Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Куракин, Линейная сложность полилинейных последовательностей, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 1, 3–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:27:38

Линейная сложность полилинейных последовательностей

© 2001 г. В. Л. Куракин

Вводится несколько определений линейной сложности (ранга) полилинейной рекуррентной последовательности над кольцом или модулем. Исследуется эквивалентность этих определений и свойства линейной сложности последовательностей над различными классами колец: полями, телами, коммутативными и коммутативными артиновыми кольцами, левыми областями Оре, областями Безу. Доказывается, что для последовательностей над коммутативными областями Безу, так же, как и для последовательностей над полем, все введенные определения линейной сложности эквивалентны.

1. Введение

Линейной сложностью или рангом линейной рекуррентной последовательности (сокращенно ЛРП или 1-ЛРП) над коммутативным кольцом традиционно называют степень ее минимального многочлена, то есть характеристического многочлена наименьшей степени. При определении линейной сложности полилинейной (или k -линейной) рекуррентной последовательности (сокращенно k -ЛРП) мы сталкиваемся с ситуацией, когда такое определение можно дать многими естественными способами. Получающиеся определения оказываются, в общем случае, не эквивалентными, и выбор того или иного из них диктуется потребностями прикладной задачи и классом колец, над которыми рассматриваются последовательности. В данной статье мы придерживаемся той точки зрения, что все вводимые ниже определения линейной сложности являются одинаково важными и заслуживают изучения.

Более подробно, мы вводим 18 определений линейной сложности последовательности u и обозначаем соответствующие параметры через $r_1(u), \dots, r_{18}(u)$ или просто $r_1, \dots, r_{18}$. Эти определения возникли в результате анализа серии работ А. С. Кузьмина, А. В. Михалева, А. А. Нечаева и автора [6, 16, 17], посвященных изучению линейных рекуррентных последовательностей над кольцами и модулями. Определения можно разбить на группы, характеризующие различные алгебраические и комбинаторные свойства ЛРП u . Для каждой k -последовательности можно рассмотреть ее модуль сдвигов, являющийся подмодулем в модуле всех последовательностей. Первая группа определений характеризует ранг модуля сдвигов ЛРП u . Как и при определении ранга модуля в общей алгебре, под рангом модуля сдвигов понимается либо наименьшее число образующих, либо наибольшее число линейно независимых элементов. Вторая группа определений характеризует возможность реализации последовательности k -линейным регистром сдвига. Несколько параметров можно условно

назвать информационной линейной сложностью. Наконец, одно из определений линейной сложности является обобщением понятия степени минимального многочлена 1-ЛРП на случай k -ЛРП.

Понятие линейной сложности 1-ЛРП над полем использовалось в работах многих авторов (см. литературу в [16]). В основном в этих работах вычислялась или оценивалась линейная сложность различных классов последовательностей и их преобразований, а также исследовался алгоритм Берлекэмпа–Мессии для практического нахождения линейной сложности заданной последовательности (см. [14, 15, 20, 24], а также [8, 9] и литературу в последних двух работах). Линейная сложность k -ЛРП над полем и над кольцом вычетов Z_m рассматривалась в работах Сакаты (см., например, [21, 22, 23]) в связи с многомерным обобщением алгоритма Берлекэмпа–Мессии и построением k -линейных регистров сдвига. Линейная сложность k -ЛРП над коммутативными кольцами и модулями над ними рассматривалась в [6] также в связи с построением k -линейных регистров сдвига. Над некоммутативными кольцами k -линейные регистры сдвига рассматривались в [17].

В большинстве работ понятие линейной сложности играло вспомогательную роль как некоторый числовой параметр, характеризующий изучаемую последовательность или класс последовательностей. Как правило, при этом рассматривалась какая-либо одна линейная сложность последовательности, обычно степень минимального многочлена. Исключение составляет работа [6], в которой введены несколько определений линейной сложности и исследованы соотношения между ними (более подробно работа [6] комментируется далее в тексте). Цель данной статьи — исследовать соотношения между вводимыми ниже определениями линейной сложности и их эквивалентность над различными классами колец и модулей.

Имеющиеся примеры показывают, что большинство из вводимых определений линейной сложности не эквивалентны друг другу. В общем случае удалось доказать эквивалентность лишь двух из 18 определений. Возможно, есть и другие пары эквивалентных определений, но пока это не доказано и не опровергнуто примерами. При различных ограничениях на класс рассматриваемых колец и модулей некоторые из определений становятся эквивалентными. С этой точки зрения в статье рассмотрены классы коммутативных колец, артиновых колец, тел и полей, левых областей Оре, областей Безу. Отметим, что в конце работы приводятся две таблицы, в которых перечислены все полученные результаты и рассмотренные примеры.

Как было известно и ранее, для 1-ЛРП над полем все 18 вводимых ниже определений линейной сложности эквивалентны. Из имеющихся результатов [16] видно, что некоторые определения эквивалентны и для 1-ЛРП над кольцом целых чисел Z . Одной из целей статьи было доказательство эквивалентности максимально возможного числа определений линейной сложности для 1-ЛРП над коммутативными областями главных идеалов. Как оказалось, эквивалентны все 18 определений, причем для 1-ЛРП над более широким классом колец — коммутативными областями Безу. Таким образом, теперь к утверждению работ [10, 11, 17] о том, что теория семейств k -линейных рекуррент над полем наиболее полно переносится на рекурренты над квазифробениусовыми модулями, можно добавить еще одно: теория линейной сложности 1-ЛРП над полем наиболее полно сохраняется для 1-ЛРП над коммутативными областями Безу. В связи с этими двумя утверждениями отметим, что, как легко видеть, области целостности, являющиеся квазифробениусовыми кольцами, это в точности тела (поля в коммутативном случае).

2. Полилинейные рекуррентные последовательности

Пусть M — левый модуль над кольцом R с единицей (в дальнейшем модуль означает левый модуль). Произвольное отображение $u: \mathbf{N}_0 \rightarrow M$, где $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, называется 1-последовательностью (или просто последовательностью) над M . Последовательность $u = (u(0), u(1), \dots)$ называется линейной рекуррентной последовательностью (сокращенно 1-ЛРП или ЛРП), если существуют число $m \geq 1$ и элементы $c_0, c_1, \dots, c_{m-1} \in R$ такие, что

$$u(i+m) = c_{m-1}u(i+m-1) + \dots + c_1u(i+1) + c_0u(i), \quad i \geq 0.$$

Многочлен

$$F(x) = x^m - c_{m-1}x^{m-1} - \dots - c_1x - c_0 \in R[x]$$

называется характеристическим многочленом ЛРП u , а вектор

$$u[0, m-1] = (u(0), \dots, u(m-1)) \in M^m$$

называется ее начальным вектором. Характеристический многочлен наименьшей степени называется минимальным многочленом ЛРП u , а его степень обозначается $\text{rank } u$.

Если $k \geq 1$, то произвольное отображение $u: \mathbf{N}_0^k \rightarrow M$ называется k -последовательностью (или просто последовательностью) над M . Последовательность u называется k -линейной рекуррентной последовательностью (сокращенно k -ЛРП или ЛРП) над модулем M , если существуют унитарные многочлены $F_1(x), \dots, F_k(x)$ из $R[x]$ такие, что для любого $s \in \{1, \dots, k\}$ и для любых $i_1, \dots, i_{s-1}, i_{s+1}, \dots, i_k \in \mathbf{N}_0$ 1-последовательность

$$v(i) = u(i_1, \dots, i_{s-1}, i, i_{s+1}, \dots, i_k)$$

есть 1-ЛРП над M с характеристическим многочленом $F_s(x)$. Многочлены $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$ из кольца $R[x] = R[x_1, \dots, x_k]$ многочленов от k переменных называются элементарными характеристическими многочленами k -ЛРП u . Множество всех k -последовательностей над M обозначается через $M^{(k)}$, множество всех k -ЛРП над M — через $\mathcal{L}_R M^{(k)}$. Множество всех k -ЛРП над M с элементарными характеристическими многочленами $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$ обозначается $L_M(F) = L_M(F_1, \dots, F_k)$.

Для $s = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbf{N}_0^k$ обозначим $x^s = x_1^{s_1} \dots x_k^{s_k}$. Если $u \in M^{(k)}$, то последовательность $v = x^s u \in M^{(k)}$ со знаками $v(i) = u(i+s)$, $i \in \mathbf{N}_0^k$, называется сдвигом последовательности u на вектор s (или на s шагов влево при $k = 1$). Произведение произвольной последовательности u на многочлен

$$F(x) = \sum_{s \in \mathbf{N}_0^k} c_s x^s \in R[x]$$

определяется по линейности:

$$v = F(x)u = \sum_{s \in \mathbf{N}_0^k} c_s x^s u,$$

то есть

$$v(i) = \sum_{s \in \mathbf{N}_0^k} c_s u(i + s), \quad i \in \mathbf{N}_0^k.$$

Относительно этой операции абелева группа $(M^{(k)}, +)$ с естественным (покоординатным) сложением последовательностей превращается в левый $R[x]$ -модуль [16]. Будем говорить, что $F(x)$ аннулирует u , если $F(x)u = 0$. Левый идеал

$$\text{An}(u) = \{F(x) \in R[x] : F(x)u = 0\}$$

кольца $R[x]$ называется аннулятором последовательности u . Левый (правый, двусторонний) идеал I кольца $R[x]$ назовем унитарным, если он содержит многочлены $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$ такие, что $F_s(x)$ — унитарный многочлен от одной переменной, $s = 1, \dots, k$. Такие многочлены будем называть элементарными характеристическими многочленами идеала I . Согласно приведенным определениям, последовательность $u \in M^{(k)}$ есть k -ЛРП тогда и только тогда, когда левый идеал $\text{An}(u)$ унитарен, при этом $u \in L_M(F)$ тогда и только тогда, когда $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k) \in \text{An}(u)$.

Подмодуль

$$R[x]u = \{F(x)u : F(x) \in R[x]\}$$

$R[x]$ -модуля $M^{(k)}$ (то есть циклический подмодуль, порожденный элементом u) называется модулем сдвигов k -последовательности u , а $R[x]$ -модуль $R[x]/\text{An}(u)$ — ее модулем операторов. Если $\text{An}(u)$ — двусторонний идеал в $R[x]$, в частности, если R коммутативно, то $R[x]/\text{An}(u)$ — кольцо, называемое кольцом операторов k -последовательности u . Для произвольного подмножества $\chi \subseteq R[x]$ положим

$$L_M(\chi) = \{u \in M^{(k)} : \chi u = 0\}.$$

Тогда $L_M(\chi)$ является абелевой группой и $L_M(\chi) = L_M(R[x]\chi)$, где $R[x]\chi$ — левый идеал кольца $R[x]$, порожденный множеством χ . Если левый идеал $R[x]\chi$ унитарен, то $L_M(\chi) \subseteq \mathcal{L}_R M^{(k)}$ и абелева группа $L_M(\chi)$ называется ЛРП-семейством. Всякое ЛРП-семейство содержится в ЛРП-семействе вида $L_M(F)$. Если левый идеал $R[x]\chi$ является также правым идеалом (в частности, если кольцо R коммутативно), то $L_M(\chi)$ — левый $R[x]$ -подмодуль в $M^{(k)}$.

На множестве $\mathbf{N}_0^k$ зададим отношения частичного (покоординатного) порядка $\leq$, полагая для $i = (i_1, \dots, i_k)$, $j = (j_1, \dots, j_k) \in \mathbf{N}_0^k$

$$i \leq j \iff i_1 \leq j_1, \dots, i_k \leq j_k,$$

и полного (лексикографического) порядка $\preceq$, полагая $i \preceq j$ если $i = j$ или если в последовательности

$$(j_1 + \dots + j_k) - (i_1 + \dots + i_k), \quad j_1 - i_1, \dots, j_k - i_k$$

первое ненулевое число положительно. Конечное множество $\mathcal{F} \subset \mathbf{N}_0^k$ назовем диаграммой Ферре, если

$$\forall i, j \in \mathbf{N}_0^k (i \in \mathcal{F}, j \leq i) \implies (j \in \mathcal{F}).$$

Пусть $\mathbf{1}_s = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{N}_0^k$, где единица находится на s -м месте, $s = 1, \dots, k$, и $i + \mathcal{F} = \{i + j : j \in \mathcal{F}\}$. Назовем множество

$$\Delta_s \mathcal{F} = (\mathbf{1}_s + \mathcal{F}) \setminus \mathcal{F}$$

(внешней) границей диаграммы Ферре $\mathcal{F}$ в направлении s , а множество

$$\Delta \mathcal{F} = \Delta_1 \mathcal{F} \cup \dots \cup \Delta_k \mathcal{F}$$

(внешней) границей диаграммы Ферре $\mathcal{F}$. Обозначим через $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ векторы из $\mathbf{N}_0^k$, все координаты которых равны 0 и 1 соответственно.

Элементы произвольного конечного подмножества $\Omega = \{i_1, \dots, i_m\} \subset \mathbf{N}_0^k$ можно расположить в виде цепи $i_1 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq i_m$, $m = |\Omega|$ (в данном случае порядок элементов множества Ω несущественен, лишь бы он был фиксированным). Вектор

$$u[\Omega] = (u(i_1), \dots, u(i_m)) \in M^m$$

будем называть диаграммой (или вектором) значений k -последовательности u на множестве Ω . Если u — k -ЛРП с элементарными характеристическими многочленами $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$ степеней $m_1, \dots, m_k$ соответственно, то множество

$$\Pi = \Pi(\mathbf{m}) = \{0, 1, \dots, m_1 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$$

назовем начальным параллелепипедом k -ЛРП u , а $u[\Pi]$ — диаграммой начальных значений (или начальным вектором) k -ЛРП u . Так же, как и элементарные характеристические многочлены, начальный параллелепипед k -ЛРП u определяется не однозначно.

Пусть M^Ω — множество всех отображений $\delta: \Omega \rightarrow M$. Вектор

$$\delta[\Omega] = (\delta(i_1), \dots, \delta(i_m)) \in M^m$$

назовем диаграммой (или вектором) значений отображения δ на множестве Ω . В дальнейшем мы будем отождествлять отображение $\delta \in M^\Omega$ с его вектором значений $\delta[\Omega] \in M^m$ и считать, что $M^\Omega = M^m$.

3. Определения линейной сложности

Пусть u — k -ЛРП над модулем ${}_R M$, $R[x]u$ — ее модуль сдвигов, рассматриваемый ниже как левый R -модуль, Ω и $\mathcal{F}$ — конечное подмножество и диаграмма Ферре в $\mathbf{N}_0^k$, ${}_R(S)$ — левый R -модуль, порожденный множеством S . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} r_1 &= \min\{t \geq 0: R[x]u \text{ порождается } t \text{ элементами}\}, \\ r_2 &= \min\{|\Omega|: R[x]u = {}_R(\mathbf{x}^i u, i \in \Omega)\}, \\ r_3 &= \min\{|\mathcal{F}|: R[x]u = {}_R(\mathbf{x}^i u, i \in \mathcal{F})\}, \\ r_4 &= \max\{t \geq 0: R[x]u \text{ содержит } t \text{ линейно независимых элементов}\}, \\ r_5 &= \max\{|\Omega|: (\mathbf{x}^i u, i \in \Omega) \text{ линейно независимы}\}, \\ r_6 &= \max\{|\mathcal{F}|: (\mathbf{x}^i u, i \in \mathcal{F}) \text{ линейно независимы}\}, \\ r_7 &= \min\{t \geq 0: \exists \text{ мономорфизм } R\text{-модулей } R[x]u \rightarrow M^t\}, \\ r_8 &= \min\{|\Omega|: R[x]u \rightarrow M^\Omega, v \rightarrow v[\Omega] \text{ — мономорфизм}\}, \\ r_9 &= \min\{|\mathcal{F}|: R[x]u \rightarrow M^\mathcal{F}, v \rightarrow v[\mathcal{F}] \text{ — мономорфизм}\}. \end{aligned}$$

Для краткости мы пишем r_i вместо $r_i(u)$. Введенные параметры характеризуют (с алгебраической и комбинаторной точек зрения) ранг модуля сдвигов k -ЛРП u . Для k -ЛРП над полем параметры $r_1, \dots, r_6$ исследовались в [6]. Отображения в определениях $r_7, \dots, r_9$ являются мономорфизмами R -модулей. Множество Ω и диаграмму $\mathcal{F}$ из определений r_8, r_9 можно назвать определяющими множеством и диаграммой Ферре k -ЛРП u . Очевидно,

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3, \quad r_4 \geq r_5 \geq r_6, \quad r_7 \leq r_8 \leq r_9. \quad (1)$$

Здесь и далее запись $r_i \leq r_j$ используется для сокращенной записи того, что $r_i(u) \leq r_j(u)$ для всех u из рассматриваемого класса k -ЛРП (в данном случае для всех k -ЛРП над любым модулем R М). Для произвольного левого R -модуля N положим

$$r_1(N) = \min\{t \geq 0: N \text{ порождается } t \text{ элементами}\},$$

$$r_4(N) = \max\{t \geq 0: N \text{ содержит } t \text{ линейно независимых элементов}\}.$$

Тогда

$$r_1(u) = r_1(R[x]u), \quad r_4(u) = r_4(R[x]u).$$

Справедливы равенства

$$r_1 = \min\{t \geq 0: \exists \text{ эпиморфизм } R^t \rightarrow R[x]u\},$$

$$r_2 = \min\left\{|\Omega|: R^\Omega \rightarrow R[x]u, \delta[\Omega] \rightarrow \sum_{i \in \Omega} \delta(i)x^i u - \text{эпиморфизм}\right\},$$

$$r_3 = \min\left\{|\mathcal{F}|: R^{\mathcal{F}} \rightarrow R[x]u, \delta[\mathcal{F}] \rightarrow \sum_{i \in \mathcal{F}} \delta(i)x^i u - \text{эпиморфизм}\right\},$$

поэтому определения $r_1, \dots, r_3$ и $r_7, \dots, r_9$ можно считать двойственными друг другу.

Множество $\Phi = \{H_r(x): r \in \Delta\mathcal{F}\}$ многочленов из $R[x]$ вида

$$H_r(x) = x^r - \sum_{i \in \mathcal{F}} h_{r,i} x^i$$

назовем полной системой $\mathcal{F}$ -унитарных многочленов. Обозначим через $r_{10} = r_{10}(u)$ наименьшую мощность диаграммы Ферре $\mathcal{F}$, для которой существует полная система $\mathcal{F}$ -унитарных многочленов $\Phi \subset \text{An}(u)$. Зная такую систему многочленов Φ и значения $u[\mathcal{F}]$, можно найти всю ЛРП u , пользуясь рекуррентными соотношениями, задаваемыми многочленами из Φ . Если $k = 1$, то $r_{10}(u)$ есть не что иное, как степень минимального многочлена ЛРП u , то есть при $k = 1$

$$r_{10}(u) = \text{rank } u. \quad (2)$$

Поэтому параметр $r_{10}(u)$ является обобщением понятия степени минимального многочлена 1-ЛРП на случай k -ЛРП при $k \geq 1$. Множества $\mathcal{F}$ -унитарных многочленов и параметр r_{10} рассматривались ранее в [21, 22, 23, 16].

Напомним [17], что пара $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$, где $\chi \subseteq R[x]$, называется k -линейным регистром сдвига (k -ЛРС), если отображение

$$\sigma: L_M(\chi) \rightarrow M^{\mathcal{F}}, \quad v \rightarrow v[\mathcal{F}], \quad (3)$$

биективно (и следовательно, является изоморфизмом абелевых групп, а если R коммутативно, то и R -модулей). Если $u \in L_M(\chi)$, то говорят, что u является выходной последовательностью или выходом k -ЛРС $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$. Следуя [17], положим

$$r_{11} = \min\{|\mathcal{F}|: \exists k\text{-ЛРС } \langle \chi, \mathcal{F} \rangle \text{ с выходом } u\}.$$

В [6] введены два параметра, сходные с r_{11} . Пусть $E = \text{End}(M^{\mathcal{F}})$ — кольцо эндоморфизмов R -модуля $M^{\mathcal{F}} = M^{|\mathcal{F}|}$. Действие эндоморфизма $\varphi: M^{\mathcal{F}} \rightarrow M^{\mathcal{F}}$ на элемент $\delta[\mathcal{F}] \in M^{\mathcal{F}}$ можно записать следующим образом:

$$\varphi(\delta[\mathcal{F}]) = (\varphi_i(\delta[\mathcal{F}]), i \in \mathcal{F}) \in M^{\mathcal{F}}, \quad (4)$$

где $\varphi_i: M^{\mathcal{F}} \rightarrow M$, $i \in \mathcal{F}$, — компоненты эндоморфизма φ (мы пишем действие эндоморфизма φ слева, хотя $M^{\mathcal{F}}$ является правым E -модулем и (R, E) -бимодулем). Эндоморфизм $\varphi \in E$ будем называть скалярным (слева), если все его компоненты — скалярные (слева) гомоморфизмы, то есть

$$\varphi_i(\delta[\mathcal{F}]) = \sum_{j \in \mathcal{F}} c_{ij} \delta(j)$$

для некоторых $c_{ij} \in R$. Множество всех скалярных эндоморфизмов обозначается $\widehat{E} = \widehat{\text{End}}(M^{\mathcal{F}})$. Для $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E$, $i = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbf{N}_0^k$, обозначим

$$\varphi^i = \varphi_1^{i_1} \dots \varphi_k^{i_k}.$$

Положим

$$\begin{aligned} r_{12} &= \min\{|\mathcal{F}|: \exists \text{ попарно перестановочные } \varphi_1, \dots, \varphi_k \in E \\ &\quad \text{такие, что } u[i + \mathcal{F}] = \varphi^i(u[\mathcal{F}]), i \in \mathbf{N}_0^k\}, \\ r_{13} &= \min\{|\mathcal{F}|: \exists \text{ попарно перестановочные } \varphi_1, \dots, \varphi_k \in \widehat{E} \\ &\quad \text{такие, что } u[i + \mathcal{F}] = \varphi^i(u[\mathcal{F}]), i \in \mathbf{N}_0^k\}. \end{aligned}$$

Для эндоморфизмов $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, удовлетворяющих определению r_{12} или r_{13} , выполняется также следующее условие: если диаграмма значений $\delta[\mathcal{F}] \in M^{\mathcal{F}}$ принадлежит множеству

$$\{u[i + \mathcal{F}]: i \in \mathbf{N}_0^k\}, \quad s \in \{1, \dots, k\}, \quad \lambda[\mathcal{F}] = \varphi_s(\delta[\mathcal{F}]),$$

то

$$j \in \mathcal{F}, \quad j + 1_s \in \mathcal{F} \implies \lambda(j) = \delta(j + 1_s).$$

Действительно, если $\delta[\mathcal{F}] = u[i + \mathcal{F}]$, то

$$\lambda[\mathcal{F}] = \varphi_s(u[i + \mathcal{F}]) = u[i + 1_s + \mathcal{F}]$$

и следовательно,

$$\lambda(j) = u(i + 1_s + j) = \delta(j + 1_s)$$

при условии, что $j + 1_s \in \mathcal{F}$. Естественно потребовать, чтобы эндоморфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ удовлетворяли этому условию для всех $\delta[\mathcal{F}] \in M^{\mathcal{F}}$. Следуя [6], попарно перестановочные эндоморфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E$, удовлетворяющие следующему условию: для всех $\delta[\mathcal{F}] \in M^{\mathcal{F}}$, $s \in \{1, \dots, k\}$ и $j \in \mathcal{F}$

$$(j + 1_s \in \mathcal{F}, \lambda[\mathcal{F}] = \varphi_s(\delta[\mathcal{F}])) \implies \lambda(j) = \delta(j + 1_s), \quad (5)$$

назовем $\mathcal{F}$ -ЛРС системой. Если эндоморфизм φ_s записать в виде $\varphi_s = (\varphi_{sj}, j \in \mathcal{F})$, где $\varphi_{sj}: M^{\mathcal{F}} \rightarrow M$ — компоненты φ_s , то из равенства $\lambda[\mathcal{F}] = \varphi_s(\delta[\mathcal{F}])$ следует, что $\lambda(j) = \varphi_{sj}(\delta[\mathcal{F}])$, $j \in \mathcal{F}$, и условие (5) запишется в следующем виде: для всех $\delta[\mathcal{F}] \in M^{\mathcal{F}}$, $s \in \{1, \dots, k\}$ и $j \in \mathcal{F}$

$$(j + 1_s \in \mathcal{F} \implies \varphi_{sj}(\delta[\mathcal{F}]) = \delta(j + 1_s)). \quad (6)$$

Положим

$$\begin{aligned} r_{14} &= \min\{|\mathcal{F}|: \exists \mathcal{F}\text{-ЛРС система } \varphi_1, \dots, \varphi_k \in E \text{ такая,} \\ &\quad \text{что } u[i + \mathcal{F}] = \varphi^i(u[\mathcal{F}]), i \in \mathbb{N}_0^k\}, \\ r_{15} &= \min\{|\mathcal{F}|: \exists \mathcal{F}\text{-ЛРС система } \varphi_1, \dots, \varphi_k \in \widehat{E} \text{ такая,} \\ &\quad \text{что } u[i + \mathcal{F}] = \varphi^i(u[\mathcal{F}]), i \in \mathbb{N}_0^k\}. \end{aligned}$$

В [6] параметры r_{12} и r_{13} названы M -рангом и R -рангом соответственно, поэтому r_{14} и r_{15} можно назвать M -ЛРС-рангом и R -ЛРС-рангом. Очевидно,

$$r_{12} \leq r_{13}, \quad r_{14} \leq r_{15}, \quad r_{12} \leq r_{14}, \quad r_{13} \leq r_{15}. \quad (7)$$

В условиях определений $r_{10}, \dots, r_{15}$ диаграмму Ферре $\mathcal{F}$ можно назвать определяющей диаграммой ЛРП u , поскольку, зная $u[\mathcal{F}]$ (и систему многочленов Φ или эндоморфизмов φ), можно найти все знаки последовательности u . Параметры $r_{11}, \dots, r_{15}$ характеризуют сложность выработки k -ЛРП u линейным регистром сдвига.

Положим

$$\begin{aligned} r_{16} &= \min\{t \geq 0: R[x]u \text{ содержится в } t\text{-порожденном } R\text{-модуле}\}, \\ r_{17} &= \min\{r_1(L_M(I)): u \in L_M(I), I \text{ — унитарный правый идеал в } R[x]\}. \end{aligned}$$

Так как I в определении r_{17} — правый идеал, то $L_M(I)$ — левый R -модуль и обозначение $r_1(L_M(I))$ корректно. При этом условие включения $u \in L_M(I)$ равносильно включению $R[x]u \subseteq L_M(I)$. Параметры r_{16} и r_{17} характеризуют ранг модуля сдвигов ЛРП u . Очевидно,

$$r_1 \geq r_{16}. \quad (8)$$

Если кольцо R конечно, то определим

$$r_{18} = r_{18}(u) = \log_{|R|} |R[x]u|.$$

Этот параметр можно назвать информационной линейной сложностью. Такой же термин, но уже в другом смысле, отчасти применим к $r_7, \dots, r_9$, поскольку эти параметры показывают, по скольким знакам последовательность $v \in R[x]u$ определяется однозначно. При использовании параметра r_{18} подразумевается, что кольцо R конечно, даже если это не указано явно.

Заметим, что для k -ЛРП $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$ параметры

$$r_i(u), \quad i = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 16,$$

всегда конечны. С другой стороны, некоторые параметры, например, r_4 и r_{11} , могут обращаться в ∞ .

Пусть $R \subseteq Q$ — расширение кольца R . Тогда всякую последовательность над R можно рассматривать как последовательность над Q . Будем обозначать через $r_i = r_i(u) = r_i^R(u)$ и $r_i^Q = r_i^Q(u)$, $i = 1, \dots, 18$, линейную сложность ЛРП u , рассматриваемой как последовательность над R и над Q соответственно. Если u — последовательность над R -модулем M , то обозначим через $[1 \otimes u]$ последовательность над Q -модулем $Q \overset{R}{\otimes} M$ со знаками

$$[1 \otimes u](i) = 1 \otimes u(i) \in Q \overset{R}{\otimes} M, \quad i \in \mathbb{N}_0^k$$

(в дальнейшем будем писать $\otimes$ вместо $\overset{R}{\otimes}$).

Линейную сложность ЛРП $[1 \otimes u]$ над Q -модулем $Q \otimes M$ будем обозначать $r_i^Q = r_i^Q(1 \otimes u)$. Если $M = R$, то Q -модули Q и $Q \otimes M$ канонически изоморфны, и мы отождествляем последовательности u и $[1 \otimes u]$. Параметры $r_i^Q(u)$ и $r_i^Q(1 \otimes u)$ будем называть линейной сложностью ЛРП u над расширением кольца R и модуля M соответственно. Отметим, что последовательность $[1 \otimes u] \in (Q \otimes M)^{(k)}$ нельзя путать с элементом $1 \otimes u \in Q \otimes M^{(k)}$, который не является последовательностью (в случае, когда R — поле, этот вопрос подробно рассмотрен в [19]). Чтобы подчеркнуть различие, мы используем квадратные скобки, которые, однако, опускаем в записи $r_i^Q(1 \otimes u)$.

Существуют и другие естественные способы определения линейной сложности, которые не исследуются в этой работе. Пусть u — k -ЛРП над коммутативным кольцом R и Π — некоторый ее начальный параллелепипед, $|\Pi| = m$. Из векторов столбцов $(u[i + \Pi], i \in \Pi)$ составим матрицу U размера $m \times m$. Если $k = 1$, то U — ганкелева матрица ЛРП u . Положим

$$r_{19}(u) = \text{rank } U, \quad r_{20}(u) = \text{rk } U,$$

где $\text{rank } U$ — ранг матрицы U , то есть наибольший порядок ненулевых миноров, а $\text{rk } U$ — аннуляторный ранг, то есть наибольшее $t \geq 0$ такое, что $\text{An}_R(I_U(t)) = 0$, где $I_U(t)$ — идеал кольца R , порожденный всеми минорами порядка t матрицы U (см. [18, 3]).

Отметим также, что всякая k -ЛРП над коммутативным артиновым кольцом R может быть представлена в виде суммы так называемых биномиальных последовательностей над некоторым расширением Q исходного кольца (см. [7]). Если u — k -ЛРП над R -модулем M , то последнее утверждение применимо к последовательности $[1 \otimes u]$. Число биномиальных последовательностей в указанном представлении, подсчитанное надлежащим образом, называется биномиальной линейной сложностью ЛРП u . Обозначим этот параметр через $r_{21}(u)$. В большинстве работ по изучению линейной сложности 1-ЛРП над полем фактически находится или оценивается параметр r_{21} и затем используется равенство (которое часто даже не упоминается явно) $r_{21} = r_{10}$, где $r_{10}(u) = \text{rank } u$ — степень минимального многочлена 1-ЛРП u . Например, так делалось в работах [9, 14, 15, 20, 24]. Для k -ЛРП аналогичный прием использовался в [16, § 24]. Параметр r_{21} имеет большое прикладное значение и заслуживает отдельного исследования.

Если $E = \text{End}(M)$ — кольцо эндоморфизмов R -модуля M , то M можно рассматривать как правый E -модуль. Линейную сложность ЛРП $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$, рассматриваемую как последовательность над правым модулем M_E , обозначим $r_i^E(u)$, $i = 1, \dots, 21$, и назовем эндолинейной сложностью (или эндорангом). Если вместо

Е взять кольцо $\mathbf{E} = \text{End}(M, +)$ эндоморфизмов абелевой группы $(M, +)$ (то есть Z -модуля M), то соответствующую линейную сложность обозначим $r_i^{\mathbf{E}}(u)$. Более того, если M является модулем (левым или правым) над некоторым кольцом C , то через $r_i^C(u)$ обозначим линейную сложность последовательности u , рассматриваемой как последовательность над C -модулем M . В качестве C можно взять, например, центр кольца R . Указанные параметры можно назвать линейной сложностью над различными кольцами коэффициентов.

4. Переход от модуля сдвигов к модулю операторов и от последовательностей к векторам

Следующее предложение позволяет при оценке линейной сложности k -ЛРП рассматривать ее модуль операторов (кольцо операторов, если R коммутативно) $R[x]/\text{An}(u)$ вместо модуля сдвигов $R[x]u$. Это, в частности, дает возможность использовать результаты теории базисов Гребнера в кольцах многочленов для оценки линейной сложности (см. [21, 22, 23] в случае k -ЛРП над полями и кольцами вычетов).

Предложение 1. *Модуль сдвигов k -последовательности u изоморфен ее модулю операторов. Изоморфизм τ этих R -модулей и $R[x]$ -модулей задается соотношением*

$$\tau: R[x]/\text{An}(u) \rightarrow R[x]u, \quad F(x) + \text{An}(u) \rightarrow F(x)u.$$

Доказательство. Пусть $\varphi: R[x] \rightarrow R[x]u$ — отображение, задаваемое правилом $F(x) \rightarrow F(x)u$. Очевидно, φ является эпиморфизмом левых R -модулей и $R[x]$ -модулей с ядром $\text{An}(u)$, и предложение следует из теоремы об эпиморфизме.

Отметим, что предложение 1 справедливо для произвольного циклического подмодуля: если RM — модуль над кольцом R и $m \in M$, то $Rm \cong R/\text{An}_R(m)$.

Следствие 1. *Пусть $R[x]/\text{An}(u)$ — модуль операторов k -ЛРП $u \in M^{(k)}$, рассматриваемый как R -модуль. Тогда справедливы равенства*

$$\begin{aligned} r_1 &= \min\{t \geq 0: R[x]/\text{An}(u) \text{ порождается (над } R) t \text{ элементами}\}, \\ r_2 &= \min\{|\Omega|: R[x]/\text{An}(u) = {}_R(\mathbf{x}^i + \text{An}(u)), i \in \Omega\}, \\ r_3 &= \min\{|\mathcal{F}|: R[x]/\text{An}(u) = {}_R(\mathbf{x}^i + \text{An}(u)), i \in \mathcal{F}\}, \\ r_4 &= \max\{t \geq 0: R[x]/\text{An}(u) \text{ содержит } t \text{ линейно независимых элементов}\}, \\ r_5 &= \max\{|\Omega|: (\mathbf{x}^i + \text{An}(u)), i \in \Omega \text{ линейно независимы}\}, \\ r_6 &= \max\{|\mathcal{F}|: (\mathbf{x}^i + \text{An}(u)), i \in \mathcal{F} \text{ линейно независимы}\}. \end{aligned}$$

Модуль сдвигов $R[x]u$, даже если R и M конечны, состоит из бесконечных последовательностей. На самом деле, в случае коммутативного кольца R , при нахождении линейной сложности $r_1, \dots, r_6$ для проверки того, что k -ЛРП $v_1, \dots, v_n \in R[x]u$ порождают R -модуль $R[x]u$ или являются линейно независимыми над R , можно ограничиться начальными параллелепипедами этих последовательностей.

Предложение 2. *Пусть R коммутативно, $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$, $\Pi = \Pi(m)$ — некоторый начальный параллелепипед k -ЛРП u .*

(а) Последовательности $v_1, \dots, v_n \in R[x]u$ порождают R -модуль $R[x]u$ тогда и только тогда, когда векторы $v_1[\Pi], \dots, v_n[\Pi] \in M^\Pi$ порождают R -модуль $R(x^i u[\Pi], i \in \Pi) \subseteq M^\Pi$.

(б) Для произвольных последовательностей $v_1, \dots, v_n \in R[x]u$ справедливы импликации

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \iff c_1 v_1[\Pi] + \dots + c_n v_n[\Pi] = 0.$$

В частности, последовательности $v_1, \dots, v_n \in R[x]u$ линейно независимы над R тогда и только тогда, когда векторы $v_1[\Pi], \dots, v_n[\Pi] \in M^\Pi$ линейно независимы над R .

Доказательство. Пусть $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$ — элементарные характеристические многочлены ЛРП u степеней $m_1, \dots, m_k$ соответственно.

Необходимость в утверждении (а) очевидна. Докажем достаточность. Пусть $w \in R[x]u$. Тогда $w = A(\mathbf{x})u$, $A(\mathbf{x}) \in R[x]$. Разделив $A(\mathbf{x})$ на многочлены $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$, получим представление

$$A(\mathbf{x}) = Q_1(\mathbf{x})F_1(x_1) + \dots + Q_k(\mathbf{x})F_k(x_k) + a(\mathbf{x}),$$

где степень многочлена $a(\mathbf{x})$ по переменной x_s меньше m_s , $s = 1, \dots, k$. При этом $w = a(\mathbf{x})u$ и, следовательно, $w \in R(x^i u, i \in \Pi)$. В силу условия

$$w[\Pi] = c_1 v_1[\Pi] + \dots + c_n v_n[\Pi]$$

для некоторых $c_1, \dots, c_n \in R$. Тогда w и $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ — две k -ЛРП с одинаковыми диаграммами значений на Π и с элементарными характеристическими многочленами $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$. Следовательно, $w = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$, и последовательности $v_1, \dots, v_n$ порождают R -модуль $R[x]u$. (Коммутативность кольца R используется в утверждениях о том, что $w, v_s, c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ — ЛРП с элементарными характеристическими многочленами $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$.)

Необходимость в утверждении (б) очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что

$$c_1 v_1[\Pi] + \dots + c_n v_n[\Pi] = 0.$$

Тогда $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ и 0 — две k -ЛРП с одинаковыми диаграммами значений на Π и с элементарными характеристическими многочленами $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$. Следовательно, $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$, откуда $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Отметим, что начальный параллелепипед Π в предложении 2(а) можно заменить на определяющую диаграмму Ферре $\mathcal{F}$ ЛРП u из определения r_{10} , а в предложении 2(б) на множество Ω из определения r_8 или диаграмму Ферре $\mathcal{F}$ из определений $r_9, \dots, r_{15}$. Доказательства в этих случаях аналогичны приведенному выше.

5. Несколько примеров

Сравнение различных определений линейной сложности мы начнем с нескольких примеров, показывающих, что эти определения могут быть не эквивалентными. Говорят, что кольцо R удовлетворяет свойству ИБЧ (инвариантности базисного числа), если из $R^m \cong R^n$ следует, что $m = n$. Всякое кольцо, обладающее гомоморфизмом в

тело, в частности, всякое коммутативное кольцо, обладает свойством ИБЧ (см. [5], стр. 20). Первые три примера показывают, что в общем случае каждый из параметров r_1, r_4 может быть больше другого.

Пример 1. Пусть R — такое кольцо, что $R \cong R^2$, $u = (1, 0, 0, \dots) \in R^{(1)}$. Тогда $R[x]u = Ru \cong R$, откуда $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Очевидно, $r_5 = r_6 = 1$. С другой стороны,

$$R[x]u \cong R \cong R^2 \cong R^n$$

для произвольного n . Следовательно, в $R[x]u$ можно найти n линейно независимых над R элементов. Отсюда, $r_4 = \infty$. В этом примере

$$1 = r_1 = r_2 = r_3 = r_5 = r_6 < r_4 = \infty.$$

Чтобы сделать пример более конкретным, отметим, что в качестве R можно взять кольцо линейных преобразований бесконечномерного векторного пространства над полем. Например, пусть V — счетномерное пространство над полем P , элементы которого мы рассматриваем как бесконечные векторы столбцы, и пусть $R = \text{End}(V)$. Тогда R можно рассматривать как кольцо матриц над P со счетным числом строк и столбцов таких, что в каждом столбце находится лишь конечное число ненулевых элементов. В качестве n линейно независимых элементов рассмотренного выше модуля сдвигов $R[x]u$ можно взять последовательности

$$v_t = (v_t(0), 0, 0, \dots), \quad t = 1, \dots, n,$$

где $v_t(0)$ — матрица

$$v_t(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

у которой в i -й строке, $i \geq 0$, находится одна единица, перед которой стоит $(t-1) + ni$ нулей.

Пример 2. Пусть $R \cong R^2$, $u = (0, 1, 0, 0, \dots) \in R^{(1)}$. Тогда $R[x]u = {}_R(u, xu) \cong R^2$. Легко видеть, что $r_2 = r_3 = 2$, $r_5 = r_6 = 2$. Как и в примере 1, показывается, что $r_4 = \infty$. Так как $R^2 \cong R$, то R -модуль $R[x]u$ порождается одним элементом, откуда $r_1 = 1$. В этом примере

$$1 = r_1 < 2 = r_2 = r_3 = r_5 = r_6 < r_4 = \infty.$$

Если $R = \text{End}(V)$ — кольцо из примера 1, то

$$R[x]u = {}_R(v),$$

где $v = (v(0), v(1), 0, 0, \dots)$,

$$v(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad v(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Действительно, $v \in R[x]u$ и $u = av$, $xu = bv$ для элементов

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

кольца R .

В рассмотренных примерах $r_1 < r_4$. Как будет показано в предложении 7, если R коммутативно или артиново слева, то $r_1 \geq r_4$. Следующий пример показывает возможность неравенства $r_1 > r_4$.

Пример 3. Пусть $R = Z_4$, $u = (2, 2, 2, \dots) \in R^{(1)}$. Тогда

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1 > r_4 = r_5 = r_6 = 0.$$

Данный пример можно обобщить. Пусть M — модуль с кручением и $a \in M$ — периодический элемент, то есть $a \neq 0$ и $ra = 0$ для некоторого $r \in R \setminus 0$. Частным случаем является ситуация, когда $R = M$ — кольцо с делителями нуля и a — правый делитель нуля. Тогда для 1-последовательности $u = (a, a, a, \dots)$ выполняются соотношения $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, $r_4 = r_5 = r_6 = 0$.

Согласно примерам 1, 2, неравенства $r_1 \leq r_2$ и $r_4 \geq r_5$ из (1) могут быть строгими. Покажем, что это возможно и в коммутативном случае.

Пример 4. Пусть $R = Z$ или $R = Z_6$, $u \in R^{(2)}$ — 2-последовательность вида

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

то есть $u(0, 0) = 1$, $u(1, 0) = 2$, $u(0, 1) = 3$, и все остальные знаки u равны 0. Тогда

$$R[x]u = R(u, x_1u, x_2u) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \right).$$

Следовательно, $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = 3$. Кроме того, если $R = Z$, то $r_4 = r_5 = r_6 = 2$, а если $R = Z_6$, то $r_4 = 2$, $r_5 = r_6 = 1$.

Найдем r_7 , r_8 и r_9 . Так как

$$R[x]u = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 3a \end{pmatrix} : a, b \in R \right\},$$

то $R[x]u \cong R^2$ и $r_7 = 2$. Кроме того, мы видим, что при $R = Z$ диаграмма Ферре $\mathcal{F} = \{(0, 0), (1, 0)\}$ является определяющей в смысле определений r_8 и r_9 , поскольку по диаграмме значений $v[\mathcal{F}]$ однозначно определяются элементы a , b и последовательность $v \in R[x]u$. Отсюда легко следует, что $r_8 = r_9 = 2$. Если же $R = Z_6$, то множества

$$\Omega = \{(0, 0), (1, 0)\}, \quad \{(0, 0), (0, 1)\}, \quad \{(1, 0), (0, 1)\}$$

не являются определяющими в смысле определений r_8 и r_9 , поскольку существует ненулевая последовательность $v \in R[x]u$ такая, что $v[\Omega] = 0$. Отсюда следует, что $r_8 = r_9 = 3$. В итоге, если $R = Z$, то

$$r_1 = 2, \quad r_2 = r_3 = 3, \quad r_4 = r_5 = r_6 = r_7 = r_8 = r_9 = 2,$$

а если $R = Z_6$, то

$$r_1 = 2, \quad r_2 = r_3 = 3, \quad r_4 = 2, \quad r_5 = r_6 = 1, \quad r_7 = 2, \quad r_8 = r_9 = 3.$$

Найдем $r_{10}, \dots, r_{15}$. Так как u есть выход 2-ЛРС $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$, где

$$\mathcal{F} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}, \quad \chi = \{x_1^2, x_1 x_2, x_2^2\},$$

то $r_{11}(u) \leq 3$. Рассматривая ту же диаграмму Ферре $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ -ЛРС-систему (φ_1, φ_2) из двух скалярных эндоморфизмов

$$\varphi_s: R^{\mathcal{F}} \rightarrow R^{\mathcal{F}}, \quad \varphi_1 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

получим, что $r_{15} \leq 3$. Ввиду (7) $r_i \leq 3$, $i = 12, 13, 14, 15$. Непосредственная проверка того, что $r_i = 3$, $i = 10, \dots, 15$, является весьма громоздкой, поэтому воспользуемся результатами, которые будут доказаны позже. По предложению 8 $r_{12} = r_{13}$ и по предложениям 4(b) и 3 $r_{13} \geq r_{10} = r_3 = 3$. Следовательно, ввиду (7), $r_i = 3$, $i = 12, 13, 14, 15$. По предложению 6(d) $r_{11} \geq r_{14}$, откуда, $r_{11} = 3$. Таким образом, в обоих случаях ($R = \mathbf{Z}$ и $R = Z_6$)

$$r_{10} = r_{11} = r_{12} = r_{13} = r_{14} = r_{15} = 3.$$

Помимо примера неравенств $r_1 < r_2$ и $r_4 > r_5$ мы увидели, что значения r_8, r_9 могут быть больше, чем r_1, r_4 . В следующем примере r_7, r_8, r_9 меньше, чем r_1, r_4 .

Пример 5. Пусть R — поле, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq \beta$,

$$u(i) = \begin{pmatrix} \alpha^i \\ \beta^i \end{pmatrix}, \quad i \geq 0,$$

есть 1-последовательность над модулем $M = R^2$. Ее минимальный многочлен равен $(x - \alpha)(x - \beta)$, поэтому $r_{10} = 2$. Модуль сдвигов $R[x]u = {}_R(u, xu)$ есть векторное пространство размерности 2, откуда легко следует, что

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 2.$$

При этом

$$R[x]u = \{au + bxu : a, b \in R\},$$

и если $v = au + bxu$, то

$$v(0) = \begin{pmatrix} a + b\alpha \\ a + b\beta \end{pmatrix}.$$

Так как по значению $v(0)$ можно однозначно определить константы a, b и всю последовательность $v \in R[x]u$, множество $\Omega = \{0\}$ удовлетворяет определениям r_8 и r_9 . Отсюда, $r_8 = r_9 = 1$. В силу (1) $r_7 = 1$. Таким образом, r_7, r_8, r_9 меньше, чем r_1, r_4 .

В этом примере интересно найти $r_{11}, \dots, r_{15}$. Как будет показано ниже (предложения 12(c) и 13(d)), r_{11}, r_{13} и r_{15} равны r_1 и, следовательно, равны 2. Пусть $\mathcal{F} = \{0\}$. Тогда $M^{\mathcal{F}} = M = R^2$. Непосредственно видно, что эндоморфизм $\varphi_1 \in \text{End}(M^{\mathcal{F}})$, $\varphi_1: R^2 \rightarrow R^2$, задаваемый правилом

$$\varphi_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \end{pmatrix},$$

образует $\mathcal{F}$ -ЛРС систему, удовлетворяющую определению r_{14} , то есть

$$u(i) = \varphi_1^i(u(0)), \quad i \geq 0.$$

Следовательно, $r_{14} = 1$, и в силу (7) $r_{12} = 1$. В итоге

$$\begin{aligned} r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 2, & \quad r_7 = r_8 = r_9 = 1, \\ r_{10} = r_{11} = r_{13} = r_{15} = 2, & \quad r_{12} = r_{14} = 1. \end{aligned}$$

Другие примеры будут приводиться в тексте работы. Отметим, что в разделе 13 приводится общая таблица всех рассмотренных примеров.

6. Общий случай

Предложение 3. *Справедливо равенство $r_3 = r_{10}$.*

Доказательство. Если существует полная система $\mathcal{F}$ -унитарных многочленов из $\text{An}(u)$, то модуль операторов $R[x]/\text{An}(u)$ порождается элементами $x^i + \text{An}(u)$, $i \in \mathcal{F}$. Очевидно, что верно и обратное утверждение. Поэтому определение r_{10} можно записать следующим образом:

$$r_{10} = \min\{|\mathcal{F}| : R[x]/\text{An}(u) = {}_R(x^i + \text{An}(u), i \in \mathcal{F})\}.$$

В силу следствия 1 $r_3 = r_{10}$.

В частности, если $k = 1$, то ввиду (2) $r_3(u) = r_{10}(u) = \text{rank } u$ есть степень минимального многочлена ЛРП u .

Предложение 4. *Пусть $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

- (a) $r_9 \leq r_{12}$;
- (b) $r_{10} \leq r_{13}$;
- (c) $r_{11} \leq r_{15}$;
- (d) *если R конечно, то $r_4 \leq r_{18} \leq r_1$, $r_{18} \leq r_7 \log_{|R|} |M|$.*

Доказательство. Докажем утверждение (a). Пусть $\mathcal{F}$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ удовлетворяют условиям определения r_{12} . Достаточно доказать, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям определения r_9 , то есть, что

$$R[x]u \rightarrow M^{\mathcal{F}}, \quad v \rightarrow v[\mathcal{F}],$$

— мономорфизм. Для этого предположим, что

$$v = H(x)u \in R[x]u, \quad v[\mathcal{F}] = 0.$$

Тогда для любого $i \in \mathbf{N}_0^k$

$$\begin{aligned} v[i + \mathcal{F}] &= (H(x)u)[i + \mathcal{F}] = \left(\sum_j h_j x^j u \right) [i + \mathcal{F}] \\ &= \sum_j h_j u[i + j + \mathcal{F}] = \sum_j h_j \varphi^{i+j}(u[\mathcal{F}]). \end{aligned}$$

Так как $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ — эндоморфизмы R -модуля $M^{\mathcal{F}}$, они перестановочны с элементами h_j . Следовательно,

$$\begin{aligned} v[i + \mathcal{F}] &= \varphi^i \left(\sum_j h_j \varphi^j(u[\mathcal{F}]) \right) \\ &= \varphi^i \left(\sum_j h_j u[j + \mathcal{F}] \right) = \varphi^i \left(\left(\sum_j h_j x^j u \right) [\mathcal{F}] \right) \\ &= \varphi^i((H(x)u)[\mathcal{F}]) = \varphi^i(v[\mathcal{F}]) = \varphi^i(0) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $v = 0$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение (b). Пусть $\mathcal{F}$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ удовлетворяют условиям определения r_{13} . Достаточно доказать, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям определения r_{10} . Для этого по скалярным эндоморфизмам $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \widehat{\text{End}}(M^{\mathcal{F}})$ построим полную систему $\mathcal{F}$ -унитарных многочленов из $\text{An}(u)$. Построение в основном заключается во введении обозначений. Эндоморфизм φ_s , $s = 1, \dots, k$, запишем в виде $\varphi_s = (\varphi_{sj}, j \in \mathcal{F})$, где $\varphi_{sj}: M^{\mathcal{F}} \rightarrow M$ — компоненты φ_s . Тогда

$$\varphi_s(\delta[\mathcal{F}](j)) = \varphi_{sj}(\delta[\mathcal{F}]) \in M, \quad \delta[\mathcal{F}] \in M^{\mathcal{F}}. \quad (9)$$

Так как эндоморфизм φ_s скалярный, существуют коэффициенты $h_{sjl} \in R$ такие, что

$$\varphi_{sj}(\delta[\mathcal{F}]) = \sum_{l \in \mathcal{F}} h_{sjl} \delta(l). \quad (10)$$

Пусть $r \in \Delta \mathcal{F}$. Выберем пару (s, j) , $s = 1, \dots, k$, $j \in \mathcal{F}$, такую, что $1_s + j = r$. Если таких пар несколько, выберем любую из них. Положим

$$H_r(x) = x^r - \sum_{l \in \mathcal{F}} h_{sjl} x^l, \quad r \in \Delta \mathcal{F}.$$

Тогда $\{H_r(x): r \in \Delta \mathcal{F}\}$ — полная система $\mathcal{F}$ -унитарных многочленов (естественным образом определяемая скалярными эндоморфизмами φ). Докажем, что $H_r(x) \in \text{An}(u)$. Пусть (s, j) — пара, выбранная выше для данного $r \in \Delta \mathcal{F}$. Тогда для любого $i \in \mathbf{N}_0^k$

$$u[1_s + i + \mathcal{F}] = \varphi^{1_s+i}(u[\mathcal{F}]) = \varphi^{1_s}(\varphi^i(u[\mathcal{F}])) = \varphi_s(u[i + \mathcal{F}]). \quad (11)$$

Теперь согласно (9)

$$u(1_s + i + j) = \varphi_{sj}(u[i + \mathcal{F}]) \quad (12)$$

и в силу (10)

$$u(i + r) = u(1_s + i + j) = \sum_{l \in \mathcal{F}} h_{sjl} u(i + l), \quad i \in \mathbf{N}_0^k. \quad (13)$$

Это и означает, что $H_r(x) \in \text{An}(u)$.

Докажем (с). Пусть $\mathcal{F}$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ удовлетворяют условиям определения r_{15} . Достаточно доказать, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям определения r_{11} , то есть, что существует ЛРС $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$, выходом которого является ЛРП u . Пусть $\chi = \{H_r(x), r \in \Delta \mathcal{F}\}$ — полная система $\mathcal{F}$ -унитарных многочленов из $\text{An}(u)$, естественным образом определяемая скалярными эндоморфизмами $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ и построенная в (b). Так как $\chi \subset \text{An}(u)$, то $u \in L_M(\chi)$. Остается доказать, что $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$ есть ЛРС, то есть, что отображение σ , определенное в (3), биективно. Предположим, что

$$v_1, v_2 \in L_M(\chi), \quad v_1[\mathcal{F}] = v_2[\mathcal{F}].$$

Тогда, ввиду определения множества χ , очевидно, что $v_1(i) = v_2(i)$, $i \in \mathbf{N}_0^k$, то есть $v_1 = v_2$, и σ инъективно. Для произвольной диаграммы значений $\delta[\mathcal{F}] \in M^{\mathcal{F}}$ определим последовательность $v \in M^{(k)}$ правилом

$$v[i + \mathcal{F}] = \varphi^i(\delta[\mathcal{F}]), \quad i \in \mathbf{N}_0^k.$$

Так как эндоморфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ образуют $\mathcal{F}$ -ЛРС систему, определение последовательности v корректно. Так же, как в (b), доказывается, что $H_r(x) \in \text{An}(v)$ (для данного r выбрать пару (s, j) и в соотношениях (11)–(13) заменить u на v). Поэтому $v \in L_M(\chi)$, и σ сюръективно. Этим доказано, что $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$ — ЛРС с выходом u , и $r_{11} \leq r_{15}$.

Наконец, докажем утверждение (d). Если $R[x]u = R(v_1, \dots, v_n)$, $n = r_1$, то $|R[x]u| \leq |R|^n$ и $r_{18} \leq n = r_1$. Если $v_1, \dots, v_n \in R[x]u$ линейно независимы, $n = r_4$, то $|R[x]u| \geq |R|^n$ и $r_{18} \geq n = r_4$. Если $R[x]u \rightarrow M^t$ — мономорфизм, $t = r_7$, то

$$r_{18} \leq \log_{|R|} |M|^t = r_7 \log_{|R|} |M|.$$

Для 1-ЛРП над полем все неравенства в предложении 4 обращаются в равенства. Покажем, что все они могут быть строгими. В примере 4 (для случая $R = \mathbf{Z}$) $r_9 = 2 < r_{12} = 3$. В примере 3 (для случая $R = \mathbf{Z}_4$) $|R[x]u| = 2$, откуда, $r_{18} = 1/2$ и $0 = r_4 < r_{18} < r_1 = 1$, а также

$$r_{18} < r_7 \log_{|R|} |M| = r_7 = 1.$$

В следующем примере $r_{10} < r_{13}$ и $r_{11} < r_{15}$.

Пример 6. Пусть b — элемент некоммутативного кольца R такой, что $Rb \not\subseteq bR$, например, $R = P_2$ — кольцо 2×2 -матриц над полем P и

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем элемент $a \in R$ такой, что $ab \notin bR$, и положим

$$u = (b, ab, \dots, a^i b, \dots) \in R^{(1)}.$$

Тогда $u \in L_R(x - a)$, откуда, $r_{10} = 1$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Очевидно также, что $r_5 = r_6 = 1$ и $r_7 = 1$. Так как u — выход ЛРС $\langle x - a, \{0\} \rangle$, то $r_{11} = 1$. Покажем, что $r_{12} > 1$. Предположим, что $r_{12} = 1$. Тогда существует эндоморфизм $\varphi \in \text{End}({}_R R)$ такой, что

$$u(i) = \varphi^i(u(0)) = \varphi^i(b), \quad i \geq 0.$$

В частности, $u(1) = ab = \varphi(b)$. Но $\varphi(b) = b\varphi(1) \in bR$, тогда как $ab \notin bR$, получаем противоречие. Следовательно, $r_{12} > 1$. В силу (7), $r_{13}, r_{14}, r_{15} > 1$.

Предложение 5. Пусть модуль M конечен, $|M| \leq |R|$ (кольцо R может быть бесконечным), $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$. Тогда $r_4 \leq r_7$.

Доказательство. Пусть $R[x]u \rightarrow M^t$ — мономорфизм, $t = r_7$. Возьмем произвольные n , $n > t$, последовательностей $v_1, \dots, v_n \in R[x]u$. Из векторов строк $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in M^t$ составим $n \times t$ матрицу

$$V = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \dots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

над модулем M . Так как $n > t$ и $|R| \geq |M|$, отображение $R^n \rightarrow M^t$, $x \rightarrow xV$, являющееся гомоморфизмом R -модулей, не инъективно. Следовательно, $cV = 0$ для некоторого

$$c = (c_1, \dots, c_n) \in R^n \setminus 0.$$

Это означает, что

$$c_1\varphi(v_1) + \dots + c_n\varphi(v_n) = 0,$$

то есть

$$\varphi(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = 0.$$

Так как φ — мономорфизм, то $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0$. Таким образом, любые $n > t$ последовательностей из $R[x]u$ линейно зависимы. Следовательно, $r_4 \leq t = r_7$.

В условиях предложения 5 неравенство $r_4 \leq r_7$ может быть строгим (пример 3 и примеры 7, 11 ниже), и может обращаться в равенство (пример 4 и пример 12 ниже). Если условия предложения 5 нарушены, то неравенство $r_4 \leq r_7$ может быть неверным (примеры 1, 2, 5).

7. Коммутативный случай

Предложение 6. Пусть кольцо R коммутативно, $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$. Тогда

- (a) $r_2 \geq r_8$;
- (b) $r_3 \geq r_9$;
- (c) $r_9 \leq r_{11}$;
- (d) $r_{11} \geq r_{14}$;
- (e) $r_{13} \leq (r_{12}\nu)^k$, где $\nu = r_1(M)$;

(f) $r_{16} \leq r_{11}\nu$.

Доказательство. Докажем (а). Пусть Ω удовлетворяет определению r_2 , то есть $R[x]u = {}_R(x^i u, i \in \Omega)$. Тогда для любого $r \in N_0^k \setminus \Omega$ последовательность $x^r u$ линейно выражается через $(x^i u, i \in \Omega)$. Это означает, что существует многочлен $H_r(x) \in \text{An}(u)$ вида

$$H_r(x) = x^r - \sum_{i \in \Omega} h_{ri} x^i.$$

Возьмем теперь произвольную последовательность $v \in R[x]u$ такую, что $v[\Omega] = 0$. Так как R коммутативно, из условия $H_r(x)u = 0$ следует, что $H_r(x)v = 0$. Так как $v[\Omega] = 0$, то $v(r) = 0$, $r \in N_0^k \setminus \Omega$, то есть $v = 0$. Таким образом, Ω удовлетворяет определению r_8 . Отсюда следует неравенство $r_2 \geq r_8$.

Доказательство (b) получается из доказательства (а) заменой Ω на $\mathcal{F}$.

Докажем (с). Пусть $\mathcal{F}$ удовлетворяет определению r_{11} , то есть u — выход ЛРС $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$. Тогда $u \in L_M(\chi)$ и отображение $\sigma: L_M(\chi) \rightarrow M^{\mathcal{F}}, v \rightarrow v[\mathcal{F}]$, определенное в (3), биективно. Так как R коммутативно, то $R[x]u \subseteq L_M(\chi)$. Следовательно, отображение $R[x]u \rightarrow M^{\mathcal{F}}, v \rightarrow v[\mathcal{F}]$, инъективно, то есть $\mathcal{F}$ удовлетворяет определению r_9 . Из доказанного следует, что $r_9 \leq r_{11}$.

Докажем (d). Как и при доказательстве утверждения (с), пусть $\mathcal{F}$ удовлетворяет определению r_{11} . Так как R коммутативно, σ является изоморфизмом R -модулей. Для $s = 1, \dots, k$ определим отображение $\varphi_s: M^{\mathcal{F}} \rightarrow M^{\mathcal{F}}$, полагая $\varphi_s = \sigma \hat{x}_s \sigma^{-1}$, где

$$\hat{x}_s: L_M(\chi) \rightarrow L_M(\chi), \quad v \rightarrow x_s v.$$

Другими словами, если $\delta[\mathcal{F}] \in M^{\mathcal{F}}$ и $\delta[\mathcal{F}] = \sigma(v)$ (то есть $\delta[\mathcal{F}] = v[\mathcal{F}]$), где $v \in L_M(\chi)$, то мы полагаем

$$\varphi_s(\delta[\mathcal{F}]) = (x_s v)[\mathcal{F}] = v[1_s + \mathcal{F}].$$

Докажем, что $\mathcal{F}$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ удовлетворяют определению r_{14} . Так как σ , $\hat{x}_s$ и σ^{-1} — гомоморфизмы R -модулей, то φ_s — гомоморфизм R -модулей и $\varphi_s \in \text{End}(M^{\mathcal{F}})$. Так как $\hat{x}_s \hat{x}_t = \hat{x}_t \hat{x}_s$, то $\varphi_s \varphi_t = \varphi_t \varphi_s$. Проверим условие (5). Пусть

$$\delta[\mathcal{F}] \in M^{\mathcal{F}}, \quad s \in \{1, \dots, k\}, \quad j \in \mathcal{F}, \quad j + 1_s \in \mathcal{F},$$

и пусть $\varphi_s(\delta[\mathcal{F}]) = \lambda[\mathcal{F}]$. Выберем $v \in L_M(\chi)$ так, что $\sigma(v) = \delta[\mathcal{F}]$. Тогда $\varphi_s(\delta[\mathcal{F}]) = v[1_s + \mathcal{F}]$, то есть $\lambda[\mathcal{F}] = v[1_s + \mathcal{F}]$. Следовательно, $\lambda(j) = v[1_s + j] = \delta(1_s + j)$, что доказывает (5). Таким образом, φ есть $\mathcal{F}$ -ЛРС система. Теперь проверим условие

$$u[i + \mathcal{F}] = \varphi^i(u[\mathcal{F}]), \quad i \in N_0^k,$$

из определения r_{14} . Очевидно, достаточно убедиться в том, что из равенства $u[i + \mathcal{F}] = \varphi^i(u[\mathcal{F}])$ следует равенство

$$u[1_s + i + \mathcal{F}] = \varphi^{1_s + i}(u[\mathcal{F}]).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi^{1_s + i}(u[\mathcal{F}]) &= \varphi_s(\varphi^i(u[\mathcal{F}])) = \varphi_s(u[i + \mathcal{F}]) = \sigma \hat{x}_s \sigma^{-1}(u[i + \mathcal{F}]) \\ &= \sigma \hat{x}_s \sigma^{-1}((x^i u)[\mathcal{F}]) = \sigma \hat{x}_s(x^i u) = \sigma(x_s x^i u) \\ &= \sigma(x^{1_s + i} u) = (x^{1_s + i} u)[\mathcal{F}] = u[1_s + i + \mathcal{F}]. \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали, что $\mathcal{F}$, φ удовлетворяют определению r_{14} , откуда следует неравенство $r_{11} \geq r_{14}$.

Это неравенство (е) доказано в предложении 1.4 в [6].

Наконец, докажем утверждение (f). Пусть u является выходом ЛРС $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$, $|\mathcal{F}| = r_{11}$. Тогда $u \in L_M(\chi) \cong M^{\mathcal{F}}$. Так как R коммутативно, то $R[x]u \subseteq L_M(\chi)$. Следовательно,

$$r_{16} \leq r_1(M^{\mathcal{F}}) \leq |\mathcal{F}|r_1(M) = r_{11}\nu.$$

Каждый из примеров 4 (для случая $R = \mathbf{Z}$), 5 и пример 8 ниже показывают, что неравенства $r_2 \geq r_8$, $r_3 \geq r_9$, $r_9 \leq r_{11}$ могут быть строгими. Согласно примеру 5 неравенство $r_{11} \geq r_{14}$ также может быть строгим. Следующий пример показывает, что неравенство $r_{16} \leq r_{11}\nu$ может быть строгим.

Пример 7. Пусть P — поле, $P(\alpha, \beta)$ — трансцендентное расширение степени трансцендентности 2, $R = P(\alpha, \beta)/(\alpha^2, \beta^2)$. Тогда R является коммутативным локальным кольцом, конечным если P конечно, и алгеброй над P . Рассмотрим последовательность

$$u = (0, \alpha\beta, 0, 0, \dots) \in R^{(1)}.$$

Тогда $u \in L_R(x^2)$ и $r_{11} = 2$. При этом $R[x]u \subseteq R(v)$, где $v = (\alpha, \beta, 0, 0, \dots)$, поскольку $u = \alpha v$, $xu = \beta v$. Следовательно, $r_{16} = 1$ и $r_{16} < r_{11}$.

Условие коммутативности кольца R в предложении 6(a–d) является существенным. Действительно, в примере 6 $r_{11} < r_{14}$, то есть неравенство из предложения 6(d) неверно. В следующем примере $r_2 < r_8$, $r_3 < r_9$ и $r_9 > r_{11}$, то есть неравенства из предложения 6(a–c) неверны.

Пример 8. Пусть $R = P_2$ — кольцо 2×2 матриц над полем P ,

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$u = (b, ab, \dots, a^i b, \dots) \in R^{(1)}$. Как и в примере 6, $r_1 = r_2 = r_3 = r_5 = r_6 = r_7 = r_{10} = r_{11} = 1$. Предположим, что $r_8 = 1$. Тогда существует одноэлементное множество $\Omega = \{i\}$, определяющее в смысле определения r_8 . Положим

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

если i четно, и $c = b$, если i нечетно. Тогда $ca^i b = 0$, $ca^{i+1} b \neq 0$. Следовательно, две различные последовательности cu , $0 \in R[x]u$ имеют одинаковые диаграммы значений на множестве Ω , получаем противоречие. Таким образом, $r_8 > 1$. В силу (1) $r_9 \geq r_8 > 1$.

Лемма 1. Если кольцо R коммутативно или артиново слева, то для любого левого R -модуля M выполняется неравенство $r_4(M) \leq r_1(M)$.

Доказательство. Пусть $r_1(M) = m$. Тогда M порождается m элементами и существует эпиморфизм R -модулей $\pi: R^m \rightarrow M$. Пусть $s_1, \dots, s_n$ — произвольные $n > m$ элементов модуля M и $a_1, \dots, a_n \in R^m$ — их произвольные прообразы при отображении π . Рассмотрим $n \times m$ матрицу A над R , составленную из строк $a_1, \dots, a_n$. Если R коммутативно, то, согласно [18], стр. 159 (см. также [3], следствие 1 на стр. 213),

из условия $n > m$ следует, что система линейных уравнений $\mathbf{x}A = \mathbf{0}$ имеет ненулевое решение $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$. Если R конечно, то отображение $\varphi: R^n \rightarrow R^m$, $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A$, не инъективно, и вновь система линейных уравнений $\mathbf{x}A = \mathbf{0}$ имеет ненулевое решение $\mathbf{c}$.

Пусть R артиново слева. Предположим, что отображение φ инъективно. Тогда модуль R^m содержит подмодуль $\varphi(R^n)$, изоморфный R^n . Так как R нетерово слева, то R обладает свойством ИБЧ (см. [5], стр. 22). Поэтому $\varphi(R^n)$ не может совпадать с R^m . Таким образом, в модуле R^m существует собственный подмодуль $\varphi(R^n)$, изоморфный R^n , $n > m$. Теперь легко построить строго убывающую цепочку подмодулей модуля R^m , изоморфных R^n . Но R^m — конечно порожденный модуль над R , поэтому модуль R^m артинов, получаем противоречие. Следовательно, отображение φ не инъективно и система линейных уравнений $\mathbf{x}A = \mathbf{0}$ имеет ненулевое решение $\mathbf{c}$. Таким образом, во всех случаях

$$c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = 0, \quad \mathbf{c} \neq \mathbf{0}.$$

Поддействовав гомоморфизмом π , получим, что $c_1 s_1 + \dots + c_n s_n = 0$. Тем самым доказано, что любые $n > m$ элементов модуля M линейно зависимы. Следовательно, $r_4(M) \leq m = r_1(M)$.

Предложение 7. Если кольцо R коммутативно или артиново слева,

$$u \in \mathcal{L}_R M^{(k)},$$

то

$$r_4 \leq r_1, \quad r_4 \leq r_7 \nu,$$

где $\nu = r_1(M)$. В частности, если модуль M циклический или $M = R$, то $r_4 \leq r_7$.

Доказательство. Применив лемму 1 к модулю сдвигов $R[\mathbf{x}]u$, получим, что

$$r_4(u) = r_4(R[\mathbf{x}]u) \leq r_1(R[\mathbf{x}]u) = r_1(u).$$

Если $r_7 = \infty$, то неравенство $r_1 \leq r_7 \nu$ выполняется. Пусть $r_7 = t < \infty$ и $R[\mathbf{x}]u \rightarrow M^t$ — мономорфизм. Тогда $r_4(R[\mathbf{x}]u) \leq r_4(M^t)$. По лемме 1 $r_4(M^t) \leq r_1(M^t)$. Отсюда,

$$r_4(u) = r_4(R[\mathbf{x}]u) \leq r_4(M^t) \leq r_1(M^t) \leq t r_1(M) = r_7 \nu.$$

Заметим, что для конечного кольца R неравенство $r_4 \leq r_1$ следует также из предложения 4(d). При условии, что M конечен и $|M| \leq |R|$, в предложении 5 ранее было доказано также неравенство $r_4 \leq r_7$.

Примеры 3, 7 показывают, что если R коммутативно и конечно, $M = R$, $k = 1$, то неравенства $r_4 \leq r_1$, $r_4 \leq r_7$ могут быть строгими. Примеры 1, 2 показывают, что в некоммутативном случае эти неравенства могут быть неверными. Согласно примеру 5, неравенство $r_4 \leq r_7 \nu$ может обращаться в равенство (в примере 5 $\nu = 2$, но легко привести аналогичный пример для произвольного ν).

Объединяя неравенства (1), (7), (8) и результаты предложений 3–7, получим следующее утверждение.

Следствие 2. Если R коммутативно, $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$, $\nu = r_1(M)$, то

$$\begin{aligned} r_6 \leq r_5 \leq r_4 \leq r_{18} \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 = r_{10} \leq r_{13} \leq (r_{12}\nu)^k, \\ r_4 \leq r_7\nu, \quad r_7 \leq r_8 \leq r_9 \leq r_3, \quad r_8 \leq r_2, \\ r_9 \leq r_{11} \leq r_{15}, \quad r_9 \leq r_{12} \leq r_{13} \leq r_{15}, \quad r_{12} \leq r_{14} \leq r_{11}, \\ r_{16} \leq r_1, \quad r_{16} \leq r_{11}\nu, \quad r_{18} \leq r_7 \log_{|R|} |M|. \end{aligned} \quad (14)$$

Следуя [6], модуль M над коммутативным кольцом R будем называть E -модулем, если $\text{End}({}_R M) = \widehat{\text{End}}({}_R M)$.

Предложение 8. Пусть кольцо R коммутативно, модуль M является E -модулем (в частности, $M = R$), $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$. Тогда

$$r_{12} = r_{13}, \quad r_{14} = r_{15}.$$

Доказательство. Так как M является E -модулем, то, согласно предложению 1.3 в [6],

$$\text{End}(M^{\mathcal{F}}) = \widehat{\text{End}}(M^{\mathcal{F}}),$$

и определения r_{12} и r_{13} , а также r_{14} и r_{15} , совпадают.

8. Случай $k = 1$

Предложение 9. Пусть $k = 1$, $u \in \mathcal{L}_R M^{(1)}$. Тогда $r_6 \leq r_{10}$ и $r_{11} \leq r_{10}$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — минимальный многочлен ЛРП u , $\deg F(x) = m = r_{10}$. Тогда последовательности $u, xu, \dots, x^m u$ линейно зависимы, откуда, $r_6 \leq r_{10}$. Кроме того, последовательность u является выходом ЛРС $\langle F(x), \{0, \dots, m-1\} \rangle$, откуда, $r_{11} \leq r_{10}$.

Как показывают примеры 3, 7 и пример 12 ниже, неравенство $r_6 \leq r_{10}$ может быть строгим. Критерий того, что это неравенство (при $k = 1$) обращается в равенство, дан ниже в предложении 10. В силу предложения 7 (а также предложения 3 и соотношений (1)) неравенство $r_6 \leq r_{10}$ выполняется и при $k > 1$, если R коммутативно или артиново слева; доказательство следует из неравенств

$$r_6 \leq r_5 \leq r_4 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 = r_{10}.$$

Вопрос о том, выполняется ли оно в общем случае, открыт.

При $k > 1$ может выполняться как неравенство $r_{11} < r_{10}$, так и неравенство $r_{11} > r_{10}$. В [17] приведен пример 2-ЛРС-последовательности, не являющейся ЛРП. Этот пример построен В. Т. Марковым, в нем $r_{11} = 3 < r_{10} = \infty$. В следующем примере $r_{11} > r_{10}$.

Пример 9. Пусть $R = P\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle / I$, где P — поле, α, β, γ — свободные некоммутативные переменные, I — двусторонний идеал в свободной алгебре $P\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$, порожденный элементами $(\alpha^i \beta - \beta \alpha^i) \beta^j \gamma, i, j \geq 0$. Пусть $u \in R^{(2)}$ — 2-последовательность со знаками $u(i, j) = \alpha^i \beta^j \gamma$. Тогда $x_1 - \alpha, x_2 - \beta \in \text{An}(u)$, откуда, $r_{10} = 1$. Предположим, что $r_{11} = 1$. Тогда u есть выход ЛРС $\langle \chi, \{(0, 0)\} \rangle$, где $\chi \subset R[x]$ — такое множество,

что отображение $L_R(\chi) \rightarrow R$, $v \rightarrow v(0, 0)$, биективно. Пусть $v \in L_R(\chi)$ — такая последовательность, что $v(0, 0) = 1$. Введем обозначения $v(1, 0) = p$, $v(0, 1) = q$. Наша цель заключается в том, чтобы найти p , q и $v(1, 1)$. Заметим, что если $w \in L_R(\chi)$, $w(0, 0) = r \in R$, то последовательности w , $vr \in L_R(\chi)$ имеют одинаковую диаграмму значений на множестве $\{(0, 0)\}$ и по определению ЛРС $w = vr$. Взяв в качестве w последовательность u , получим, что $u = v\gamma$. Следовательно,

$$(u(0, 0), u(1, 0), u(0, 1)) = (\gamma, \alpha\gamma, \beta\gamma) = (\gamma, p\gamma, q\gamma).$$

Отсюда, $p = \alpha$, $q = \beta$. Теперь возьмем в качестве w последовательности x_1v и x_2v . Так как

$$(x_1v)(0, 0) = v(1, 0) = p = \alpha, \quad (x_2v)(0, 0) = v(0, 1) = q = \beta,$$

мы получим, что $x_1v = v\alpha$, $x_2v = v\beta$. Отсюда,

$$v(1, 1) = (x_1v)(0, 1) = v(0, 1)\alpha = \beta\alpha,$$

и

$$v(1, 1) = (x_2v)(1, 0) = v(1, 0)\beta = \alpha\beta,$$

то есть $\alpha\beta = \beta\alpha$, получаем противоречие. Следовательно, $r_{11} > 1$.

Предложение 10. Пусть $k = 1$, $u \in \mathcal{L}_R M^{(1)}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) ЛРП u имеет единственный минимальный многочлен;
- (b) $\text{An}(u)$ — главный левый идеал кольца $R[x]$, порождаемый унитарным многочленом;
- (c) минимальный многочлен ЛРП u является ненулевым многочленом наименьшей степени в $\text{An}(u)$;
- (d) $r_6(u) = r_{10}(u)$.

Доказательство. Докажем, что (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $F(x)$ — единственный минимальный многочлен ЛРП u . Разделив произвольный многочлен $G(x) \in \text{An}(u)$ с остатком на $F(x)$ справа, получим, что

$$G(x) = Q(x)F(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg F(x).$$

Если $r(x) \neq 0$, то

$$r(x)u = G(x)u - Q(x)F(x)u = 0$$

и $F(x) + r(x)$ — минимальный многочлен ЛРП u , не равный $F(x)$, получаем противоречие. Следовательно, $r(x) = 0$, то есть

$$G(x) = Q(x)F(x) \in R[x]F(x).$$

Тем самым показано, что $\text{An}(u) \subseteq R[x]F(x)$. Очевидно, что верно и обратное включение. Следовательно, $\text{An}(u) = R[x]F(x)$ — главный левый идеал, порождаемый унитарным многочленом.

Докажем, что (b) $\Rightarrow$ (c). Пусть $\text{An}(u) = R[x]F(x)$, где $F(x)$ унитарен. Так как в левом идеале $R[x]F(x)$ нет ненулевых многочленов степени меньше $\deg F(x)$, то $F(x)$ является минимальным многочленом ЛРП u и выполняется условие (c).

Докажем, что (c) $\Leftrightarrow$ (d). Пусть $r_{10}(u) = m$. Согласно (2) m есть степень минимального многочлена ЛРП u . По предложению 9 $r_6 \leq m$. Условие $r_6 = m$ равносильно тому, что последовательности $u, xu, \dots, x^{m-1}u$ линейно независимы. Это означает, что в $\text{An}(u)$ не существует ненулевого многочлена степени меньше m . Таким образом, условия (c) и (d) равносильны.

Докажем, наконец, что (d) $\Rightarrow$ (a). Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — два различных минимальных многочлена ЛРП u степени m , то их разность есть ненулевой многочлен степени меньше m из $\text{An}(u)$.

Предложение 11. Пусть $k = 1$, R коммутативно, $u \in \mathcal{L}_R M^{(1)}$. Тогда

$$(a) \quad r_1 = r_2 = r_3 = r_{10} = r_{13} = r_{15};$$

$$(b) \quad r_{17} \leq r_{10}\nu, \text{ где } \nu = r_1(M).$$

Доказательство. Докажем (a). В силу (1) и предложения 3 $r_1 \leq r_2 \leq r_3 = r_{10}$, при этом согласно (2) r_{10} есть степень минимального многочлена ЛРП u . Предположим, что $r_1 < r_{10}$. Тогда $R[x]u = R(v_1, \dots, v_n)$, где $n < r_{10}$. Последовательности $xv_1, \dots, xv_n$ линейно выражаются через последовательности $v_1, \dots, v_n$, поэтому

$$(xv_1, \dots, xv_n) = (v_1, \dots, v_n)A$$

для некоторой матрицы $A \in R_n$. Легко видеть, что тогда характеристический многочлен $\chi_A(x)$ матрицы A является характеристическим многочленом последовательностей $v_1, \dots, v_n$, а значит, и последовательности u . Поскольку $\deg \chi_A(x) = n < r_{10}$, мы получили противоречие с тем, что r_{10} есть степень минимального многочлена ЛРП u . Следовательно, $r_1 \geq r_{10}$, откуда, $r_1 = r_2 = r_3 = r_{10}$.

В силу предложения 4(b) и соотношения (7) $r_{10} \leq r_{13} \leq r_{15}$. Докажем, что $r_{15} \leq r_{10}$. Пусть $\mathcal{F} = \{0, 1, \dots, m-1\}$ удовлетворяет определению r_{10} , то есть существует унитарный многочлен

$$H(x) = x^m - \sum_{i=0}^{m-1} h_i x^i$$

из $\text{An}(u)$. Тогда $\mathcal{F}, \varphi_1$, где

$$\varphi_1: M^{\mathcal{F}} \rightarrow M^{\mathcal{F}}, \quad \varphi_1(a_0, \dots, a_{m-1}) = (a_1, \dots, a_{m-1}, \sum_{i=0}^{m-1} h_i a_i),$$

удовлетворяют определению r_{15} (φ_1 является эндоморфизмом R -модуля $M^{\mathcal{F}}$ ввиду коммутативности кольца R). Следовательно, $r_{15} \leq r_{10}$. В итоге $r_{10} = r_{13} = r_{15}$.

Докажем (b). Пусть $F(x)$ — минимальный многочлен ЛРП u . Тогда

$$u \in L_M(F) \cong M^m,$$

где $m = \deg F(x) = r_{10}$. Следовательно,

$$r_{17}(u) \leq r_1(L_M(F)) = r_1(M^m) \leq m r_1(M) = r_{10}\nu.$$

Следствие 3. Пусть R коммутативно, $k = 1$, $u \in \mathcal{L}_R M^{(1)}$, $\nu = r_1(M)$. Тогда

$$\begin{aligned} r_6 \leq r_5 \leq r_4 \leq r_{18} \leq r_1 = r_2 = r_3 = r_{10} = r_{13} = r_{15} = \text{rank } u \leq r_{12}\nu, \\ r_7 \leq r_8 \leq r_9 \leq r_{12} \leq r_{14} \leq r_{11} \leq r_1, \quad r_4 \leq r_7\nu, \\ r_{16} \leq r_1, \quad r_{16} \leq r_{11}\nu, \quad r_{17} \leq r_{10}\nu, \quad r_{18} \leq r_7 \log_{|R|} |M|. \end{aligned}$$

Если при этом $M = R$, то

$$\begin{aligned} r_6 \leq r_5 \leq r_4 \leq r_{18} \leq r_7 \leq r_8 \leq r_9 \leq r_1 = r_2 = r_3 \\ = r_{10} = r_{11} = r_{12} = r_{13} = r_{14} = r_{15} = \text{rank } u, \\ r_{16} \leq r_1, \quad r_{17} \leq r_1, \end{aligned}$$

Доказательство. Указанные соотношения вытекают из следствия 2 и предложений 9, 11. При $M = R$ нужно учесть предложение 8 и равенство $\nu = 1$.

Таким образом, в случае, когда R коммутативно и $k = 1$, несколько значений линейной сложности имеют общее значение m :

$$m = r_1 = r_2 = r_3 = r_{10} = r_{13} = r_{15} = \text{rank } u. \quad (15)$$

Если к тому же $M = R$, то

$$m = r_1 = r_2 = r_3 = r_{10} = r_{11} = r_{12} = r_{13} = r_{14} = r_{15} = \text{rank } u. \quad (16)$$

Поэтому, если необходимо выделить какую-либо одну линейную сложность 1-последовательностей над коммутативным кольцом R , то это может быть указанное общее значение m .

Из предложения 10 и следствия 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. Пусть R коммутативно, $k = 1$, $u \in \mathcal{L}_R M^{(1)}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a) ЛРП u имеет единственный минимальный многочлен;
- (b) $r_6(u) = r_{10}(u)$;
- (c) $r_i(u) = \text{rank } u$, $i = 1, \dots, 6, 10, 13, 15, 18$.

Если при этом $M = R$, то (c) записывается следующим образом:

- (c') $r_i(u) = \text{rank } u$, $i = 1, \dots, 15, 18$.

9. Линейная сложность над телами и полями

Полученные выше результаты, справедливые для ЛРП над произвольными (коммутативными) кольцами и модулями над ними, можно рассматривать как нижнюю границу набора всех свойств линейной сложности. В этом смысле свойства и соотношения для линейной сложности ЛРП над телами, полями и векторными пространствами задают верхнюю границу, к которой могут приближаться свойства линейной сложности ЛРП над различными классами колец и модулей.

Предложение 12. Пусть R — тело, $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$, $\nu = \dim_R M \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $m = \dim_R R[x]u$. Тогда $m < \infty$ и справедливы следующие соотношения:

- (а) $m = r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = r_{10} = r_{16} \leq r_{13}$;
- (б) если $\nu < \infty$, то $r_7 =]m/\nu[$, где $]x[$ — наименьшее целое число, большее или равное x ; если $\nu = \infty$, то $r_7 = 0$ при $m = 0$ и $r_7 = 1$ при $m \geq 1$;
- (с) если $k = 1$, то ЛРП u имеет единственный минимальный многочлен и $r_{11} = m$.

Доказательство. Докажем (а). Пусть $\Pi = \Pi(m)$ — начальный параллелепипед ЛРП u . Тогда

$$R[x]u = {}_R(x^i u, i \in \Pi).$$

Следовательно, $R[x]u$ — конечно порожденное (левое) векторное пространство. Обозначим его размерность через m , $m < \infty$. Тогда $r_1 = r_4 = r_{16} = m$. Любая система образующих пространства $R[x]u$ содержит базис (см. [2]). Следовательно, система образующих $(x^i u, i \in \Pi)$ содержит базис $(x^i u, i \in \Omega)$. Отсюда, $r_2 = r_5 = m$. Докажем, что эта система образующих содержит базис специального вида $(x^i u, i \in \mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — диаграмма Ферре, и следовательно, $r_3 = r_6 = m$. Доказательство уточняет доказательство предложения 1.7(а) в [6] для пространств над полем.

Для наглядности рассмотрим случай $k = 2$. Требуемую диаграмму Ферре $\mathcal{F}$ построим по строкам. Расположим все сдвиги 2-ЛРП u в виде таблицы

$$\begin{array}{ccccccc} & u & x_1 u & x_1^2 u & x_1^3 u & \dots & \\ x_2 u & x_1 x_2 u & x_1^2 x_2 u & x_1^3 x_2 u & \dots & & \\ x_2^2 u & x_1 x_2^2 u & x_1^2 x_2^2 u & x_1^3 x_2^2 u & \dots & & \\ x_2^3 u & x_1 x_2^3 u & x_1^2 x_2^3 u & x_1^3 x_2^3 u & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \end{array}$$

нумерация строк и столбцов в которой начинается с нуля. Двигаясь по нулевой строке таблицы, включим в диаграмму $\mathcal{F}$ точки $(0, 0), (1, 0), \dots, (m_0 - 1, 0)$, где $m_0 \geq 0$ — наименьшее число, при котором сдвиг $x_1^{m_0} u$ линейно выражается через предыдущие сдвиги в нулевой строке. Тогда не только $x_1^{m_0} u$, но и все сдвиги в нулевой строке линейно выражаются через первые m_0 сдвигов. Двигаясь далее по первой строке таблицы, включим в диаграмму $\mathcal{F}$ точки $(0, 1), (1, 1), \dots, (m_1 - 1, 1)$, где m_1 — наименьшее неотрицательное число, при котором сдвиг $x_1^{m_1} x_2 u$ линейно выражается через первые m_0 сдвигов в нулевой строке и первые m_1 сдвигов в первой строке. Тогда $m_1 \leq m_0$, причем не только $x_1^{m_1} x_2 u$, но и все сдвиги в первой строке линейно выражаются через указанные $m_0 + m_1$ сдвигов. И так далее. Построение будет завершено, когда при некотором $r \geq 0$ сдвиг $x_2^r u$ будет линейно выражаться через $m_0 + \dots + m_{r-1}$ сдвигов, находящихся в предыдущих r строках. Тогда

$$m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_{r-1},$$

и не только $x_2^r u$, но и все сдвиги ЛРП u будут линейно выражаться через

$$m_0 + \dots + m_{r-1}$$

указанных сдвигов. Построенное множество

$$\mathcal{F} = \{(i, j): 0 \leq i < m_j, 0 \leq j < r\}$$

является диаграммой Ферре, и $(x^i u, i \in \mathcal{F})$ — система образующих пространства сдвигов $R[x]u$. По построению эта система образующих линейно независима, то есть является базисом. Тем самым доказано, что $r_3 = r_6 = m$. Ввиду предложения 3 $r_{10} = m$.

Неравенство $r_{10} \leq r_{13}$ доказано в предложении 4(b).

Докажем (b). Так как $R[x]u$ — пространство размерности m и M — пространство размерности ν , мономорфизм $R[x]u \rightarrow M^t$ существует тогда и только тогда, когда $m \leq t\nu$. При $\nu < \infty$ это равносильно тому, что $t \geq \lceil m/\nu \rceil$. Следовательно, $r_7 = \lceil m/\nu \rceil$. Случай $\nu = \infty$ тривиален.

Докажем (c). Единственность минимального многочлена следует из предложения 10. Согласно предложению 9 $r_{10} \geq r_{11}$. Докажем, что $r_{10} \leq r_{11}$. Пусть u является выходной последовательностью 1-ЛРС

$$\langle \chi, \{0, 1, \dots, l-1\} \rangle, \quad \chi \subseteq R[x], \quad l = r_{11}.$$

Так как $R[x]$ — кольцо главных левых (и главных правых) идеалов, то $R[x]\chi = R[x]F(x)$, где многочлен $F(x)$ можно считать унитарным. Тогда

$$L_M(\chi) = L_M(R[x]\chi) = L_M(R[x]F) = L_M(F)$$

и $\langle \chi, \{0, 1, \dots, l-1\} \rangle = \langle F(x), \{0, 1, \dots, l-1\} \rangle$ есть ЛРС. Из последнего следует, что $\deg F(x) = l$. А поскольку $u \in L_M(\chi) = L_M(F)$, то $r_{10} \leq \deg F(x) = l$, то есть $r_{10} \leq r_{11}$. В итоге $r_{10} = r_{11}$, то есть $r_{11} = m$.

Отметим, что для k -ЛРП над полем равенства $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6$ ранее были доказаны в [6].

Из предложения 12(b) и соотношений (1) следует, что

$$\lceil m/\nu \rceil = r_7 \leq r_8 \leq r_9.$$

Согласно примеру 5 неравенства $r_7 \leq r_8 \leq r_9$ для 1-ЛРП над векторными пространствами могут обращаться в равенства. Следующий пример показывает, что неравенство $r_7 \leq r_8$ может быть строгим даже если R — поле и $k = 1$. Пример, когда $m < r_{13}$ для ЛРП над векторным пространством, не найден.

Пример 10. Пусть R — поле, $M = R^2$,

$$u = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right) \in M^{(1)}.$$

Тогда, в обозначениях предложения 12, $m = r_{10} = 2$, $\nu = 2$, откуда, $r_7 = 1$. Легко увидеть, что $r_8 = r_9 = 2$, следовательно, $r_7 < r_8$.

Предложение 13. Пусть R — поле, $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$, $\nu = \dim_R M$, m — параметр, введенный в предложении 12. Тогда

- (a) $\lceil m/\nu \rceil = r_7 \leq r_8 \leq r_9 \leq m$, где при $\nu = \infty$ вместо $\lceil m/\nu \rceil$ нужно брать 0, если $m = 0$, и 1, если $m \geq 1$;
- (b) $m \leq r_{17} \leq m\nu$;
- (c) $m \leq r_{11}\nu$;

- (d) если R — конечное поле, то $r_{18} = m$;
 (e) если R — поле и $k = 1$, то $r_{13} = r_{15} = m$, $r_{17} = m\nu$;
 (f) если R — поле и $M = R$, то $r_i = m$, $i = 1, \dots, 18$.

Доказательство. Докажем (а). В силу предложения 6(b) над коммутативным кольцом $r_9 \leq r_3$, и требуемые соотношения вытекают из предложения 12.

Докажем (b). Если $u \in L_M(I)$, то $R[x]u \subseteq L_M(I)$ ввиду коммутативности R . Следовательно,

$$m = \dim_R R[x]u \leq \dim_R L_M(I) = r_1(L_M(I)),$$

откуда, $m \leq r_{17}$. Докажем, что $r_{17} \leq m\nu$.

Пусть $(x^i u, i \in \mathcal{F})$ — базис пространства $R[x]u$, где $\mathcal{F}$ — диаграмма Ферре мощности m (такой базис построен в доказательстве предложения 12(a)). Тогда для любого $r \in \Delta \mathcal{F}$ последовательность $x^r u$ линейно выражается через $(x^i u, i \in \mathcal{F})$:

$$x^r u = \sum_{i \in \mathcal{F}} h_{ri} x^i u, \quad h_{ri} \in R. \quad (17)$$

Положим

$$H_r(x) = \sum_{i \in \mathcal{F}} h_{ri} x^i. \quad (18)$$

Тогда $\chi = \{H_r(x), r \in \Delta \mathcal{F}\}$ — полная система $\mathcal{F}$ -унитарных многочленов из $\text{An}(u)$ и $u \in L_M(\chi)$. Так как, ввиду выбора χ , каждая последовательность $v \in L_M(\chi)$ определяется диаграммой значений $v[\mathcal{F}]$, отображение

$$\sigma: L_M(\chi) \rightarrow M^{\mathcal{F}}, \quad v \rightarrow v[\mathcal{F}], \quad (19)$$

является мономорфизмом и

$$\dim L_M(\chi) \leq \dim M^{\mathcal{F}} = |\mathcal{F}| \dim M = m\nu.$$

Для доказательства неравенства $r_{17} \leq m\nu$ остается проверить, что $L_M(\chi)$ есть ЛРП-семейство, то есть, что идеал $I = R[x]\chi$ унитарен. Из определения χ следует, что пространство $R[x]/I$ порождается элементами $(x^i + I, i \in \mathcal{F})$. Следовательно, $\dim R[x]/I \leq |\mathcal{F}| = m$. Тогда для любого $s = 1, \dots, k$ элементы $x_s^i + I, i = 0, 1, \dots, m$, линейно зависимы. Это означает, что I содержит унитарный многочлен $F_s(x_s)$ степени не выше m , $s \in \{1, \dots, k\}$, то есть что I унитарен.

Докажем (c). В силу предложений 12(a) и 6(f) $m = r_{16} \leq r_{11}\nu$.

Докажем (d). Если R конечно, то $r_{18} = \log_{|R|} |R[x]u| = \dim R[x]u = m$.

Докажем (e). По предложению 11 $r_{13} = r_{15} = m$ и $r_{17} \leq m\nu$. Докажем, что $r_{17} \geq m\nu$. Предположим, что $u \in L_M(I)$, где I унитарен, $r_1(L_M(I)) = r_{17}$. Так как $R[x]$ — кольцо главных идеалов, то $I = R[x]F(x)$ для некоторого унитарного многочлена $F(x)$. Тогда $u \in L_M(I) = L_M(F)$, и следовательно, $\deg F(x) \geq r_{10} = m$. Отсюда,

$$r_{17} = r_1(L_M(I)) = \dim L_M(I) = \dim L_M(F) = \deg F(x) \dim M \geq m\nu.$$

Докажем (f). Если $M = R$, то $\nu = 1$, и из (a), (b), (d) получаем, что

$$r_7 = r_8 = r_9 = r_{17} = r_{18} = m.$$

Ввиду (7) и предложения 8 $r_{12} = r_{13} \leq r_{14} = r_{15}$. По предложениям 4(b,c) и 6(d)

$$m = r_{10} \leq r_{13}, \quad r_{11} \leq r_{15}, \quad r_{11} \geq r_{14}.$$

Следовательно,

$$m \leq r_{12} = r_{13} \leq r_{14} = r_{15} = r_{11}.$$

Докажем, что $r_{11} \leq m$.

Пусть $\mathcal{F}$, χ , σ — те же, что и в доказательстве (b). Тогда $u \in L_M(\chi)$, и так как R коммутативно, то $R[x]u \subseteq L_M(\chi)$. Учитывая, что в нашем случае $M = R$, получаем, что

$$m = \dim R[x]u \leq \dim L_M(\chi) \leq \dim M^{\mathcal{F}} = |\mathcal{F}| = m.$$

Следовательно, $\dim L_M(\chi) = \dim M^{\mathcal{F}}$, и σ является не только мономорфизмом, но и изоморфизмом. Это означает, что пара $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$ есть k -ЛРС с выходом u , откуда, $r_{11} \leq |\mathcal{F}| = m$.

Суммируя сказанное, получим, что $r_i = m$ для всех $i = 1, \dots, 18$.

Пример 5 показывает, что неравенства $r_9 \leq m$, $m \leq r_{11}\nu$ в случае 1-ЛРП над векторным пространством над полем могут быть строгими. Неравенство $r_9 \leq m$, неравенство $m \leq r_{11}\nu$ при $\nu = 1$, а также оба неравенства $m \leq r_{17} \leq m\nu$ могут обращаться в равенства, это видно из формулировки предложения 13(e,f).

Доказательство предложения 13 дает способ построения k -линейных регистров сдвига и скалярных $\mathcal{F}$ -ЛРС систем для k -ЛРП над полем. Кратко изложим его здесь отдельно. Пусть R — поле, $u \in \mathcal{L}_R R^{(k)}$. В доказательстве предложения 12(a) указан способ построения базиса $(x^i u, i \in \mathcal{F})$ пространства сдвигов $R[x]u$, где $\mathcal{F}$ — диаграмма Ферре мощности $m = \dim R[x]u$. Пусть $\chi = \{H_r(x), r \in \Delta\mathcal{F}\}$ — полная система $\mathcal{F}$ -унитарных многочленов из $\text{An}(u)$, определяемых соотношениями (17), (18). Кроме того, определим отображения $\varphi_1, \dots, \varphi_k: R^{\mathcal{F}} \rightarrow R^{\mathcal{F}}$ следующим образом:

$$\varphi_s(\delta[\mathcal{F}]) = \lambda[\mathcal{F}], \quad (20)$$

где

$$\lambda(j) = \begin{cases} \delta(j + 1_s), & \text{если } j + 1_s \in \mathcal{F}, \\ \sum_{i \in \mathcal{F}} h_{r_i} \delta(i), & \text{если } j + 1_s = r \in \Delta\mathcal{F}, \end{cases}$$

$\delta[\mathcal{F}], \lambda[\mathcal{F}] \in R^{\mathcal{F}}$, $j \in \mathcal{F}$, $s = 1, \dots, k$. Из (20) следует, что $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \text{End}(R^{\mathcal{F}})$, и что выполняется условие (5) из определения $\mathcal{F}$ -ЛРС системы.

Следствие 5. Пусть R — поле, $M = R$, $u \in \mathcal{L}_R R^{(k)}$. Тогда при введенных выше обозначениях

(а) пара $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$ есть k -ЛРС, выходом которого является u ;

(б) $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ есть $\mathcal{F}$ -ЛРС система, для которой

$$u[i + \mathcal{F}] = \varphi^i(u[\mathcal{F}]), \quad i \in \mathbb{N}_0^k.$$

Доказательство. Утверждение (а) было получено при доказательстве предложения 13(f).

Докажем (b). Из (20) следует, что для произвольной последовательности $v \in L_R(\chi)$

$$\varphi_s(v[\mathcal{F}]) = v[1_s + \mathcal{F}], \quad s = 1, \dots, k. \quad (21)$$

Следовательно,

$$\varphi_s(\varphi_t(v[\mathcal{F}])) = v[1_s + 1_t + \mathcal{F}] = v[1_t + 1_s + \mathcal{F}] = \varphi_t(\varphi_s(v[\mathcal{F}])).$$

Таким образом, φ_s и φ_t перестановочны на диаграммах вида $v[\mathcal{F}]$, $v \in L_R(\chi)$. Так как, согласно доказательству предложения 13(f), отображение (19) биективно, то φ_s и φ_t перестановочны на всех диаграммах из $R^{\mathcal{F}}$, то есть они перестановочны. Следовательно, φ есть $\mathcal{F}$ -ЛРС система. При этом из (21) для $v = u$ следует, что

$$u[i + \mathcal{F}] = \varphi^i(u[\mathcal{F}]), \quad i \in \mathbb{N}_0^k.$$

Линейные регистры сдвига, построенные в следствии 5(a), аналогичны тем, которые рассматривались в работах Сакаты (см., например, [21, 22, 23]).

10. Линейная сложность в расширениях

Пусть $R \subseteq Q$ — расширение кольца R , $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$, $[1 \otimes u]$ — последовательность над модулем $Q \otimes M$, определенная в разделе 3. Здесь и далее $\otimes = \otimes^R$. Отметим, что канонический гомоморфизм R -модулей

$$\alpha: M \rightarrow Q \otimes M, \quad x \rightarrow 1 \otimes x, \quad (22)$$

не всегда является мономорфизмом (например, если $R = \mathbb{Z}$, $Q = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{Z}_2$).

Напомним (см. [5], стр. 46), что правый модуль Q_R называется локально свободным, если любое его конечное подмножество содержится в некотором свободном подмодуле модуля Q_R . Свободный модуль является локально свободным. Правый модуль Q_R называется плоским, если для любого мономорфизма R -модулей $\varphi: M \rightarrow N$ канонический гомоморфизм Q -модулей

$$1 \otimes \varphi: Q \otimes M \rightarrow Q \otimes N, \quad q \otimes n \rightarrow q \otimes \varphi(n),$$

является мономорфизмом. Свободный модуль является плоским (см. теорему 10.4.4 в [4]), и в силу следствия 10.4.6 в [4] каждый локально свободный модуль является плоским.

Исследуем модуль сдвигов $Q[x][1 \otimes u]$ последовательности $[1 \otimes u]$, получающейся при расширении $R \subseteq Q$ кольца R .

Лемма 2. Пусть $R \subseteq Q$ — расширение кольца R , $u \in M^{(k)}$. Тогда отображение

$$\psi: Q \otimes R[x]u \rightarrow Q[x][1 \otimes u], \quad q \otimes F(x)u \rightarrow qF(x)[1 \otimes u], \quad (23)$$

является эпиморфизмом Q -модулей. Если выполняется одно из условий

(а) правый модуль Q_R свободен;

(b) R коммутативно, правый модуль Q_R локально свободен, $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$,
то ψ — изоморфизм.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$Q \times R[x]u \rightarrow Q[x][1 \otimes u], \quad (q, F(x)u) \rightarrow qF(x)[1 \otimes u].$$

Это отображение билинейно над R , поэтому оно индуцирует гомоморфизм абелевых групп, задаваемый соотношением (23). Очевидно, ψ — гомоморфизм Q -модулей. Если

$$v = H(x)[1 \otimes u] \in Q[x][1 \otimes u],$$

где

$$H(x) = \sum h_j x^j \in Q[x],$$

то

$$v = \psi \left(\sum h_j \otimes x^j u \right).$$

Следовательно, ψ — эпиморфизм.

Пусть выполнено условие (a). Пусть $z \in Q \otimes R[x]u$, $\psi(z) = 0$. Элемент z представляется в виде

$$z = \sum q_j \otimes x^j u, \quad q_j \in Q,$$

где лишь конечное число q_j не равно нулю. Тогда

$$\psi(z) = \sum q_j x^j [1 \otimes u].$$

Равенство $\psi(z) = 0$ означает, что в модуле $Q \otimes M$ выполняются равенства

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0^k} q_j \otimes x^j u(i) = 0, \quad i \in \mathbb{N}_0^k. \quad (24)$$

Пусть $(\alpha_l, l \in L)$ — базис свободного правого модуля Q_R . Запишем элементы q_j в виде

$$q_j = \sum_{l \in L} \alpha_l r_{jl}, \quad r_{jl} \in R, \quad (25)$$

где для каждого j лишь конечное число элементов r_{jl} не равно 0. Тогда согласно (24) для каждого $i \in \mathbb{N}_0^k$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0^k} \sum_{l \in L} \alpha_l r_{jl} \otimes x^j u(i) = \sum_{l \in L} \alpha_l \otimes w_l(i) = 0 \quad (26)$$

в модуле $Q \otimes M$, где

$$w_l = \sum_{j \in \mathbb{N}_0^k} r_{jl} x^j u \in R[x]u, \quad l \in L. \quad (27)$$

В силу свойства перестановочности прямых сумм и тензорных произведений (см. предложение 10.2.3 в [4]),

$$Q \otimes M = \left(\bigoplus \alpha_l R \right) \otimes M = \bigoplus (\alpha_l R \otimes M),$$

причем $\alpha_l R \otimes M \cong R \otimes M \cong M$. Поэтому из (26) следует, что $w_l(i) = 0$, $l \in L$, $i \in N_0^k$, то есть $w_l = 0$, $l \in L$. Теперь

$$z = \sum_{j \in N_0^k} q_j \otimes x^j u = \sum_{j \in N_0^k} \sum_{l \in L} \alpha_l r_{jl} \otimes x^j u = \sum_{l \in L} \alpha_l \otimes w_l = 0. \quad (28)$$

Следовательно, ψ — мономорфизм.

Пусть выполнено условие (b). Как и в случае (a), пусть $z \in Q \otimes R[x]u$, $\psi(z) = 0$, то есть для любого $i \in N_0^k$ выполняется соотношение (24). Пусть Π — начальный параллелепипед k -ЛРП u . Тогда, ввиду (24),

$$\sum_{j \in N_0^k} q_j \otimes x^j u(i) = 0, \quad i \in \Pi, \quad (29)$$

в модуле $Q \otimes M$. Стандартные рассуждения (см., например, лемму 6.2 на стр. 47 в [5], доказательство предложения 10.4.5 на стр. 255 в [4]) показывают, что конечное число равенств (29) выполняется также в модуле $Q' \otimes M$, где Q' — конечно порожденный подмодуль правого модуля Q_R , содержащий все элементы q_j (Q' порождается элементами q_j и элементами из Q , участвующими в выводе всех $|\Pi|$ равенств (29) с использованием определения тензорного произведения $Q \otimes M$). Так как Q_R локально свободен, то $Q' \subseteq Q''$, где Q''_R свободный. Равенства (29) выполняются также в $Q'' \otimes M$. Пусть $(\alpha_l, l \in L)$ — базис Q''_R . Представим элементы q_j в виде (25). Тогда при всех $i \in \Pi$ в модуле $Q'' \otimes M$ выполняются равенства (26), в которых последовательности w_l определены в (27). Отсюда получаем, что $w_l(i) = 0$, $l \in L$, $i \in \Pi$, то есть $w_l[\Pi] = 0$, $l \in L$. Так как $w_l \in R[x]u$ и R коммутативно, то Π является начальным параллелепипедом k -ЛРП w_l . Следовательно, $w_l = 0$, $l \in L$. Теперь соотношения (28) показывают, что $z = 0$. Поэтому ψ — мономорфизм.

В дальнейшем мы будем использовать сокращенные обозначения

$$r_i = r_i(u), \quad r_i^Q = r_i^Q(1 \otimes u).$$

Предложение 14. Пусть $R \subseteq Q$, $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$. Тогда

$$\text{An}_{R[x]}(u) \subseteq \text{An}_{Q[x]}([1 \otimes u])$$

и $[1 \otimes u]$ — k -ЛРП над Q -модулем $Q \otimes M$ с теми же элементарными характеристическими многочленами, что и k -ЛРП u . Справедливы следующие свойства.

- (a) $r_i \geq r_i^Q$, $i = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 16$.
- (b) Если отображение (22) является мономорфизмом, то $r_8 \leq r_8^Q$, $r_9 \leq r_9^Q$.
- (c) Если правый модуль Q_R локально свободен, то $r_8 \geq r_8^Q$, $r_9 \geq r_9^Q$.
- (d) Если R коммутативно и правый модуль Q_R локально свободен, то

$$r_4 \leq r_4^Q, \quad r_5 = r_5^Q, \quad r_6 = r_6^Q, \quad r_7 \geq r_7^Q.$$

- (e) Если правый модуль Q_R свободен, то

$$r_4 \leq r_4^Q, \quad r_5 = r_5^Q, \quad r_6 = r_6^Q, \quad r_7 \geq r_7^Q.$$

Доказательство. Пусть

$$F(x) = \sum f_j x^j \in \text{An}_{R[x]}(u), \quad v = F(x)[1 \otimes u].$$

Тогда для любого $i \in \mathbf{N}_0^k$

$$\begin{aligned} v(i) &= \sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} (f_j x^j [1 \otimes u])(i) = \sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} f_j \otimes u(i+j) \\ &= 1 \otimes \sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} f_j u(i+j) = 1 \otimes 0 = 0, \end{aligned}$$

то есть $v = 0$. Это доказывает первую часть предложения.

Докажем теперь утверждение (а). Если R -модуль $R[x]u$ порождается последовательностями $v_1, \dots, v_n$, то Q -модуль $Q[x][1 \otimes u]$ порождается последовательностями $[1 \otimes v_1], \dots, [1 \otimes v_n]$. Отсюда следует, что $r_1 \geq r_1^Q$. Неравенства $r_2 \geq r_2^Q$ и $r_3 \geq r_3^Q$ проверяются аналогично. Ввиду предложения 3 $r_{10} \geq r_{10}^Q$.

Если последовательности $(x^i[1 \otimes u], i \in \Omega)$ линейно независимы над Q , то последовательности $(x^i u, i \in \Omega)$ линейно независимы над R (предположить противное). Следовательно, $r_5 \geq r_5^Q$. Аналогично, $r_6 \geq r_6^Q$.

Если $R[x]u \subseteq R(v_1, \dots, v_n)$, то

$$Q[x][1 \otimes u] \subseteq Q([1 \otimes v_1], \dots, [1 \otimes v_n]).$$

Следовательно, $r_{16} \geq r_{16}^Q$.

Докажем (b). Пусть Ω — определяющее множество для последовательности $[1 \otimes u]$ в смысле определения r_8^Q . Докажем, что Ω — определяющее множество для последовательности u в смысле определения r_8 . Пусть $v \in R[x]u$, $v[\Omega] = 0$. Тогда $[1 \otimes v] \in Q[x][1 \otimes u]$ и

$$[1 \otimes v](i) = 1 \otimes v(i) = 1 \otimes 0 = 0, \quad i \in \Omega,$$

то есть $[1 \otimes v][\Omega] = 0$. Следовательно, $[1 \otimes v] = 0$, то есть

$$1 \otimes v(i) = 0, \quad i \in \mathbf{N}_0^k.$$

Так как отображение (22) является мономорфизмом, то $v(i) = 0$, $i \in \mathbf{N}_0^k$, то есть $v = 0$. Этим доказано, что Ω — определяющее множество для последовательности u в смысле определения r_8 . Отсюда следует, что $r_8 \leq r_8^Q$. Доказательство неравенства $r_9 \leq r_9^Q$ получается заменой Ω на $\mathcal{F}$.

Докажем (с). Пусть Ω — определяющее множество для последовательности u в смысле определения r_8 . Докажем, что Ω — определяющее множество для последовательности $[1 \otimes u]$ в смысле определения r_8^Q . Пусть

$$v \in Q[x][1 \otimes u], \quad v[\Omega] = 0.$$

Тогда v представляется в виде

$$v = \sum q_j x^j [1 \otimes u], \quad q_j \in Q,$$

и

$$v(i) = \sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} q_j \otimes x^j u(i) = 0, \quad i \in \Omega, \quad (30)$$

в модуле $Q \otimes M$. Будем рассуждать, как в доказательстве леммы 2. Равенства (30) выполняются также в модуле $Q'' \otimes M$, где Q'' — свободный подмодуль правого модуля Q_R . Пусть $(\alpha_l, l \in L)$ — базис Q''_R . Запишем элементы q_j в виде (25). Тогда для всех $i \in \Omega$ в модуле $Q'' \otimes M$ выполняются равенства (26), где $w_l \in R[x]u$ определены в (27). Из (26) следует, что $w_l(i) = 0, l \in L, i \in \Omega$, то есть $w_l[\Omega] = 0, l \in L$. Так как Ω — определяющее множество для ЛРП u в смысле определения r_8 , то $w_l = 0, l \in L$. Теперь для любого $i \in \mathbf{N}_0^k$

$$v(i) = \sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} q_j \otimes x^j u(i) = \sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} \sum_{l \in L} \alpha_l r_{jl} \otimes x^j u(i) = \sum_{l \in L} \alpha_l \otimes w_l(i) = 0$$

в модулях $Q'' \otimes M$ и $Q \otimes M$. Следовательно, $v = 0$. Из доказанного вытекает неравенство $r_8 \geq r_8^Q$. Доказательство того, что $r_9 \geq r_9^Q$, получается заменой Ω на $\mathcal{F}$.

Докажем (d) и (f). Докажем неравенства $r_i \leq r_i^Q, i = 4, 5, 6$. Пусть последовательности $v_1, \dots, v_n \in R[x]u$ линейно независимы над R . Тогда последовательности $[1 \otimes v_1], \dots, [1 \otimes v_n]$ принадлежат $Q[x][1 \otimes u]$. Докажем, что они линейно независимы над Q . Предположим, что

$$\sum q_j [1 \otimes v_j] = 0, \quad q_j \in Q, \quad j = 1, \dots, n.$$

Рассматривая прообраз этой последовательности при действии изоморфизма ψ из леммы 2, получим, что

$$\sum q_j \otimes v_j = 0$$

в модуле $Q \otimes R[x]u$. Отсюда, в силу лемма 6.2 на стр. 47 в [5], $q_j = 0, j = 1, \dots, n$, что и требовалось. Из доказанного следует, что $r_4 \leq r_4^Q$.

Аналогично доказываются неравенства $r_5 \leq r_5^Q, r_6 \leq r_6^Q$. С учетом (а) получаем, что $r_5 = r_5^Q, r_6 = r_6^Q$.

Докажем неравенство $r_7 \geq r_7^Q$. Пусть $\varphi: R[x]u \rightarrow M^t$ — мономорфизм R -модулей. Рассмотрим композицию Q -гомоморфизмов

$$\varphi_1: Q[x][1 \otimes u] \xrightarrow{\psi^{-1}} Q \otimes R[x]u \xrightarrow{1 \otimes \varphi} Q \otimes M^t \xrightarrow{\alpha} (Q \otimes M)^t,$$

где ψ — изоморфизм из леммы 2, $1 \otimes \varphi$ — канонический гомоморфизм, α — канонический изоморфизм. Так как правый модуль Q_R локально свободен, он является плоским, и $1 \otimes \varphi$ — мономорфизм. Следовательно, φ_1 — мономорфизм Q -модулей. Отсюда следует, что $r_7 \geq r_7^Q$.

Отметим, что в предложении 14(а) отсутствует неравенство $r_4 \geq r_4^Q$. Его не удалось ни доказать, ни опровергнуть примером. Это неравенство верно в случае, когда R — левая область Оре и Q — ее левое тело частных (см. предложение 16(а)). Следующие примеры показывают, что неравенства $r_i \geq r_i^Q, i = 1, 2, 3, 7, 8, 9, 16$, доказанные в различных пунктах предложения 14, могут быть строгими.

Пример 11. Пусть $R = \mathbf{Z}$, $M = Z_4$, $u = (2, 2, 2, \dots) \in M^{(1)}$, и $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ — расширение кольца $\mathbf{Z}$. Тогда соответствующее расширение модуля Z_4 равно $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} Z_4 = 0$. Следовательно, $[1 \otimes u] = 0$. В этом примере

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_7 = r_8 = r_9 = r_{10} = r_{16} = 1, \quad r_4 = r_5 = r_6 = 0,$$

и $r_i^Q = 0$, $i = 1, \dots, 17$.

Рассмотрим более содержательный пример 1-ЛРП над коммутативной областью целостности R .

Пример 12. Пусть P — поле, α, β — свободные коммутирующие переменные,

$$R = P[\alpha, \beta]/(\alpha^2 - \beta^3).$$

Так как многочлен $x^2 - y^3 \in P[x, y]$ неприводим, порождаемый им идеал в кольце $P[x, y]$ является простым. Отсюда следует, что R — коммутативное кольцо без делителей нуля. Рассмотрим последовательность

$$u = (\beta, \alpha, \beta^2, \alpha\beta, \beta^3, \alpha\beta^2, \dots, \beta^{i+1}, \alpha\beta^i, \dots) \in R^{(1)}.$$

Легко видеть, что u есть ЛРП с минимальным многочленом $F(x) = x^2 - \beta$. Поэтому $r_{10} = 2$. В силу следствия 3

$$r_i = \text{rank } u = 2, \quad i = 1, 2, 3, 10, \dots, 15,$$

а также $r_{16}, r_{17} \leq 2$.

Пусть Q — поле частных кольца R . Тогда u — ЛРП над Q с минимальным многочленом $x - \alpha/\beta$. Следовательно, $r_{10}^Q = 1$. По предложению 13(e)

$$r_i^Q = 1, \quad i = 1, \dots, 17.$$

Так как $M = R$, отображение (22) является мономорфизмом. Поле частных Q всегда является локально свободным правым R -модулем (см. [5], стр. 47). Следовательно, по предложению 14(b,d),

$$r_i \leq r_i^Q, \quad i = 4, 5, 6, 8, 9.$$

Отсюда,

$$r_4 = r_5 = r_6 = r_8 = r_9 = 1.$$

Так как $r_7 \leq r_8$ в силу (1), то $r_7 = 1$.

В последнем примере $r_i > r_i^Q$, $i = 1, 2, 3, 10, \dots, 15$. Кроме того, этот пример является иллюстрацией к предложению 9.

Рассмотрим теперь расширения тел и полей.

Предложение 15. Пусть $R \subseteq Q$ — расширение тел,

$$u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}, \quad \nu = r_1(M) = \dim_R M, \quad t = r_1(u).$$

Тогда

$$r_i = r_i^Q = t, \quad i = 1, \dots, 6, 10, 16, \quad]t/\nu[= r_7 = r_7^Q \leq r_8 = r_8^Q \leq r_9 = r_9^Q,$$

где при $\nu = \infty$ вместо $]t/\nu[$ нужно брать 0, если $t = 0$, и 1, если $t \geq 1$. Справедливы следующие утверждения.

(а) Если $k = 1$, то минимальный многочлен ЛРП u над телом R совпадает с минимальным многочленом ЛРП $[1 \otimes u]$ над телом Q , и $r_{11} = r_{11}^Q = m$.

(b) Если R — поле, то $r_9 \leq m$.

(c) Если $R \subseteq Q$ — расширение полей и $k = 1$, то

$$r_{13} = r_{13}^Q = r_{15} = r_{15}^Q = m, \quad r_{17} = r_{17}^Q = m\nu.$$

(d) Если $R \subseteq Q$ — расширение полей и $M = R$, то

$$r_i = r_i^Q = m, \quad i = 1, \dots, 18.$$

(e) Если $R \subseteq Q$ — расширение конечных полей, то $r_{18} = r_{18}^Q = m$.

Доказательство. По предложению 12(а) $r_i = m$, $i = 1, \dots, 6, 10, 16$. По этому же предложению параметры r_i^Q , $i = 1, \dots, 6, 10, 16$, равны друг другу. Так как модуль Q_R свободный, по предложению 14(е) $r_5 = r_5^Q$. Следовательно, $r_i = r_i^Q = m$, $i = 1, \dots, 6, 10, 16$.

Далее, по предложению 12(б) $r_7 =]m/\nu[$, $r_7^Q =]m/\nu^Q[$, где $\nu^Q = \dim_Q Q \otimes M$. Так как $M = R^\nu$ — пространство размерности ν над R , то

$$Q \otimes M = Q \otimes R^\nu = Q^\nu$$

— пространство размерности ν над Q . Следовательно, $\nu = \nu^Q$ и $r_7 = r_7^Q =]m/\nu[$. В силу (1) $r_7 \leq r_8 \leq r_9$. Так как модуль ${}_R M$ свободный, он является плоским, поэтому гомоморфизм (22) является мономорфизмом. В силу предложения 14(б,с) $r_8 = r_8^Q$, $r_9 = r_9^Q$. Первая часть предложения доказана.

Докажем (а). По предложению 12(с) $r_{11} = r_1$ и $r_{11}^Q = r_1^Q$, откуда в силу уже доказанного $r_{11} = r_{11}^Q = m$. По этому же предложению минимальные многочлены последовательностей u и $[1 \otimes u]$ определены однозначно, а по предложению 14 минимальный многочлен ЛРП u является характеристическим многочленом ЛРП $[1 \otimes u]$. Так как $r_{10} = r_{10}^Q$, он является минимальным многочленом ЛРП $[1 \otimes u]$.

Утверждение (b) следует из предложения 13(а).

Докажем (с). Так как $r_1 = r_1^Q = m$, в силу предложения 13(е) $r_{13} = r_{15} = m$, $r_{17} = m\nu$, а также $r_{13}^Q = r_{15}^Q = m$, $r_{17}^Q = m\nu^Q$. При этом $\nu = \nu^Q$, как показано выше.

Докажем (d). По предложению 13(f)

$$r_i = r_1, \quad r_i^Q = r_1^Q, \quad i = 1, \dots, 18.$$

Остается заметить, что $r_1 = r_1^Q$ по доказанному.

Докажем (е). Пользуясь предложением 13(d) и уже доказанным, получаем, что

$$r_{18} = r_1 = r_1^Q = r_{18}^Q.$$

11. Линейная сложность над областями Оре и Безу

Напомним, что кольцо R называется областью целостности, если оно не содержит левых и правых делителей нуля. Область целостности R называется левой областью Оре, если выполняется левое условие Оре

$$\forall a, b \in R \setminus 0 \quad Ra \cap Rb \neq 0, \quad (31)$$

то есть любые два ненулевые главные левые идеалы имеют ненулевое пересечение. Любая нетерова слева область целостности является левой областью Оре (см. [5], стр. 47). Всякая коммутативная область целостности, очевидно, удовлетворяет левому условию Оре.

Основное свойство левой области Оре R заключается в том, что она вложима в тело, называемое левым телом частных кольца R . Это тело строится следующим образом (см. [5], стр. 39, [12], стр. 163). На множестве пар (a, b) , $a \in R$, $b \in R \setminus 0$, определим отношение эквивалентности $\sim$, полагая

$$(a, b) \sim (c, d) \iff \exists u, v \in R \setminus 0 \quad va = uc, \quad vb = ud \neq 0. \quad (32)$$

Классы эквивалентности будем называть дробями и записывать их в виде

$$\frac{a}{b} = a/b = b^{-1}a.$$

Для любого $s \in R \setminus 0$ верно равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{sa}{sb}$$

(в (32) положить $u = 1$, $v = s$). На множестве Q всех дробей вводятся операции сложения и умножения. Любые две дроби a/b , $c/d \in Q$ можно привести к общему знаменателю: в силу (31)

$$\exists s, t \in R \setminus 0 \quad sb = td = w \neq 0,$$

тогда

$$\frac{a}{b} = \frac{sa}{sb} = \frac{sa}{w}, \quad \frac{c}{d} = \frac{tc}{td} = \frac{tc}{w},$$

и мы полагаем

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{sa + tc}{w}.$$

Кроме того, из (31) следует, что

$$\exists u, v \in R, u \neq 0 \quad ua = vd, \quad (33)$$

и мы полагаем

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{vc}{ub}.$$

Следующая цепочка равенств в Q показывает естественность такого определения:

$$ub \frac{a}{b} \frac{c}{d} = ubb^{-1}ad^{-1}c = uad^{-1}c = vdd^{-1}c = vc.$$

Отметим, что

$$\frac{1}{b} \frac{c}{d} = \frac{c}{db}$$

(в (33) положить $u = d, v = 1$) и

$$\frac{a}{b} \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$$

(в (33) положить $u = 1, v = a$). Введенные операции определены корректно (их результат не зависит от представителей классов эквивалентности и от выбора элементов s, t, u, v), и $(Q, +, \cdot)$ есть тело. Отображение $R \rightarrow Q, a \rightarrow a/1$, является мономорфизмом. Мы отождествляем элементы $a \in R$ и $a/1 \in Q$ и считаем, что $R \subseteq Q$. При этом соглашении в кольце Q верно равенство $a/b = b^{-1}a$. Левое тело частных Q является локально свободным правым R -модулем (см. [5], стр. 47–48).

Отметим, что любое конечное число дробей в кольце Q можно привести к общему знаменателю:

$$\forall \frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \in Q \quad \exists c_1, \dots, c_n \in R \quad \exists b \in R \setminus 0 \quad \frac{a_i}{b_i} = \frac{c_i}{b}, \quad i = 1, \dots, n.$$

При $n = 2$ это проверено выше. Если n дробей уже приведено к общему знаменателю и $a_{n+1}/b_{n+1} \in Q$, то в силу (31) существуют $s, t \in R \setminus 0$ такие, что $sb = tb_{n+1} = w \neq 0$. Тогда

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{c_i}{b} = \frac{sc_i}{sb} = \frac{sc_i}{w}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{ta_{n+1}}{tb_{n+1}} = \frac{ta_{n+1}}{w},$$

и $n + 1$ дробей приведено к общему знаменателю.

Если M — левый модуль над левой областью Оре R с левым телом частных Q , то Q -модуль $Q \overset{R}{\otimes} M$ называется левым модулем частных модуля M . Канонический гомоморфизм R -модулей, определенный в (22), в данной ситуации имеет ядро, совпадающее с периодической частью модуля M :

$$\text{Ker } \alpha = t(M) = \{x \in M : \exists a \in R \setminus 0 \quad ax = 0\}.$$

В частности, α — мономорфизм тогда и только тогда, когда $t(M) = 0$, то есть ${}_R M$ — модуль без кручения (см. [5], следствие на стр. 46).

Лемма 3. Пусть ${}_R M$ — модуль без кручения над левой областью Оре R с левым телом частных Q , $u \in M^{(k)}$. Тогда эпиморфизм ψ из леммы 2 является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть $z \in Q \otimes R[x]u$, $\psi(z) = 0$. Элемент z представляется в виде

$$z = \sum q_j \otimes x^j u, \quad q_j \in Q,$$

где лишь конечное число $q_j \neq 0$. Тогда в модуле $Q \otimes M$ выполняются равенства (24). Приведем дроби q_j , $j \in \mathbb{N}_0^k$, к общему знаменателю:

$$q_j = \frac{a_j}{b}, \quad a_j \in R, \quad b \in R \setminus 0.$$

Тогда соотношение (24) запишется в виде

$$\frac{1}{b} \sum_{j \in \mathbb{N}_0^k} a_j \otimes x^j u(i) = 0, \quad i \in \mathbb{N}_0^k.$$

Умножив слева на b , получим, что

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} a_j \otimes x^j u(i) = 1 \otimes \sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} a_j x^j u(i) = 0, \quad i \in \mathbf{N}_0^k.$$

Так как ${}_R M$ — модуль без кручения, гомоморфизм α , определенный в (22), является мономорфизмом. Следовательно,

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} a_j x^j u(i) = 0, \quad i \in \mathbf{N}_0^k,$$

то есть

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} a_j x^j u = 0.$$

Отсюда,

$$z = \sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} q_j \otimes x^j u = \frac{1}{b} \sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} a_j \otimes x^j u = \frac{1}{b} \otimes \sum_{j \in \mathbf{N}_0^k} a_j x^j u = 0.$$

Тем самым показано, что ψ — мономорфизм.

Предложение 16. Пусть ${}_R M$ — модуль над левой областью Оре R с левым телом частных Q , $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$. Пусть

$$m = \dim_Q Q[x][1 \otimes u], \quad \nu = r_1({}_R M), \quad \nu^Q = r_1(QQ \otimes M) = \dim_Q Q \otimes M.$$

Тогда $m < \infty$, $\nu^Q = r_4({}_R M) \leq r_1({}_R M) = \nu$ и

$$m = r_i^Q, \quad i = 1, \dots, 6, 10, 16.$$

Справедливы следующие утверждения.

- (a) $r_i \geq m$, $i = 1, \dots, 6, 10, 16$.
- (b) $r_8 \geq r_8^Q$, $r_9 \geq r_9^Q$, $]m/\nu^Q[= r_7^Q \leq r_8^Q \leq r_9^Q$, где при $\nu = \infty$ вместо $]m/\nu[$ нужно брать 0, если $m = 0$, и 1, если $m \geq 1$.
- (c) Если ${}_R M$ — модуль без кручения, то

$$r_4 = r_5 = r_6 = m, \quad r_7 \geq r_7^Q, \quad r_8 = r_8^Q, \quad r_9 = r_9^Q.$$

Доказательство. Ввиду предложения 14 $[1 \otimes u]$ есть k -ЛРП над Q -модулем $Q \otimes M$. Неравенство $m < \infty$ и равенства $r_i^Q = m$, $i = 1, \dots, 6, 10, 16$, доказаны в предложении 12(а). В силу [5] (см. стр. 47–48) наибольшее число линейно независимых элементов произвольного модуля ${}_R M$ равно размерности векторного пространства $Q \otimes M$ над телом Q (где R — левая область Оре, а Q — ее левое тело частных). В наших обозначениях это значит, что $r_4({}_R M) = \nu^Q$. Если R -модуль M порождается элементами $x_1, \dots, x_n$, то Q -модуль $Q \otimes M$ порождается элементами $1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n$. Следовательно, $r_1(QQ \otimes M) \leq r_1({}_R M)$, то есть $\nu^Q \leq \nu$.

Докажем (а). По предложению 14(а) $r_i \geq m$, $i = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 16$. Остается доказать, что $r_4 \geq m$. В силу леммы 2 векторное пространство $Q[x][1 \otimes u]$ есть эпиморфный образ пространства $Q \otimes R[x]u$. Следовательно,

$$\dim_Q Q[x][1 \otimes u] \leq \dim_Q Q \otimes R[x]u,$$

то есть $m \leq \dim_Q Q \otimes R[x]u$. В силу [5] (см. стр. 47–48)

$$\dim_Q Q \otimes R[x]u = r_4({}_R R[x]u).$$

В итоге $m \leq r_4({}_R R[x]u) = r_4$.

Докажем (b). Поскольку правый модуль Q_R локально свободен, по предложению 14(c)

$$r_8 \geq r_8^Q, \quad r_9 \geq r_9^Q.$$

По предложению 12(b) $r_7^Q =]m/\nu^Q[$. Неравенства $r_7^Q \leq r_8^Q \leq r_9^Q$ взяты из (1).

Докажем (c). По лемме 3 векторные пространства $Q[x][1 \otimes u]$ и $Q \otimes R[x]u$ изоморфны. Как и в доказательстве (a),

$$r_4 = r_4(R[x]u) = \dim_Q Q \otimes R[x]u = \dim_Q Q[x][1 \otimes u] = r_4^Q = m.$$

В силу (1) $r_4 \geq r_5 \geq r_6$ и в силу (a) $r_6 \geq m$. Следовательно, $r_4 = r_5 = r_6 = m$.

Неравенство $r_7 \geq r_7^Q$ доказывается точно так же, как и в доказательстве предложения 14(d,e), только вместо леммы 2 нужно использовать лемму 3. Так как ${}_R M$ — модуль без кручения, гомоморфизм (22) является мономорфизмом, и по предложению 14(b) $r_8 \leq r_8^Q$, $r_9 \leq r_9^Q$. С учетом (b) получаем, что $r_8 = r_8^Q$, $r_9 = r_9^Q$.

Предложение 17. Если в условиях предложения 16 R коммутативно (то есть R — коммутативная область целостности), $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$, то к утверждениям предложения 16 добавляются следующие:

- (a) $r_4 = r_5 = r_6 = m$;
- (b) $r_7 \geq r_7^Q$, $r_9^Q \leq m$;
- (c) $r_{18} = r_{18}^Q = m$;
- (d) если ${}_R M$ — модуль без кручения, то $r_7 = r_7^Q$;
- (e) если $M = R$, то $r_i = r_i^Q = m$, $i = 7, 8, 9$, $r_i \geq m$, $i = 11, 12, 13, 14, 15$.

Доказательство. Утверждение (a) следует из предложений 14(d) и 16.

Утверждение (b) вытекает из предложений 14(d) и 13(a).

Докажем (c). Если R — конечная область целостности, то R — конечное поле, и равенства $r_{18} = r_{18}^Q = m$ следуют из предложений 13(d) и 15(e).

Докажем (e). Пусть $\varphi: Q[x][1 \otimes u] \rightarrow (Q \otimes M)^t = Q \otimes M^t$ — мономорфизм Q -модулей. Для доказательства неравенства $r_7 \leq r_7^Q$ достаточно построить мономорфизм R -модулей $\varphi_1: R[x]u \rightarrow M^t$. Пусть Π — начальный параллелепипед k -ЛРП u . Тогда R -модуль $R[x]u$ порождается последовательностями $x^i u$, $i \in \Pi$, а Q -модуль $Q[x][1 \otimes u]$ — последовательностями $[1 \otimes x^i u] = x^i[1 \otimes u]$, $i \in \Pi$. Образ $\varphi(x^i[1 \otimes u])$, как элемент модуля $Q \otimes M^t$, представляется в виде

$$\varphi(x^i[1 \otimes u]) = \varphi([1 \otimes x^i u]) = \sum_j q_{ij} \otimes m_{ij}, \quad i \in \Pi,$$

где $q_{ij} \in Q$, $m_{ij} \in M^t$. Приведем все дроби q_{ij} к общему знаменателю: $q_{ij} = a_{ij}/b$, $a_{ij} \in R$, $b \in R \setminus 0$. Тогда

$$\varphi([1 \otimes x^i u]) = \frac{1}{b} \sum_j a_{ij} \otimes m_{ij} = \frac{1}{b} 1 \otimes \sum_j a_{ij} m_{ij}, \quad i \in \Pi.$$

Так как M^t — модуль без кручения, канонический гомоморфизм

$$\beta: M^t \rightarrow Q \otimes M^t, \quad m \rightarrow 1 \otimes m,$$

является мономорфизмом. При этом элементы $b\varphi([1 \otimes x^i u])$, $i \in \Pi$, принадлежат образу $\beta(M^t)$. Так как R коммутативно, то $b\varphi([1 \otimes v]) \in \beta(M^t)$ для всех $v \in R[x]u$. Поэтому можно определить

$$\varphi_1(v) = \beta^{-1}(b\varphi([1 \otimes v])), \quad v \in R[x]u.$$

Очевидно, $\varphi_1: R[x]u \rightarrow M^t$ — корректно определенный гомоморфизм R -модулей. Проверим, что φ_1 — мономорфизм. Если $\varphi_1(v) = 0$, то $b\varphi([1 \otimes v]) = 0$ в модуле $Q \otimes M^t$. Умножив на дробь $1/b$, получим, что $\varphi([1 \otimes v]) = 0$. Так как φ — мономорфизм, то $[1 \otimes v] = 0$. Это означает, что $1 \otimes v(i) = 0$, $i \in N_0^k$, в модуле $Q \otimes M$. Так как отображение α , определенное в (22), является мономорфизмом, то $v(i) = 0$, $i \in N_0^k$, то есть $v = 0$. Таким образом, φ_1 — мономорфизм, и $r_7 \leq r_7^Q$.

Докажем (е). Если $M = R$, то $Q \otimes M = Q$ и $\nu = \nu^Q = 1$. Из предложения 16(b,c) и неравенства $r_9^Q \leq m$ теперь следует, что $r_i = r_i^Q = m$, $i = 7, 8, 9$. Кроме того, по предложению 6(c) $r_{11} \geq r_9$, а по предложению 4(a) $r_{12} \geq r_9$. С учетом (7) получаем, что $r_i \geq m$, $i = 11, \dots, 15$.

Пример 11 показывает, что если ${}_R M$ — модуль с кручением над коммутативной областью целостности R и $k = 1$, то могут выполняться неравенства $r_i > m$, $i = 1, 2, 3, 7, \dots, 17$. Более того, согласно примеру 12, неравенства $r_i > m$, $i = 1, 2, 3, 10, \dots, 15$, могут выполняться, даже если $M = R$ — коммутативная область целостности и $k = 1$.

В силу предложений 16 и 17 если ${}_R M$ — модуль над левой областью Оре R с левым телом частных Q и либо ${}_R M$ — модуль без кручения, либо кольцо R коммутативно, то следующие параметры k -ЛРП $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$ имеют общее значение m :

$$m = \dim_Q Q[x][1 \otimes u] = r_4 = r_5 = r_6 = r_i^Q, \quad i = 1, \dots, 6, 10, 16.$$

Это значение можно полагать равным линейной сложности k -ЛРП над указанными модулями, если необходимо выделить какое-либо одно значение линейной сложности. В случае, когда R — коммутативная область целостности и $M = R$, к этим значениям добавляется еще несколько:

$$r_i = r_i^Q = m, \quad i = 7, 8, 9.$$

Напомним, что если R коммутативно и $k = 1$, то в (15) был выделен еще один набор совпадающих значений линейной сложности:

$$m' = \text{rank } u = r_i, \quad i = 1, 2, 3, 10, 13, 15.$$

Если же R коммутативно, $k = 1$ и $M = R$, то, согласно (16),

$$m' = \text{rank } u = r_i, \quad i = 1, 2, 3, 10, \dots, 15.$$

В силу предложения 16(a) $m \leq m'$. Пример 12 показывает, что если R — коммутативная область целостности, $k = 1$ и $M = R$, то возможна ситуация, когда $m < m'$. В

этом случае оба параметра m и m' могут равноправно именоваться линейной сложностью 1-ЛРП u . Мы хотим теперь показать, что для 1-ЛРП над коммутативными областями Безу $m = m'$.

Напомним (см. [5], стр. 69), что кольцо R называется левой областью Безу, если R — область целостности, в которой каждый левый идеал, порожденный двумя элементами, является главным, то есть порождается одним элементом. В этом случае любой конечно порожденный левый идеал является главным. Левые области Безу являются левыми областями Оре (см. предложение 1.3 в [5]). Так как левые области Оре обладают гомоморфизмом в тело (вложение в левое тело частных), они обладают свойством ИБЧ (см. [5], стр. 22).

Кольцо R называется слабо конечным, если для любого $n \in \mathbf{N}$ из $R^n \cong R^n \oplus K$ следует, что $K = 0$. Слабо конечные кольца обладают свойством ИБЧ (см. [5]). Левая область Безу является слабо конечным кольцом (см. предложение 1.3 и следствие 2 теоремы 1.1 в [5]). Если кольцо R обладает свойством ИБЧ, то рангом свободного модуля R^n называется число n .

Лемма 4. (а) Если кольцо R слабо конечно, то $r_1(R^n) = n$.

(b) Если R — левая область Оре, то $r_4(R^n) = n$.

(c) Если R — левая область Безу, то $r_1(R^n) = r_4(R^n) = n$.

(d) Если R — левая область Безу, то любой конечно порожденный подмодуль свободного модуля свободен.

(e) Если R — левая область Безу, то любой конечно порожденный подмодуль модуля R^n является свободным модулем ранга не выше n .

Доказательство. Докажем (а). Очевидно, $r_1(R^n) \leq n$. Предположим, что $r_1(R^n) = s < n$. Тогда R^n порождается s элементами и существует эпиморфизм $\varphi: R^s \rightarrow R^n$. Так как модуль R^n свободный и, следовательно, проективный, этот эпиморфизм расщепляется (см. теорему 5.3.1(b) в [4]), то есть

$$R^s = \text{Ker } \varphi \oplus L.$$

Ограничение φ на L есть изоморфизм между L и R^n . Следовательно,

$$R^s \cong \text{Ker } \varphi \oplus R^n \cong (\text{Ker } \varphi \oplus R^{n-s}) \oplus R^s.$$

Так как кольцо R слабо конечно, то $\text{Ker } \varphi \oplus R^{n-s} = 0$, что невозможно, поскольку $s < n$. Следовательно, $r_1(R^n) = n$.

Доказательство (b) см. в [5], стр. 48.

Утверждение (c) следует из (a) и (b).

Для доказательства (d) заметим, что в силу предложения 1.3 в [5] R является полу-ГК-кольцом, и тогда согласно теореме 1.1(e) в [5] любой конечно порожденный подмодуль свободного модуля свободен.

Утверждение (f) содержится в предложении 1.4 на стр. 69 в [5].

Предложение 18. Пусть R — левая область Безу, M — свободный модуль ранга

$$\nu \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}, \quad u \in \mathcal{L}_R M^{(k)},$$

m — параметр, введенный в предложении 16. Тогда модуль сдвигов $R[x]u$ является свободным R -модулем ранга m и к соотношениям предложений 16, 17 добавляются следующие:

$$r_1 = r_{16} = m, \quad r_7 = \lfloor m/\nu \rfloor,$$

где при $\nu = \infty$ вместо $\lfloor m/\nu \rfloor$ нужно брать 0, если $m = 0$, и 1, если $m \geq 1$.

Доказательство. В силу предложений 16(b) и 17(d) $r_7 = r_7^Q = \lfloor m/\nu^Q \rfloor$. По лемме 4(b) $r_1({}_R M) = r_4({}_R M)$, и ввиду предложения 16 $\nu^Q = \nu$. Следовательно, $r_7 = \lfloor m/\nu \rfloor$.

Пусть $R[x]u \rightarrow M^t$ — мономорфизм (где, например, $t = r_7$). По лемме 4(d) $R[x]u$ — свободный модуль. Пусть $n \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$ — его ранг. По лемме 4(c)

$$n = r_1(R[x]u) = r_4(R[x]u),$$

то есть $n = r_1(u) = r_4(u)$. Так как $r_4(u) = m$ по предложению 16(c), то $R[x]u$ — свободный модуль ранга m и $r_1 = m$.

Ввиду (8) $r_{16} \leq r_1 = m$, а по предложению 16(a) $r_{16} \geq m$. Следовательно, $r_{16} = m$.

Пример 12 показывает, что в случае, когда $M = R$ — коммутативная область целостности, $k = 1$, $\nu = 1$, соотношения $r_1 = m$ и $r_7 = \lfloor m/\nu \rfloor = m$ могут быть неверными, то есть условие предложения 18 является существенным. Как следствие, отсюда получаем, что коммутативная область целостности R из примера 12 не является областью Безу.

Предложение 19. Если в условиях предложения 18 кольцо R коммутативно, то $r_{17} \geq m$.

Доказательство. Пусть $u \in L_M(I)$, где I — унитарный идеал кольца $R[x]$, $r_1(L_M(I)) = r_{17}$. Если $G_1(x_1), \dots, G_k(x_k)$ — элементарные характеристические многочлены идеала I , то, ввиду коммутативности R ,

$$R[x]u \subseteq L_M(I) \subseteq L_M(\mathbf{G}).$$

По лемме 4(d) $L_M(I)$ — свободный модуль. По лемме 4(c) его ранг равен $r_1(L_M(I)) = r_{17}$. Теперь по лемме 4(e) из включения $R[x]u \subseteq L_M(I)$ следует, что $R[x]u$ — свободный модуль ранга не выше r_{17} , то есть $m \leq r_{17}$.

Рассмотрим теперь 1-ЛРП над коммутативными областями Безу.

Предложение 20. Пусть M — свободный модуль ранга $\nu \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ над коммутативной областью Безу R с полем частных Q , $k = 1$, $u \in \mathcal{L}_R M^{(1)}$, $m = \dim_Q Q[x][1 \otimes u]$ — параметр, введенный в предложении 16. Тогда

$$r_i = r_i^Q = m, \quad i = 1, \dots, 6, 10, 13, 15, 16, 18, \\ r_7 = r_7^Q = \lfloor m/\nu \rfloor, \quad r_{11} \leq m, \quad r_{12} \leq r_{14} \leq m, \quad r_{17} \geq m,$$

где при $\nu = \infty$ вместо $\lfloor m/\nu \rfloor$ нужно брать 0, если $m = 0$, и 1, если $m \geq 1$.

Минимальный многочлен 1-ЛРП u над кольцом R определен однозначно и совпадает с минимальным многочленом 1-ЛРП $[1 \otimes u]$ над полем Q .

Если к тому же $M = R$, то

$$r_i = r_i^Q = m, \quad i = 1, \dots, 18.$$

Доказательство. В силу предложений 12 и 13(d,e)

$$r_i^Q = m, \quad i = 1, \dots, 6, 10, 11, 13, 15, 16, 18.$$

В предложениях 16(c), 17(c,d), 18 и 19 доказано, что

$$r_1 = r_4 = r_5 = r_6 = r_{16} = r_{18} = m, \quad r_7 = r_7^Q =]m/\nu[, \quad r_{17} \geq m.$$

По предложению 11(a)

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_{10} = r_{13} = r_{15}.$$

Следовательно, $r_i = m$, $i = 1, \dots, 6, 10, 13, 15, 16, 18$. По предложению 9 $r_{11} \leq r_{10} = m$, и в силу (7) $r_{12} \leq r_{14} \leq r_{15} = m$.

По предложению 10 минимальный многочлен ЛРП u над кольцом R определен однозначно. В силу предложения 14 он является характеристическим многочленом ЛРП $[1 \otimes u]$. Так как $r_{10} = r_{10}^Q$, он является минимальным многочленом ЛРП $[1 \otimes u]$ над полем Q .

Если $M = R$, то по предложению 13(f) $r_i^Q = m$, $i = 1, \dots, 18$. Из уже доказанного и предложения 17(e) вытекает, что $r_i = m$, $i = 1, \dots, 16, 18$. Пусть $F(x)$ — минимальный многочлен ЛРП u над кольцом R . Тогда $\deg F(x) = r_{10} = m$ и $u \in L_R(F) \cong R^m$. Следовательно, $r_{17}(u) \leq r_1(L_R(F)) \leq m$. В итоге $r_{17} = m$.

Предложение 20 показывает, что коммутативные области Безу являются классом колец, для 1-ЛРП над которыми свойства линейной сложности оказываются наиболее близкими к свойствам линейной сложности 1-ЛРП над полем. Этот класс колец включает (как собственное подмножество) коммутативные области главных идеалов, в частности, кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$. Ключевое свойство областей Безу, использовавшееся в доказательствах, заключается в том, что конечно порожденный подмодуль свободного модуля над левой областью Безу является свободным. Для коммутативных областей Безу это свойство является характеристическим (см. [5], стр. 69).

12. Достаточные условия равенства $r_4 = r_5 = r_6$

Если R — левая область Оре, в частности, коммутативная область целостности, то по предложению 16(c) для k -ЛРП над R выполняются равенства $r_4 = r_5 = r_6$. Здесь мы укажем еще один класс коммутативных колец (пересечение которого с классом областей целостности совпадает с полями), для ЛРП над которыми эти равенства также верны.

Предложение 21. Пусть R — коммутативное локальное кольцо с максимальным идеалом J такое, что $\text{An}(J) \neq 0$, $u \in \mathcal{L}_R R^{(k)}$. Тогда $r_4 = r_5 = r_6$.

Доказательство. Пусть последовательности $v_1, \dots, v_n \in R[x]u$ линейно независимы, $n = r_4$. Если $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$ — элементарные характеристические многочлены k -ЛРП u и Π — ее начальный параллелепипед, $|\Pi| = m$, то по предложению 2(b) векторы $v_1[\Pi], \dots, v_n[\Pi] \in R^\Pi = R^m$ линейно независимы над R . Составим из этих векторов (столбцов) $m \times n$ матрицу $V = (v_1[\Pi], \dots, v_n[\Pi])$. Так как столбцы этой матрицы линейно независимы, система линейных уравнений $Vx = 0$ имеет только

нулевое решение. В силу [18] (см. стр. 69) (см. также теорему 5 в [3]) $\text{rk } V = n$, то есть $\text{An}(I_V(n)) = 0$, где $I_V(n)$ — идеал кольца R , порожденный всеми минорами матрицы V порядка n . Если $I_V(n) \neq R$, то $I_V(n) \subseteq J$, следовательно, $\text{An}(I_V(n)) \supseteq \text{An}(J) \neq 0$, получаем противоречие. Поэтому $I_V(n) = R$. Поскольку R локально, это означает, что существует минор матрицы V порядка n , являющийся обратимым элементом кольца R .

Пусть $\bar{a}, \bar{F}(x), \bar{u}, \bar{V}$ — образы элемента, многочлена, последовательности и матрицы над R в поле вычетов $\bar{R} = R/J$ кольца R . Матрица $\bar{V}$ содержит ненулевой минор порядка n . Следовательно, ее столбцы $\bar{v}_1[\Pi], \dots, \bar{v}_n[\Pi]$ линейно независимы над полем $\bar{R}$. Поэтому последовательности $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \bar{R}[x]\bar{u}$ линейно независимы над $\bar{R}$, и $r_4(\bar{u}) \geq n$, где $r_4(\bar{u})$ — линейная сложность k -ЛРП $\bar{u}$ над полем $\bar{R}$. По предложению 12(a) $r_4(\bar{u}) = r_6(\bar{u})$. Следовательно, $r_6(\bar{u}) \geq n$. Это означает, что существует диаграмма Ферре $\mathcal{F}$ мощности $|\mathcal{F}| = r_6(\bar{u}) \geq n$ такая, что последовательности $(x^i \bar{u}, i \in \mathcal{F})$ линейно независимы над $\bar{R}$. Очевидно, что $\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_k(x_k)$ — элементарные характеристические многочлены k -ЛРП $\bar{u}$ и Π — ее начальный параллелепипед. По предложению 2(b) векторы $(x^i \bar{u}[\Pi], i \in \mathcal{F})$ из $\bar{R}^\Pi$ линейно независимы над $\bar{R}$. Рассмотрим векторы (столбцы) $(x^i u[\Pi], i \in \mathcal{F})$ из $R^\Pi = R^m$ и составим из них $m \times |\mathcal{F}|$ матрицу $U = (x^i u[\Pi], i \in \mathcal{F})$. Так как столбцы матрицы $\bar{U}$ линейно независимы над $\bar{R}$, матрица $\bar{U}$ содержит ненулевой минор порядка $|\mathcal{F}|$. Следовательно, U содержит минор порядка $|\mathcal{F}|$, являющийся обратимым элементом кольца R . Отсюда, $\text{rk } U = |\mathcal{F}|$, и в силу [18], (см. стр. 159) (или теоремы 5 в [3]) система линейных уравнений $Ux = 0$ имеет только нулевое решение. Это означает, что столбцы матрицы U линейно независимы над R . Поэтому последовательности $(x^i u, i \in \mathcal{F})$ линейно независимы над R . Следовательно, $r_6 \geq |\mathcal{F}| = r_6(\bar{u}) \geq n = r_4$. Так как $r_4 \geq r_5 \geq r_6$ ввиду (1), то $r_4 = r_5 = r_6$.

Следствие 6. Если R — коммутативное локальное артиново (в частности, конечное) кольцо, $u \in \mathcal{L}_R R^{(k)}$, то $r_4 = r_5 = r_6$.

Доказательство. По теореме 9.3.9 в [4] радикал J артинова кольца нильпотентен, поэтому $\text{An}(J) \neq 0$.

Всякое коммутативное артиново кольцо является прямой суммой локальных (см. теорему 8.7 в [1]), поэтому следствие 6 естественно попытаться обобщить на коммутативные артиновы кольца. Однако, если

$$u = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

— 2-последовательность над кольцом Z_6 , рассмотренная в примере 4, то $r_4 = 2$, $r_5 = r_6 = 1$, то есть соотношения $r_4 = r_5 = r_6$ не выполняются. Тем не менее, для 1-последовательностей указанное обобщение следствия 6 верно.

Предложение 22. Если $R = R^{(1)} \oplus R^{(2)}$ и для 1-последовательностей над кольцами $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ выполняются равенства $r_4 = r_5 = r_6$, то для 1-последовательностей над кольцом R также выполняются равенства $r_4 = r_5 = r_6$.

Доказательство. Ввиду (1) $r_4 \geq r_5 \geq r_6$. Докажем, что $r_6(u) \geq r_4(u)$. Каждый элемент $c \in R$ и последовательность $u \in R^{(1)}$ однозначно представляется в виде

$$c = c^{(1)} + c^{(2)}, \quad u = u^{(1)} + u^{(2)},$$

где $c^{(i)}$, $u^{(i)}$ — элемент и последовательность над кольцом $R^{(i)}$, $i = 1, 2$. Пусть u — произвольная ЛРП над R , и пусть последовательности $v_1, \dots, v_n \in R[x]u$ линейно независимы над R , $n = r_4(u)$. Тогда последовательности $v_1^{(i)}, \dots, v_n^{(i)} \in R^{(i)}[x]u^{(i)}$ линейно независимы над $R^{(i)}$, $i = 1, 2$, поскольку если

$$\sum_s a_s v_s^{(i)} = 0$$

для некоторого $i = 1, 2$, где $a_s \in R^{(i)}$, то

$$\sum_{s=1}^n a_s v_s = \sum_{s=1}^n a_s (v_s^{(1)} + v_s^{(2)}) = \sum_{s=1}^n a_s v_s^{(i)} = 0.$$

Так как по условию $r_4(u^{(i)}) = r_6(u^{(i)})$, последовательности

$$u^{(i)}, xu^{(i)}, \dots, x^{n-1}u^{(i)}$$

линейно независимы над $R^{(i)}$, $i = 1, 2$. Но тогда последовательности

$$u, xu, \dots, x^{n-1}u$$

линейно независимы над R (два последних утверждения используют условие $k = 1$). Действительно, если

$$\sum_{t=0}^{n-1} b_t x^t u = 0, \quad b_t \in R,$$

то

$$\sum_{t=0}^{n-1} b_t^{(i)} x^t u^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2,$$

откуда, $b_t^{(i)} = 0$, $t = 0, 1, \dots, n-1$, $i = 1, 2$, и следовательно, $b_t = 0$, $t = 0, 1, \dots, n-1$. Этим доказано, что $r_6(u) \geq n$, то есть $r_6(u) \geq r_4(u)$.

Следствие 7. Рассмотрим следующие классы коммутативных колец:

- (а) локальные кольца, у которых аннулятор максимального идеала не равен 0;
- (б) артиновы (в частности, конечные) кольца;
- (в) области целостности.

Если кольцо R есть прямая сумма колец из этих классов, то для любой 1-последовательности $u \in \mathcal{L}_R R^{(1)}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} r_4 = r_5 = r_6 &\leq r_{18} \leq r_7 \leq r_8 \leq r_9 \leq r_1 \\ &= r_2 = r_3 = r_{10} = r_{11} = r_{12} = r_{13} = r_{14} = r_{15} = \text{rank } u. \end{aligned}$$

Доказательство. Равенства $r_4 = r_5 = r_6$ в случаях (а), (б) следуют из предложений 21 и 22, в случае (в) — из предложения 16(с). Остальные соотношения вытекают из следствия 3.

Пример 3 показывает, что для 1-ЛРП над конечным локальным кольцом Z_4 неравенства $r_6 \leq r_{18} \leq r_7$ могут быть строгими. Согласно примеру 12 для 1-ЛРП над коммутативной областью целостности неравенство $r_9 \leq r_1$ может быть строгим.

Подводя итог, отметим, что для последовательностей над коммутативными кольцами имеются две серии совпадений различных определений линейной сложности. Первая из них:

$$m = r_1 = r_2 = r_3 = r_{10} = r_{13} = r_{15} = \text{rank } u$$

справедлива для 1-ЛРП $u \in \mathcal{L}_R M^{(1)}$, где R — произвольное коммутативное кольцо. Если при этом $M = R$, то к указанным равенствам добавляются равенства $m = r_{11} = r_{12} = r_{14}$ (см. следствие 3). Вторая серия совпадений $r_4 = r_5 = r_6$ справедлива для k -ЛРП $u \in \mathcal{L}_R M^{(k)}$, где R — коммутативная область целостности и M — произвольный R -модуль (предложение 17(а)) или R — левая область Оре и M — модуль без кручения (предложение 16(с)), а также для 1-ЛРП $u \in \mathcal{L}_R R^{(1)}$, где R — коммутативное артиново кольцо (следствие 7). Для 1-ЛРП над коммутативными артиновыми кольцами или над коммутативными областями целостности эти две серии совпадений могут быть различными, то есть $r_4 < r_1$ (примеры 3, 12). Для 1-ЛРП над коммутативными областями Безу (в частности, коммутативными областями главных идеалов) и свободными модулями над ними эти две серии равны друг другу. Заметим сходство этой ситуации с той, которая возникает при определении ранга модуля над коммутативным кольцом. В качестве ранга модуля M обычно выбирают один из параметров $r_1(M)$ или $r_4(M)$, введенных в разделе 3, причем $r_4(M)$ используется для модулей над областями целостности (см. стр. 49 в [13]). В общем случае $r_1(M) \neq r_4(M)$, но если M — свободный модуль над коммутативной областью Безу, то $r_1(M) = r_4(M)$ (лемма 4(с)).

13. Заключение

Полученные результаты и примеры показывают, что большинство из введенных определений линейной сложности в общем случае не эквивалентны друг другу. Трудно (и, видимо, не нужно) выделить какой-либо один параметр и именно его назвать линейной сложностью k -ЛРП. Все введенные определения являются естественными, и каждое из них может оказаться полезным при решении конкретных задач.

При рассмотрении k -ЛРП над различными классами колец и модулей некоторые из определений линейной сложности оказываются эквивалентными. С этой точки зрения, помимо полей и тел, в работе выделено несколько таких классов колец: левые области Оре, коммутативные артиновы кольца и коммутативные области Безу. Так, если $u \in \mathcal{L}R^{(1)}$ — 1-ЛРП над коммутативным артиновым (в частности, конечным) кольцом R , то справедливы следующие соотношения (см. следствия 3 и 7):

$$r_4 = r_5 = r_6 \leq r_{18} \leq r_7 \leq r_8 \leq r_9 \leq \text{rank } u = r_i, \quad i = 1, 2, 3, 10, \dots, 15, \\ r_{16} \leq r_1, \quad r_{17} \leq r_1.$$

Если же u — 1-ЛРП над коммутативной областью Безу R , то так же, как для ЛРП над полем, u имеет единственный минимальный многочлен и все 18 рассматриваемых определений линейной сложности эквивалентны (предложение 20):

$$r_1(u) = r_2(u) = \dots = r_{18}(u).$$

Таким образом, коммутативные области Безу являются классом колец, для которых теория линейной сложности 1-последовательностей наиболее полно повторяет классическую теорию линейной сложности 1-последовательностей над полем.

Работа оставляет множество нерешенных задач. Это вызвано в том числе и количественными соображениями: требовалось попарно сравнить большое число различных определений. Перечислим некоторые задачи.

- (1) Для любой пары r_i, r_j охарактеризовать класс колец и модулей, над которыми выполняется одно из утверждений $r_i \leq r_j$, $r_i = r_j$, $r_i \geq r_j$.
- (2) Обобщить результаты о линейной сложности последовательностей над телами на левые области Безу (подобно коммутативному случаю).
- (3) Рассмотреть более подробно случай конечных колец и модулей, а также случай артиновых и нетеровых колец.
- (4) Исследовать поведение линейной сложности при переходе к фактормодулям, прямым суммам и произведениям, локализациям и модулям частных (для колец, не являющихся областями Оре).
- (5) Выяснить, являются ли коммутативные области Безу наибольшим классом колец, для 1-ЛРП над которыми все 18 определений линейной сложности совпадают.
- (6) Описать кольца и модули, над которыми $r_6 = r_{10}$, то есть каждая 1-ЛРП имеет единственный минимальный многочлен (см. предложение 10 и следствие 4).
- (7) Доказать или опровергнуть равенства $r_2 = r_3$, $r_5 = r_6$, $r_8 = r_9$.
- (8) Исследовать параметры r_{19} , r_{20} , r_{21} .
- (9) Для каких $i \in \{1, \dots, 21\}$ верно утверждение: последовательность $u \in M^{(k)}$ есть k -ЛРП тогда и только тогда, когда $r_i(u) < \infty$?
- (10) Выяснить, является ли 2-ЛРП из примера 9 выходом 2-линейного регистра сдвига, то есть 2-ЛРС последовательностью.

В заключение приведем перечень всех полученных результатов в виде двух таблиц: таблицы результатов и таблицы примеров. В первом столбце каждой таблицы находится номер формулы, предложения или примера, из которого взяты приводимые соотношения. Во втором столбце приведены краткие условия на кольцо R , модуль M , параметр k и последовательность u (полная информация находится в тексте работы). Остальные столбцы занумерованы числами $1, \dots, 18$, означающими линейную сложность $r_1, \dots, r_{18}$. В случае, когда R — левая область Оре, столбец r_1^Q в таблице примеров содержит линейную сложность $r_1^Q(1 \otimes u)$ последовательности $[1 \otimes u]$ над модулем частных $Q \otimes M$ (или линейную сложность $r_1^Q(u)$ последовательности u над телом частных Q , если u — последовательность над кольцом R).

Таблица 1. Таблица результатов

№	Условия	1	2 Ω	3 $\mathcal{F}$	4	5 Ω	6 $\mathcal{F}$	7	8 Ω	9 $\mathcal{F}$	10 Φ	11 $\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$	12	13	14	15	16	17 $L(I)$	18 log
(1)		$1 \leq 2 \leq 3$			$4 \geq 5 \geq 6$			$7 \leq 8 \leq 9$											
(7)													$12 \leq 13$ ≤ 14	≤ 15	$14 \leq 15$ $\geq 12 \geq 13$				
(8)		≥ 16															≤ 1		
1		$=1'$	$=2'$	$=3'$	$=4'$	$=5'$	$=6'$												
2	R комм.	$=1^{\Pi}$			$=4^{\Pi}$														
3				$=10$															≥ 4
4		≥ 18			≤ 18					≤ 12	≤ 13	≤ 15	≥ 9	≥ 10		≥ 11			≤ 1 $\leq 7l$
5	M конечен, $ M \leq R $				≤ 7			$\geq 18/l$ ≥ 4											
6	R комм.		≥ 8	≥ 9					≤ 2	≤ 3 ≤ 11		≥ 14 ≥ 9 $\geq 16/\nu$	$\geq \sqrt[k]{13/\nu}$	$\leq (12\nu)^k$	≤ 11				
7	R комм. или артин. слева	≥ 4			≤ 1 $\leq 7\nu$			$\geq 4/\nu$									$\leq 11\nu$		
8	R комм., M - E-модуль												$12 = 13$		$14 = 15$				
9	$k = 1$					≤ 10					≥ 6 ≥ 11	≤ 10							
10	$k = 1$	$r_6 = r_{10} \iff \exists! m_u(x)$																	
11	$k = 1, R$ комм.	$=m$	$=m$	$=m$							$=m$			$=m$		$=m$		$\leq m\nu$	
3	$k = 1, R$ комм., $M = R$	$=m$	$=m$	$=m$	$6 \leq 5 \leq 4 \leq 18$	$\leq 7 \leq 8 \leq 9 \leq m$					$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$
12	R тело	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$= \frac{m}{\nu} [\geq \frac{m}{\nu} [\geq \frac{m}{\nu} [$			$=m$			$\geq m$			$=m$		
	R тело, $k = 1$											$=m$							
13	R поле	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$= \frac{m}{\nu} [\geq \frac{m}{\nu} [\geq \frac{m}{\nu} [$			$=m$	$\geq m/\nu$		$\geq m$			$=m$	$\geq m$	$=m$
	R поле, $k = 1$																	$\leq m\nu$	
	R поле, $M = R$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$	$=m$
5	R поле, $M = R$	способ построения k -ЛРС																	

[illegible]

Таблица 3. Таблица примеров

№	УСЛОВИЯ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	r_1^Q
		Ω	$\mathcal{F}$		Ω	$\mathcal{F}$		Ω	$\mathcal{F}$	Φ	$\langle \chi, \mathcal{F} \rangle$							$L(I) \log$		
1	$R \cong R^2, u = (1, 0, 0, \dots)$	1	1	1	∞	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—	
2	$R \cong R^2, u = (0, 1, 0, \dots)$	1	2	2	∞	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	—	
3	$R = Z_4, u = (2, 2, 2, \dots)$	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1/2	
4	$R = \mathbf{Z}, u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	2	3	3	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2		—	2
	$R = Z_6$	2	3	3	2	1	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2		2	
5	R поле, $M = R^2, u = \begin{pmatrix} \alpha^i \\ \beta^i \end{pmatrix}$	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	1	2	1	2	2	4	2	2
6	$ab \notin bR, u = (a^i b)$	1	1	1		1	1	1			1	1	>1	>1	>1	>1	1	1	—	
7	$R = P[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2), u = (0, \alpha\beta, 0, \dots)$	2	2	2	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1		1/2	0
8	$c_i a^i b = 0, c_i a^{i+1} b \neq 0, u = (a^i b)$	1	1	1		1	1	1	>1	>1	1	1					1	1	—	
9	$R = P\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle / I, u = (\alpha^i \beta^j \gamma)$	1	1	1		1	1				1	>1					1		—	
10	R поле, $M = R^2, u = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right)$	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	2	2
11	$R = \mathbf{Z}, M = \mathbf{Z}_4, u = (2, 2, 2, \dots)$	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—	0
12	$R = P[\alpha, \beta]/(\alpha^2 - \beta^3), u = (\beta, \alpha, \dots)$	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2			—	1

Для краткости в таблице результатов обозначение r_i заменено на i , так что каждое число $i = 1, \dots, 18$ нужно заменять на символы r_i . Например, записи ≤ 2 , $= 8^Q$, $\geq m/\nu$, $\geq 1/\nu$ в столбце 8 таблицы результатов обозначают соответственно $r_8 \leq r_2$, $r_8 = r_8^Q$, $r_8 \geq m/\nu$, $r_8 \geq r_1/\nu$ (m и ν — не числа, а буквы). В таблице результатов также используются следующие обозначения: $\nu = r_1(M)$, $l = \log_{|R|} |M|$, $|x|$ — наименьшее натуральное число, большее или равное x (при этом, если $\nu = \infty$, то вместо $\lfloor m/\nu \rfloor$ нужно брать 0 при $m = 0$ и 1 при $m \geq 1$, см. предложения 12(b), 13(a)), m — параметр, равный общему значению нескольких совпадающих друг с другом линейных сложностей r_i и, как правило, введенный в соответствующем предложении в тексте статьи. Например, для предложения 11 параметр m — это общее значение $r_1 = r_2 = r_3 = r_{10} = r_{13} = r_{15}$.

В таблице примеров цифра в каждом столбце $i = 1, \dots, 18$ означает значение r_i соответствующей линейной сложности. Так, в примере 1 $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, $r_4 = \infty$, $r_5 = 1$, и т.д. Прочерк означает, что данная линейная сложность не определена, пробел — что она не найдена. Большинство (но не все) из значений линейной сложности в таблице примеров были вычислены в тексте работы. Отметим, что во всех примерах параметр $\nu = 1$, за исключением примеров 5 и 10, в которых $\nu = 2$.

Автор признателен В. П. Елизарову за обсуждение ряда результатов статьи.

Список литературы

1. Атья М., Макдональд И., *Введение в коммутативную алгебру*. Мир, Москва, 1972.
2. Ван дер Варден Б. Л., *Алгебра*. Наука, Москва, 1979.
3. Елизаров В. П., *Конечные кольца*. М., 1993.
4. Каш Ф. *Модули и кольца*. Мир, Москва, 1981.
5. Кон П., *Свободные кольца и их связи*. Мир, Москва, 1975.
6. Кузьмин А. С., Куракин В. Л., Нечаев А. А., Псевдослучайные и полилинейные последовательности. *Труды по дискретной математике*, том 1. Научное изд-во ТВП, 1997, 139–202.
7. Куракин В. Л., Биномиальное представление линейных рекуррентных последовательностей. *Фундаментальная и прикладная математика* (1995) 1, №2, 553–556.
8. Куракин В. Л., Алгоритм Берлекэмпа–Мессии над конечными кольцами, модулями и бимодулями. *Дискретная математика* (1998) 10, №4, 3–34.
9. Куракин В. Л., Полиномиальные преобразования линейных рекуррентных последовательностей над конечными коммутативными кольцами. *Дискретная математика* (2000) 12, №3, 3–36.
10. Нечаев А. А., Линейные рекуррентные последовательности над квазифробениусовыми модулями. *Успехи матем. наук*, (1993) 48, №3, 197–198.
11. Нечаев А. А., Конечные квазифробениусовы модули, приложения к кодам и линейным рекуррентам. *Фундаментальная и прикладная математика* (1995) 1, №1, 229–254.
12. Херстейн И., *Некоммутативные кольца*. Мир, Москва, 1972.
13. Шафаревич И. Р., *Основные понятия алгебры. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники*, т. 11. ВИНТИ, Москва, 1986.
14. Herlestam T., On the complexity of functions of linear shift register sequences. *Int. Symp. Inform. Theory*, Les Arc, France, 1982.

15. Key E. L., An analysis of the structure and complexity of nonlinear binary sequence generators. *IEEE Trans. Inform. Theory* (1976) **22**, №6, 732–736.
16. Kurakin V. L., Kuzmin A. S., Mikhalev A. V., Nechaev A. A., Linear recurrences over rings and modules. *J. Math. Sci.* (1995) **76**, №6, 2793–2915.
17. V. L. Kurakin, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev, V. N. Tsypyshev, Linear and polylinear recurring sequences over abelian groups and modules. *J. Math. Sci.* (2000) **102**, №6, 4598–4626.
18. McCoy N. H., *Rings and ideals*. Math. Assoc. Amer., Menasha, 1962.
19. Peterson B., Taft E. Y., The Hopf algebra of lineary recursive sequences. *Aequat. Math.* (1980) **20**, 1–17.
20. Rueppel R. A., Staffelbach O. J., Products of linear recurring sequences with maximum complexity. *IEEE Trans. Inform. Theory* (1987) **33**, №1, 126–131.
21. Sakata S., Synthesis of two-dimensional linear feedback shift-registers and Groebner bases. *Lect. Notes Comput. Sci.* (1989) **356**, 394–407.
22. Sakata S., Extension of the Berlekamp–Massey algorithm to N dimensions. *Inform. and Comput.* (1990) **84**, №2, 207–239.
23. Sakata S., Two-dimensional shift register synthesis and Groebner bases for polynomial ideals over an integer residue ring. *Discr. Appl. Math.* (1991) **33**, №1–3, 191–203.
24. Zierler N., Mills W. H., Products of linear recurring sequences. *J. Algebra* (1973) **27**, №1, 147–157.

Статья поступила 14.12.2000.