Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Карпов, Остовное дерево с большим числом висячих вершин, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 1, 63–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:33:23

Остовное дерево с большим числом висячих вершин

© 2001 г. Д. В. Карпов

Для связного графа $G(V, E)$, в котором никакие две вершины степени 2 не смежны, доказывается существование остовного дерева, в котором более чем $|V|/5$ вершин являются висячими. Доказательства содержат описание полиномиального алгоритма построения такого остовного дерева. Доказывается, что константу $1/5$ в этой оценке нельзя заменить на большую.

1. Введение

Вопрос о выделении в графе остовного дерева с большим числом висячих вершин представляет значительный интерес. В [1] предложен алгоритм выделения в связном графе дерева с максимально возможным числом висячих вершин. В [1] также доказано, что максимально возможное число висячих вершин в остовном дереве графа $G(V, E)$ равно максимуму по всем связным подграфам $H(U, F)$ графа G числа вершин из $V \setminus U$, смежных хотя бы с одной из вершин множества U . В ряде работ даны оценки снизу максимально возможного числа висячих вершин в остовном дереве, зависящие не только от числа вершин, но и от других характеристик графа. В некоторых случаях эти характеристики достаточно сложно вычислить.

В [2] доказано, что в связном графе $G(V, E)$, степени всех вершин которого не менее трех и не более d , максимально возможное число висячих вершин в остовном дереве более, чем $|V|/(4(d+4))$. В настоящей работе доказано, что в связном графе $G(V, E)$, в котором никакие две вершины степени 2 не смежны, максимально возможное число висячих вершин в остовном дереве более $|V|/5$. Отметим, что никаких дополнительных условий на граф не накладывается (в частности, допускается наличие в нем любого числа вершин степени 1), а необходимость условия несмежности вершин степени 2 для получения оценки максимального числа висячих вершин в остовном дереве только через число вершин графа очевидна. Кроме того, мы докажем, что константу $1/5$ в этой оценке нельзя заменить на большую.

Предлагаемые в настоящей работе доказательства описывают полиномиальный относительно числа вершин графа алгоритм построения остовного дерева, в котором более $1/5$ всех вершин являются висячими. Отметим, что задача нахождения в связном графе остовного дерева с наибольшим числом висячих вершин является NP-полной [3], вследствие чего описанный полиномиальный алгоритм может представлять интерес.

Введем необходимые обозначения. Рассмотрим граф $G(V, E)$. Для $W \subset V$ через $G - W$ мы, как обычно, будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех вершин множества W и всех инцидентных им ребер. Для $F \subseteq E$ через $G - F$ мы будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех ребер множества F (то есть, $G - F = (V, E \setminus F)$).

Для произвольной вершины X графа G через $d_G(X)$ мы будем обозначать степень вершины X в графе G .

Наш метод использует теорию блоков и точек сочленения. Для удобства приведем определения основных понятий и кратко изложим необходимые нам известные факты. Подробнее результаты теории блоков и точек сочленения изложены в главах 3 и 4 в [4] и главе 5 в [5].

2. Расщепление блоков

Определение 1. Точкой сочленения графа G называется любая его вершина, при удалении которой увеличивается число компонент связности.

Двусвязным графом называется непустой связный граф без точек сочленения. Блок графа G — это его максимальный по включению двусвязный подграф.

Определение 2. Точка сочленения X называется граничной вершиной блока B , если она принадлежит B . Обозначим через $\delta(B)$ множество всех граничных вершин блока B . Вершины блока B , не являющиеся точками сочленения, называются внутренними. Обозначим через $I(B)$ множество всех внутренних вершин блока B .

Ребро блока B называется внутренним, если хотя бы один из его концов является внутренней вершиной блока B . Через $R(B)$ обозначим множество всех ребер блока B с концами только во внутренних вершинах.

Таким образом, все вершины блока B делятся на граничные (множество $\delta(B)$) и внутренние (множество $I(B)$). Множество внутренних ребер блока B состоит из ребер, соединяющих вершины из множества $I(B)$ с вершинами из $\delta(B)$, и ребер из $R(B)$.

Определение 3. Блок B называется крайним, если он содержит ровно одну точку сочленения.

Блок называется пустым, если у него нет внутренних вершин (то есть, $I(B) = \emptyset$). В противном случае блок называется непустым.

Блок B называется большим, если число его внутренних вершин больше числа его граничных вершин (то есть, $|I(B)| > |\delta(B)|$).

Для любого связного графа G можно построить дерево блоков и точек сочленения $b(G)$ (см. главу 4, [4]). Вершины $A_1, \dots, A_n$ графа $b(G)$ соответствуют точкам сочленения графа G , а вершины $B_1, \dots, B_m$ графа $b(G)$ соответствуют блокам графа G . Вершины A_i и B_j смежны в графе $b(G)$ тогда и только тогда, когда точка сочленения A_i является граничной вершиной блока B_j . Других ребер в графе $b(G)$ нет. Нетрудно доказать, что граф $b(G)$ является деревом, причем его висячие вершины соответствуют крайним блокам графа G .

Для построения искомого остовного дерева в связном графе G , в котором никакие две вершины степени 2 не смежны, нам необходимо научиться расщеплять большие

блоки. Мы будем строго контролировать возникновение при этом процессе новых вершин степени 2.

Определение 4. Пусть B – непустой блок графа G , а F – множество из некоторых внутренних ребер блока B . Назовем множество F разделяющим (для блока B), если граф $B - F$ не является двусвязным.

Назовем разделяющее множество F внутренних ребер блока B локально разделяющим, если граф $G - F$ связан и для любой вершины $T \in \delta(B)$ выполняется условие $d_{B-F}(T) \geq 2$.

Замечание 1. Пусть B – непустой блок графа G , а F – множество из некоторых внутренних ребер блока B . Тогда, очевидно, связность графа $G - F$ равносильна связности графа $B - F$.

Лемма 1. Для любого блока B графа G выполняются следующие свойства.

- (1) Пусть $F_2 \subset F_1$ – два разделяющих множества блока B , причем $d_{B-F_1}(T) \geq 2$ для любой граничной вершины T блока B , а граф $G - F_2$ связан. Тогда F_2 – локально разделяющее множество блока B .
- (2) Если F – минимальное по включению разделяющее множество блока B , причем $F \subset R(B)$, то множество ребер F является локально разделяющим.

Доказательство. Докажем часть 1. Так как $F_2 \subset F_1$, то

$$d_{B-F_2}(T) \geq d_{B-F_1}(T) \geq 2$$

для любой граничной вершины T блока B , откуда следует утверждение 1.

Докажем часть 2. Поскольку F – минимальное по включению разделяющее множество блока B , то граф $B - F$ связан, и следовательно, также связан граф $G - F$. Из условия $F \subset R(B)$ следует, что

$$d_{B-F}(T) = d_B(T) \geq 2$$

для любой граничной вершины T блока B .

Лемма 2. Пусть $B(V', E')$ – большой блок. Тогда существует локально разделяющее множество ребер $F \subset E'$.

Доказательство. В силу леммы 1, достаточно рассмотреть случай, когда любое минимальное по включению разделяющее множество ребер F содержит ребра, не входящие в $R(B)$. В этом случае граф $H_0 = B - R(B)$ является двусвязным. Пусть в блоке B ровно k граничных вершин. Тогда, так как блок B большой, в нем более чем k внутренних вершин. Далее мы будем строить новые графы, последовательно удаляя ребра из B . При этом, мы будем называть внутренними вершины из $I(B)$, а граничными – вершины из $\delta(B)$.

Рассмотрим граф H_0 . В нем никакие две внутренние вершины не смежны, но из каждой внутренней вершины выходят хотя бы два ребра (иначе граф H_0 не может быть двусвязным). Так как $I(B) > \delta(B)$, существует граничная вершина, из которой выходят хотя бы три ребра к внутренним вершинам. Рассмотрим одну из таких граничных вершин, пусть ребро r_1 соединяет ее со внутренней вершиной.

Рассмотрим граф $H_1 = H_0 - r_1$. Если этот граф двусвязен, то аналогично выберем ребро r_2 и рассмотрим граф $H_2 = H_1 - r_2$. И так далее.

Пусть полученный на n шаге граф H_n не является двусвязным. Тогда в двусвязном графе B существует минимальное по включению разделяющее множество ребер

$$F \subset (\{r_1, \dots, r_n\} \cup R(B)).$$

В силу минимальности множества F граф $G - F$ связан. Отметим, что на каждом шаге построения из выбора ребра r_k следует, что для любой вершины $T \in \delta(B)$ выполнено условие $d_{H_k}(T) \geq 2$. Отсюда следует, что множество ребер F является локально разделяющим.

Лемма 3. Пусть в связном графе $G(V, E)$ никакие две вершины степени 2 не смежны, $B(V', E')$ – большой блок графа G . Тогда существует локально разделяющее множество ребер $F \subset E'$ такое, что в графе $G - F$ никакие две вершины степени 2 не смежны.

Доказательство. По лемме 2 в блоке B существуют локально разделяющие множества ребер $F' \subset E'$. Рассмотрим такое множество ребер F_0 с минимально возможным числом ребер, пусть

$$B_0 = B - F_0, \quad G_0 = G - F_0.$$

Очевидно, новые вершины степени 2 при удалении ребер множества F_0 могли появиться только среди вершин блока B . Однако, любая вершина $T \in \delta(B)$ должна быть смежна хотя бы с одной из вершин вне B (так как точка сочленения входит хотя бы в два блока), и по определению локально разделяющего множества

$$d_{B-F_0}(T) \geq 2.$$

Следовательно, новые вершины степени 2 в графе G_0 могли появиться только среди вершин множества $I(B)$. Значит, если никакие две вершины из $I(B)$, степень которых в графе G_0 равна 2, не смежны в G_0 , то множество ребер F_0 подходит в качестве искомого.

Предположим, что в графе G_0 среди вершин множества $I(B)$ есть пары смежных вершин степени 2. Выберем в графе G_0 пару смежных вершин X и Y таких что

$$d_{G_0}(X) = d_{G_0}(Y) = 2$$

и для вершины X степень $d_G(X)$ минимальна среди всех входящих в такие пары вершин (если вершин минимальной степени несколько, то выберем любую из них). Нетрудно заметить, что множество F_0 должно содержать хотя бы одно ребро с концом в вершине Y (иначе $d_G(Y) = 2$, следовательно, и $d_G(X) = 2$, но вершины X и Y смежны в графе G , что противоречит условию леммы). Рассмотрим множество ребер F_1 , состоящее из всех ребер множества F_0 , имеющих конец в вершине X , и ребра XY . Очевидно, $|F_1| \leq |F_0|$. Так как в графе $B - F_1$ вершина X имеет степень 1, этот граф не двусвязен, следовательно, множество F_1 является разделяющим для блока B . Поскольку ребро XY соединяет две внутренние вершины блока B , для любой вершины $X \in \delta(B)$ выполняются соотношения

$$d_{B-F_1}(X) \geq d_{B-F_0}(X) \geq 2, \quad d_{G-F_1}(X) \geq d_{G-F_0}(X) \geq 3. \quad (1)$$

Из (1) по лемме 1 следует, что любое минимальное по включению разделяющее множество $F'_1 \subseteq F_1$ является локально разделяющим. Поскольку в любом локально разделяющем множестве не меньше ребер, чем в множестве F_0 , то

$$|F'_1| = |F_1| = |F_0|.$$

Таким образом, множество ребер F_1 является минимальным по включению локально разделяющим множеством. Из соотношения $|F_1| = |F_0|$ по построению этих множеств следует, что

$$d_G(X) \leq d_G(Y) \leq 3.$$

Поскольку в графе G никакие две вершины степени 2 не смежны, мы получаем, что

$$d_G(X) \leq 3, \quad d_G(Y) = 3. \quad (2)$$

В силу (1), если в графе $G_1 = G - F_1$ среди вершин $I(B)$ нет смежных вершин степени 2, то в этом графе вообще нет пар смежных вершин степени 2 и множество ребер F_1 нам подходит. Предположим, что в графе G_1 существуют две смежные вершины $Y_1, Y_2 \in I(B)$ такие, что

$$d_{G_1}(Y_1) = d_{G_1}(Y_2) = 2.$$

По построению множества ребер F_1 очевидно, что хотя бы одна из этих двух вершин в графе G смежна с X (иначе в графе G есть две смежные вершины степени 2). Рассмотрим два случая.

В первом случае пусть вершина X смежна в графе G с вершиной Y_1 , но не смежна с Y_2 . Тогда $d_G(Y_2) = d_{G_1}(Y_2) = 2$. Рассмотрим множество ребер $F_2 = \{Y_1 Y_2\}$. Очевидно, F_2 является минимальным по включению разделяющим множеством блока B . Так как $Y_1, Y_2 \in I(B)$, по лемме 1 множество F_2 является локально разделяющим. Если $d_G(X) \geq 3$, то $|F_1| \geq 2 > |F_2|$, что противоречит доказанному выше.

Значит, $d_G(X) = 2$ и $|F_0| = |F_1| = |F_2| = 1$. Однако, в F_1 входят ребра XY и XY_1 , следовательно, вершина Y_1 совпадает с Y . В этом случае вершина Y имеет степень 3 и смежна в графе G с вершинами X и Y_2 (которые имеют степень 2) и еще с одной вершиной Z (см. рис. 1а). При этом

$$F_0 = F_2 = \{Y Y_2\}, \quad F_1 = \{X Y\}$$

— минимальные локально разделяющие множества блока B , которые мы рассматривали выше.

Рассмотрим множество ребер

$$F_3 = \{X Y, Y Y_2\}.$$

Очевидно, F_3 является разделяющим множеством. Так как блок B двусвязен, граф $B - Y$ связан, следовательно, и граф $B - F_3$ связан. Поскольку $F_3 \subset R(B)$, для любой вершины $T \in \delta(B)$ выполняется условие

$$d_{B-F_3}(T) = d_B(T) \geq 2.$$

Таким образом, множество ребер F_3 является локально разделяющим. Осталось заметить, что при удалении из графа G ребер множества F_3 степени изменились только у трех вершин X, Y и Y_2 . Так как

$$d_{B-F_3}(X) = d_{B-F_3}(Y) = d_{B-F_3}(Y_2) = 1,$$

Рис. 1.

все вершины степени 2 в графе $G - F_3$ имеют степень 2 и в графе G . Следовательно, в графе $G - F_3$ нет пар смежных вершин степени 2. Таким образом, множество ребер F_3 подходит в качестве искомого.

Остается рассмотреть второй случай, когда вершина X смежна в графе G с обеими вершинами Y_1 и Y_2 . Так как

$$d_{G_1}(Y_1) = d_{G_1}(Y_2) = 2,$$

в этом случае

$$d_G(Y_1) = d_{G_1}(Y_1) + 1 = 3, \quad d_G(Y_2) = d_{G_1}(Y_2) + 1 = 3.$$

Рассмотрим множество ребер

$$F_2 = \{Y_1Y_2, XY_1\}.$$

Это множество, очевидно, является разделяющим множеством блока B . Так как $F_2 \subset R(B)$, по лемме 1 существует минимальное локально разделяющее множество $F'_2 \subseteq F_2$. Поскольку $F_1 \supset \{XY_1, XY_2\}$ и, как доказано выше, F_1 — минимальное по числу ребер локально разделяющее множество блока B , то F_2 — минимальное по числу ребер локально разделяющее множество блока B и $F_1 = \{XY_1, XY_2\}$. Однако, в множество ребер F_1 по построению также входит ребро XY . Отсюда следует, что вершина Y совпадает с одной из вершин Y_1 или Y_2 (эти два случая аналогичны). Пусть Y совпадает с Y_1 . Учитывая (2), получаем, что X, Y и Y_2 попарно смежны в графе G и все имеют степень 3 (см. рис. 1(b)). При этом

$$F_1 = \{XY, XY_2\}, \quad F_2 = \{XY_2, YY_2\}$$

— минимальные локально разделяющие множества блока B , которые мы рассматривали выше.

Рассмотрим множество ребер

$$F_3 = \{XY, XY_2, YY_2\}.$$

Очевидно, это множество является разделяющим. Докажем, что граф $B - F_3$ связан. Предположим противное, пусть граф $B - F_3$ не связан. Это означает, что одна из вершин X, Y или Y_2 будет отделена в графе $B - F_3$ от двух остальных. Но тогда нетрудно доказать, что эта вершина является точкой сочленения графа B , что противоречит двусвязности B .

Таким образом, граф $B - F_3$ связан. Поскольку $F_3 \subset R(B)$, для любой вершины $T \in \delta(B)$ выполняется условие

$$d_{B-F_3}(T) = d_B(T) \geq 2.$$

Следовательно, множество ребер F_3 является локально разделяющим. Осталось заметить, что при удалении из графа G ребер множества F_3 степени изменились только у трех вершин X, Y и Y_2 . Так как

$$d_{B-F_3}(X) = d_{B-F_3}(Y) = d_{B-F_3}(Y_2) = 1,$$

все вершины степени 2 в графе $G - F_3$ имеют степень 2 и в графе G . Следовательно, в графе $G - F_3$ нет пар смежных вершин степени 2. Таким образом, множество ребер F_3 подходит в качестве искомого.

Мы доказали, что в обоих случаях в блоке B существует множество ребер, удовлетворяющее условию леммы.

Теорема 1. Пусть G — связный граф, в котором никакие две вершины степени 2 не смежны. Тогда существует такое множество F ребер графа G , что $G - F$ — связный граф, у которого нет больших блоков и никакие две вершины степени 2 не смежны.

Заметим, что в графе G допускается наличие вершин степени 1. На вершины степени 1 не накладывается никаких дополнительных условий.

Доказательство. Предположим, что граф G содержит большой блок $B_1(V_1, E_1)$. Тогда по лемме 3 в блоке B_1 существует локально разделяющее множество ребер $F_1 \subset E_1$ такое, что в графе $G_1 = G - F_1$ никакие две вершины степени 2 не смежны. Рассмотрим граф G_1 . По определению локально разделяющего множества граф G_1 связан, причем в нем блок B_1 распадается на несколько меньших блоков. Если в графе G_1 есть большой блок $B_2(V_2, E_2)$, то найдем в нем локально разделяющее множество ребер $F_2 \subset E_2$, и так далее.

Поскольку данный граф G конечен и на каждом шаге мы удаляем хотя бы одно ребро, этот процесс закончится. Очевидно, в результате мы получим связный граф без больших блоков, никакие две вершины степени 2 в котором не смежны. В качестве искомого множества ребер F возьмем все удаленные ребра.

3. Построение остовного дерева

Перейдем к построению в связном графе G , в котором никакие две вершины степени 2 не смежны, остовного дерева, в котором более $1/5$ всех вершин будут висячими.

Определение 5. Множество вершин $W \subset V$ графа G назовем независимым, если никакие две вершины из W не смежны.

Лемма 4. Пусть граф $G(V, E)$ связан, ни одна из вершин множества $W \subset V$ не является точкой сочленения и все эти вершины принадлежат разным блокам. Тогда в графе G существует остовное дерево T , множество висячих вершин которого содержит W .

Доказательство. Очевидно, что после удаления внутренней вершины из одного блока графа G остальные блоки остаются двусвязными. Отсюда следует, что граф $G - W$ связан. Выделим в $G - W$ остовное дерево T . Заметим, что внутренние вершины разных блоков не могут быть смежны, поэтому множество W является независимым. Следовательно, каждая вершина из множества W должна быть смежна хотя бы с одной из вершин множества $V \setminus W$. Значит, все вершины из W можно напрямую присоединить к остовному дереву T графа $G - W$. Таким образом мы построим остовное дерево графа G , множество висячих вершин которого содержит W .

Согласно теореме 1, существует множество ребер F графа G такое, что в графе $\tilde{G} = G - F$ никакие две вершины степени 2 не смежны и у каждого блока B графа $\tilde{G}$ число внутренних вершин не превышает число граничных. Очевидно, что любое остовное дерево T графа $\tilde{G}$ является остовным деревом графа G , поэтому достаточно построить искомого остовное дерево для графа $\tilde{G}$.

Рассмотрим дерево блоков и точек сочленения $b(\tilde{G})$ графа $\tilde{G}$. Отметим в дереве $b(\tilde{G})$ все вершины степени 2, соответствующие точкам сочленения и пустым блокам с двумя граничными вершинами. В дереве $b(\tilde{G})$ могут быть цепочки из последовательно соединенных отмеченных вершин степени 2. Построим дерево $br(\tilde{G})$, заменив каждую такую цепочку на ребро, соединяющее ее концы. Таким образом, в дереве $br(\tilde{G})$ не останется отмеченных вершин, то есть, в дереве $br(\tilde{G})$ все вершины степени 1 и 2 соответствуют непустым блокам.

Теорема 2. *У любого связного графа G , в котором никакие две вершины степени 2 не смежны, существует остовное дерево, в котором более $1/5$ всех вершин являются висячими.*

Доказательство. Рассмотрим подграф $\tilde{G}$ графа G , в котором нет больших блоков и никакие две вершины степени 2 не смежны, и дерево $br(\tilde{G})$. Пусть в этом дереве b вершин, из которых x вершин соответствуют непустым блокам. Тогда мы можем выбрать множество W из x внутренних вершин различных непустых блоков. По лемме 4 существует остовное дерево T графа G , множество висячих вершин которого содержит W .

Оценим через параметры b и x общее число вершин в графе $\tilde{G}$. Обозначим через v суммарное число вершин в непустых блоках графа $\tilde{G}$. Число внутренних вершин в каждом непустом блоке графа $\tilde{G}$ не превосходит числа граничных вершин. Пусть вершина B_i степени b_i дерева $br(\tilde{G})$ соответствует некоторому блоку. Тогда в блоке, соответствующем B_i , ровно b_i граничных вершин, следовательно, всего в этом блоке не более $2b_i$ вершин. Сумма степеней всех вершин дерева $br(\tilde{G})$ равна $2(b-1)$. Однако, $b-x$ из вершин дерева $br(\tilde{G})$ соответствуют пустым блокам и точкам сочленения, входящим не менее, чем в три блока. Учитывая, что степень каждой из этих $b-x$ вершин не менее трех, получаем, что

$$v \leq 2(2(b-1) - 3(b-x)) = 6x - 2b - 4. \quad (3)$$

Обозначим через u число точек сочленения, входящих только в пустые блоки графа $\tilde{G}$. Все такие точки сочленения, которые принадлежат хотя бы трем блокам, являются вершинами дерева $br(\tilde{G})$, и их число, очевидно, не превосходит $b-x$. Кроме того, в графе $\tilde{G}$ могут быть точки сочленения степени 2, входящие только в пустые блоки. Нетрудно заметить, что каждая такая точка сочленения является вершиной степени 2 в графе $\tilde{G}$. Эти точки сочленения исчезли при переходе от дерева блоков

$b(\tilde{G})$ к дереву $br(\tilde{G})$. Однако, каждому ребру дерева $br(\tilde{G})$ соответствует не более одной такой точки сочленения, так как иначе в графе $\tilde{G}$ оказались бы две смежные вершины степени 2. Следовательно, число точек сочленения степени 2, входящих только в пустые блоки графа $\tilde{G}$, не превосходит $b - 1$. Следовательно,

$$u \leq (b - 1) + (b - x) = 2b - x - 1. \quad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) получаем, что

$$|G| \leq v + u = 5x - 5,$$

следовательно,

$$x/|G| > 1/5.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. На основе изложенных выше доказательств можно привести полиномиальный относительно числа вершин графа алгоритм построения остовного дерева, в котором более $1/5$ всех вершин будут висячими. Первым шагом такого алгоритма будет разбиение графа G на блоки, далее следует разбиение каждого большого блока посредством удаления ребер (алгоритм выбора таких ребер в большом блоке описан в доказательствах лемм 2 и 3). Последующее завершение построения тривиально.

Для доказательства точности оценки $1/5$ из теоремы 2 мы приведем пример серии графов, в которых никакие две вершины степени 2 не смежны, а максимально возможное число висячих вершин в остовном дереве может быть сколь угодно близко к $1/5$. Обозначим через B_4 граф из четырех вершин, который получается из полного графа K_4 удалением одного ребра. Две вершины степени 2 в графе B_4 мы назовем концами, а две вершины степени 3 назовем внутренними.

Рассмотрим произвольное дерево T , в котором x висячих вершин, y вершин степени 2 и z вершин степени более двух. Построим граф G_T следующим образом: заменим каждую из y вершин степени 2 в дереве T на блок B_4 (два ребра дерева T будут выходить из двух концов B_4), и на каждом из $x + y + z - 1$ ребер дерева T добавим по вершине степени 2. В полученном графе G_T будет $2x + 5y + 2z - 1$ вершина, причем никакие две вершины степени 2 не будут смежны (так как каждая вершина степени 2 в графе G_T соответствует ребру дерева T). Заметим, что точки сочленения графа не могут быть висячими вершинами ни в каком его остовном дереве. В графе G_T не являются точками сочленения висячие вершины (все они соответствуют висячим вершинам дерева T) и внутренние вершины каждого блока B_4 . Заметим, что удаление обеих внутренних вершин из одного блока B_4 нарушает связность графа G_T , следовательно, обе эти вершины не могут быть висячими в одном остовном дереве графа G_T .

Таким образом, мы доказали, что максимально возможное число висячих вершин в остовном дереве графа G_T не превосходит $x + y$, следовательно, отношение этого числа к числу вершин графа G_T не превосходит $(x + y)/(2x + 5y + 2z - 1)$. Остается заметить, что рассматривая деревья T , у которых почти все вершины имеют степень 2, мы можем сколь угодно приблизить к константе $1/5$ отношение максимально возможного числа висячих вершин в остовном дереве графа G_T к числу вершин графа, что доказывает точность оценки из теоремы 2.

4. Удаление независимого множества без потери связности

В [2] доказано, что в любом графе $G(V, E)$, степени вершин которого не менее 3 и не более d (где $d \geq 6$), существует независимое множество вершин W такое, что

$$|W| > |V|/(4(d+4))$$

и граф $G - W$ связан. Из доказанного выше мы выведем другой результат относительно независимых множеств вершин.

Теорема 3. *Для любого связного графа G , в котором степени всех вершин не превосходят d и никакие две вершины степени 2 не смежны, существует независимое множество вершин W такое, что $|W| > |V|/(5d)$ и граф $G - W$ связан.*

Заметим, что никаких дополнительных ограничений на d в условии теоремы не накладывается. Неравенство из теоремы 3 слабее, чем доказанное в [2], однако, на граф G накладывается существенно более слабое условие.

Доказательство. По теореме 2 в графе G существует остовное дерево T , в котором более $1/5$ всех вершин являются висячими. Пусть $\bar{W}$ — множество всех висячих вершин дерева T . Поскольку каждая вершина из $\bar{W}$ смежна хотя бы с одной вершиной вне $\bar{W}$, любая вершина из $\bar{W}$ смежна не более, чем с $d - 1$ вершинами из $\bar{W}$. Следовательно, существует независимое подмножество $W \subset \bar{W}$, в котором не менее $|\bar{W}|/d > |V|/(5d)$ вершин. Так как W — множество, состоящее из некоторых висячих вершин остовного дерева T , граф $G - W$ связан.

Список литературы

1. Zelinka B., Finding a spanning tree of a graph with maximal number of terminal vertices. *Kybernetika* (1973) **9**, №5, 357 – 360.
2. Карпов Д. В., Удаление вершин из связного графа. *Моделирование и анализ информационных систем* (1999) **6**, 21 – 25.
3. Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. Мир, Москва, 1982.
4. Харари Ф., *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.
5. Оре О., *Теория графов*. Наука, Москва, 1968.

Статья поступила 25.05.2000.

Переработанный вариант поступил 05.02.2001.