейной целевой функцией и дополнительными линейными ограничениями. В частности, при применении метода отсечения [12] возникает необходимость решать вспомогательные задачи линейного программирования методом последовательного подсоединения ограничений [5], область допустимых решений которого формируется и ограничениями системы (10)–(12). Поэтому использование вместо (10)–(12) неприводимой системы сокращает количество используемых ограничений, что повышает эффективность работы алгоритмов.

Список литературы

1. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, Москва, 1981.
2. Сергиенко И. В., *Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации*. Наукова думка, Киев, 1985.
3. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф., *Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации*. Наукова думка, Киев, 1981.
4. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., *Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования*. Наукова думка, Киев, 1986.
5. Стоян Ю. Г., Емец О. А., *Теория и методы евклидовой комбинаторной оптимизации*. Ин-т систем. исследований образования, Киев, 1993.
6. Стоян Ю. Г., *Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство*. Ин-т проблем машиностроения, Препринт АН УССР, Харьков, 1982, 33 с.
7. Стоян Ю. Г., Емец О. А., О комбинаторных задачах размещения прямоугольников. *Экономика и матем. методы* (1985) **21**, №5, 868–881.
8. Шор Н. З., Соломон Д. И., *Декомпозиционные методы в мелко-линейном программировании*. Штиинца, Кишинев, 1989.
9. Емец О. А., Комбинаторная модель и приближенный метод с априорной оценкой решения оптимизационной задачи размещения разноцветных прямоугольников. *Экономика и матем. методы* (1993) **29**, №2, 294–304.
10. Емец О. А., Об оптимизации линейных и выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок. *Журн. вычисл. математики и матем. физики* (1994) №6, 855–869.
11. Емец О. А., Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями. *Укр. матем. журн.* (1994) **46**, №6, 680–691.
12. Емец О. А., Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации. *Экономика и матем. методы* (1997) **33**, №4, 120–129.
13. Емец О. А., Недобачий С. И., Общий перестановочный многогранник: неприводимая система линейных ограничений и уравнения всех гиперграней. *Научн. вест. Нац. техн. ун-та Украины Киевский политехнический институт* (1998) №1-2, 100–106.
14. Емец О. А., Колечкина Л. Н., Решения оптимизационных задач с мелко-линейной целевой функцией на общем множестве перестановок. *Вестник Госунив. Львовская политехника. Прикладная математика*. (1998) **337**, 317–320.

Статья поступила 03.07.1998.

Переработанный вариант поступил 14.03.2000.