Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ведерников, Д. Г. Коптюх, Композиционные формации s -длины 3, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 1, 119–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:03:48

Композиционные формации c -длины 3

© 2001 г. В. А. Ведерников, Д. Г. Коптюх

Пусть Θ — полная модулярная решетка формаций конечных групп, 0_Θ — нуль решетки Θ . Будем говорить, что Θ -формация $\mathfrak{F} \neq 0_\Theta$ имеет Θ -длину $l_\Theta(\mathfrak{F})$, равную n , если существует такая совокупность Θ -формаций

$$\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n,$$

что $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_0 = 0_\Theta$ и $\mathfrak{F}_{i-1}$ — максимальная Θ -подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, n$. В настоящей работе дано полное описание строения композиционных формаций c -длины 3.

В теории формаций конечных групп одним из интересных направлений исследования является изучение строения формаций, обладающих короткими цепями подформаций с теми или иными свойствами (см. [1], §5.3). В работе [2] А. Н. Скибой было введено понятие длины формации. Приведем его в следующем виде. Пусть Θ — полная модулярная решетка формаций конечных групп, 0_Θ — нуль решетки Θ . Будем говорить, что Θ -формация $\mathfrak{F} \neq 0_\Theta$ имеет Θ -длину $l_\Theta(\mathfrak{F})$, равную n , если существует такая совокупность Θ -формаций

$$\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n,$$

что $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_0 = 0_\Theta$ и $\mathfrak{F}_{i-1}$ — максимальная Θ -подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, n$. Если Θ — решетка всех формаций конечных групп, то будем говорить о длине формации $\mathfrak{F}$. Аналогичный смысл вкладывается в понятие l -длины локальной формации $\mathfrak{F}$ и c -длины $l_c(\mathfrak{F})$ композиционной формации $\mathfrak{F}$ ($0_l = 0_c = (1)$). Отметим, что модулярность решетки композиционных формаций следует из леммы 5 в [3]. В работах [4–6] исследовались формации длины 3, в работе [2] — локальные формации l -длины 5. Дальнейшее обобщение понятия l -длины можно найти в работах [1, 7].

Цель настоящей работы — дать описание строения композиционных формаций c -длины 3. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. В работе применяются стандартные обозначения и определения, которые можно найти в [1, 8–10]. Приведем лишь некоторые из них. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ — класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$, в частности, (G) — класс всех групп, изоморфных группе G ; $K(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; $K(\mathfrak{X})$ — объединение классов $K(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$; если A — простая группа, то $F_A(G)$ — пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G , чьи композиционные факторы изоморфны группе A (см. [8]). Такие главные факторы называются главными A -факторами группы G . Если в G нет главных A -факторов, то полагаем $F_A(G) = G$.

Пусть $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{U}$ — классы всех конечных соответственно простых групп, нильпотентных групп, p -групп и абелевых групп; $M[A]$ — полупрямое произведение группы M с некоторой группой операторов A ; $M \triangleleft H$ обозначает, что M — нормальная подгруппа группы H . Будем коротко называть композиционную формацию s -формацией, а композиционный экран s -экраном.

Лемма 1. Если $\mathfrak{F}$ — s -формация, то $l_c(\mathfrak{F}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \text{sform } A$, где A — простая группа.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — s -формация, f — ее минимальный s -экран, t — минимальный s -экран собственной s -подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$, A — неабелева простая группа из $K(\mathfrak{F})$. Тогда, если $f(A) = \text{form } G$, где G — монолитическая группа с монолитом M , $K(M) = (A)$ и G/M не содержит главных A -факторов, то либо $t(A) = \text{form } G$, либо $t(A) = \emptyset$.

Доказательство. По следствию 1 из [8], $t \leq f$. Если $t(A) = f(A)$, то $t(A) = \text{form } G$. Пусть $t(A) \subset f(A)$. По лемме 18.2 из [10], $t(A) \subseteq \text{form}(G/M)$. Допустим, что $t(A) \neq \emptyset$. Тогда по теореме из [8] найдется группа $H \in \mathfrak{M}$ такая, что $A \in K(H)$. Пусть K/L — верхний главный A -фактор группы H . Введем обозначение $C = C_H(K/L)$. Тогда

$$H/C \in t(A) \subseteq \text{form}(G/M)$$

и, значит, H/C не содержит главных A -факторов. С другой стороны, H/C содержит нормальную A -подгруппу $KC/C \cong K/L$ и, значит, H/C содержит главный A -фактор. Получили противоречие. Значит, $t(A) = \emptyset$. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — s -формация, f — ее минимальный s -экран, t — минимальный s -экран собственной s -подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$, A — неабелева простая группа из $\mathfrak{F}$. Тогда, если $f(A) = \text{form } A$, то либо $t(A) = \text{form } A$, либо $t(A) = \emptyset$.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — s -формация. Если $Z_p = K(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть f — минимальный s -экран s -формации $\mathfrak{F}$. Если $Z_p \in K(\mathfrak{F})$, то по теореме из [8] $f(Z_p) \neq \emptyset$. Следовательно, $(1) \subseteq f(Z_p)$. А так как $Z_p/C_{Z_p}(Z_p) = 1 \in f(Z_p)$, то $Z_p \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{N}_p = \text{sform } Z_p \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{F} = \text{sform } G$, где $G = A \times B$, A и B — неизоморфные простые группы. Тогда $l_c(\mathfrak{F}) = 2$, причем максимальными s -подформациями формации $\mathfrak{F}$ являются лишь $\text{sform } A$ и $\text{sform } B$.

Доказательство. Пусть f — минимальный s -экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда по теореме из [8] $f(C) = \text{form}(G/F_C(G))$, если $C \in K(G)$ и $f(C) = \emptyset$, если $C \notin K(G)$. Пусть $\mathfrak{M}$ — собственная s -подформация формации $\mathfrak{F}$, t — ее минимальный s -экран и $A \in K(\mathfrak{M})$. Если $A \cong Z_p$, то по лемме 3 $A \in \mathfrak{M}$. Если A — простая неабелева группа, то $f(A) = \text{form } A$. Поскольку $t(A) \neq \emptyset$, по следствию 1 $t(A) = \text{form } A \subseteq \mathfrak{M}$, и значит, $A \in \mathfrak{M}$.

Допустим, что $\{A, B\} \subseteq K(\mathfrak{M})$. Тогда $\{A, B\} \subseteq \mathfrak{M}$ и $A \times B \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \text{sform}(A \times B) \subseteq \mathfrak{M}$. Получили противоречие. Поэтому $K(\mathfrak{M})$ равно либо (A) , либо (B) , либо $\emptyset$. Следовательно, максимальными s -подформациями формации $\mathfrak{F}$ являются $\text{form } B$ и $\text{form } A$, s -длина которых, согласно лемме 1, равна 1. Поэтому $l_c(\mathfrak{F}) = 2$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если G — монолитическая группа с неабелевым монолитом P , то $\mathfrak{B} = \text{cform}(G/P)$ является единственной максимальной с-подформацией формации $\mathfrak{F} = \text{cform } G$.

Доказательство. По лемме 3.2.1 из [11] $\mathfrak{F}$ обладает единственной максимальной с-подформацией $\mathfrak{M}$, имеющей внутренний с-экран m такой, что $m(A) = \text{form}(G/P)$ для $A \in K(P)$; $m(A) = \text{form}(G/F_A(G))$ для $A \in K(G) \setminus K(P)$ и $m(A) = \emptyset$ для $A \in \mathfrak{J} \setminus K(G)$.

Пусть $K(P) = (B)$, b — минимальный с-экран формации $\mathfrak{B} = \text{cform}(G/P)$ и $G_1 = G/P$. По теореме из [8] $b(C) = \text{form}(G_1/F_C(G_1))$ для $C \in K(G_1)$ и $b(C) = \emptyset$ для $C \in \mathfrak{J} \setminus K(G_1)$. Пусть $C \in K(G_1) \setminus (B)$. Тогда в силу леммы 2.8 из [10]

$$F_C(G_1) = F_C(G/P) = F_C(G)/P$$

и, значит, $b(C) = m(C)$ при $C \in K(G_1) \setminus (B)$. Если $B \in K(G_1)$, то $b(B) = \text{form}(G_1/F_B(G_1))$. Пусть $S/P = F_B(G_1)$. Тогда

$$b(B) = \text{form}(G/S) \subseteq \text{form}(G/P) = m(B).$$

Если $B \notin K(G_1)$, то $b(B) = \emptyset$ и в любом случае $b(B) \subseteq m(B)$. Поэтому $b \leq m$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть h — максимальный внутренний с-экран формации $\mathfrak{B}$. Тогда по теореме 3.2 из [9] $h(B) = \mathfrak{B}$ и

$$m(B) = \text{form}(G/P) \subseteq \text{cform}(G/P) = h(B).$$

Поскольку $K(G) \setminus K(P) = K(G_1) \setminus K(P)$, то $m(C) = b(C) \subseteq h(C)$ для любого $C \in K(G) \setminus K(P)$. Следовательно, $m \leq h$. Тогда

$$\mathfrak{M} = CF(m) \subseteq CF(h) = \mathfrak{B}.$$

Из $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$ следует, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $\mathfrak{F}$ — Θ -формация. Если $l_\Theta(\mathfrak{F}) = n$, где n — натуральное число, то $F = \Theta \text{ form } G$, где G — конечная группа.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n . Докажем утверждение при $n = 1$. Пусть $l_\Theta(\mathfrak{F}) = 1$. Значит, по определению, единственной собственной Θ -подформацией формации $\mathfrak{F}$ является 0_Θ . Пусть $G \in \mathfrak{F} \setminus 0_\Theta$. Тогда

$$0_\Theta \subset \Theta \text{ form } G \subseteq \mathfrak{F}.$$

Если $\Theta \text{ form } G \subset \mathfrak{F}$, то $l_\Theta(\mathfrak{F}) > 1$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{F} = \Theta \text{ form } G$. Предположим, что утверждение верно при $n = k$. Докажем, что утверждение верно при $n = k + 1$. Пусть $\mathfrak{F}$ — Θ -формация и $l_\Theta(\mathfrak{F}) = k + 1$. Тогда, по определению, $\mathfrak{F}$ обладает такой максимальной Θ -подформацией $\mathfrak{G}$, что $l_\Theta(\mathfrak{G}) = k$. По индукционному предположению $\mathfrak{G} = \Theta \text{ form } H$, где H — конечная группа. Выберем группу $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{G}$ наименьшего порядка с таким свойством, и пусть $G_1 = G \times H$. Тогда $G_1 \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}_1 = \Theta \text{ form } G_1$. Следовательно, $l_\Theta(\mathfrak{F}_1) > k$. Поскольку $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$, то $l_\Theta(\mathfrak{F}_1) = k + 1$ и $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F} = \Theta \text{ form } G_1$. Лемма доказана.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Обозначим через $\delta(K(\mathfrak{F}))$ мощность множества всех попарно неизоморфных групп из $K(\mathfrak{F})$. Если $K(\mathfrak{F}) = \emptyset$, то полагаем $\delta(K(\mathfrak{F})) = 0$.

Лемма 7. Пусть $\mathfrak{F}$ — c -формация и $l_c(\mathfrak{F}) = n$. Тогда $\delta(K(\mathfrak{F})) \leq n$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n . Справедливость утверждения при $n = 1$ вытекает из леммы 1. Предположим, что утверждение верно при $n = k$. Докажем, что утверждение верно при $n = k + 1$. Пусть $\mathfrak{F}$ — c -формация и $l_c(\mathfrak{F}) = k + 1$. По лемме 6 $\mathfrak{F} = \text{sform } G$ и пусть G — группа минимального порядка с таким свойством. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда $\mathfrak{F}_1 = \text{sform}(G/M) \subset \mathfrak{F}$ и $l_c(\mathfrak{F}_1) \leq k$. Допустим, что $\delta(K(\mathfrak{F})) > k + 1$. Тогда $\delta(K(\mathfrak{F}_1)) \geq k + 1$, что противоречит индукционному допущению. Значит, $\delta(K(\mathfrak{F})) \leq k + 1$. Лемма доказана.

Теорема 1. Если $\mathfrak{F}$ — c -формация, то $l_c(\mathfrak{F}) = 2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \text{sform } G$, причем либо $G = A \times B$, либо G — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M \neq G$ и $G/M \in \text{sform } A$, где A и B — неизоморфные простые группы.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $l_c(\mathfrak{F}) = 2$. Если найдутся две простые неизоморфные группы A и B , принадлежащие $\mathfrak{F}$, то по лемме 4 $\text{sform}(A \times B)$ имеет c -длину 2 и $\mathfrak{F} = \text{sform}(A \times B)$.

Пусть каждая простая группа из $\mathfrak{F}$ изоморфна группе A . Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$, то $K(\mathfrak{F}) = (A)$, $A \cong Z_p$ и согласно лемме 1 $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ имеет длину 1. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{N}$. Введем обозначение $\mathfrak{F}_1 = \text{sform } A$. Поскольку $l_c(\mathfrak{F}_1) = 1$, то $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}$. Выберем группу $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$ наименьшего порядка с таким свойством. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $M = G^{\mathfrak{F}_1}$ и

$$\mathfrak{F}_1 = \text{sform}(G/G_1^{\mathfrak{F}_1}) \subset \text{sform } G.$$

Поскольку $l_c(\mathfrak{F}) = 2$, то $\mathfrak{F} = \text{sform } G$. Допустим, что M — элементарная абелева p -группа. Так как $K(M) \subseteq K(G)$, по лемме 3 $Z_p \in \mathfrak{F}$. А поскольку каждая простая группа из $\mathfrak{F}$ изоморфна группе A , то $Z_p \cong A$. Учитывая, что

$$G/M \in \mathfrak{F}_1 = \text{sform } A = \mathfrak{N}_p$$

и $M \in \mathfrak{N}_p$, находим, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$. Получили противоречие. Значит G — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M \neq G$ и $G/M \in \text{sform } A$, где A — простая группа.

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \text{sform } G$. Если $G = A \times B$, где A и B — неизоморфные простые группы, то $l_c(\mathfrak{F}) = 2$ по лемме 4. Если G — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M \neq G$ и $G/M \in \text{sform } A$, где A — простая группа, то $l_c(\mathfrak{F}) = 2$ по лемме 5. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $G = \text{SL}(2, 5)$. Тогда $\text{sform } G = \text{sform}(Z_2 \times A_5)$. Это непосредственно следует из равенства минимальных c -экранов формаций $\text{sform } G$ и $\text{sform}(Z_2 \times A_5)$.

Лемма 8. Пусть $\mathfrak{F} = \text{sform } G$, где $G = A \times B \times D$, A, B и D — попарно неизоморфные простые группы. Тогда $l_c(\mathfrak{F}) = 3$, причем максимальными c -подформациями формации $\mathfrak{F}$ являются лишь $\text{sform}(A \times B)$, $\text{sform}(D \times B)$ и $\text{sform}(A \times D)$.

Доказательство. Пусть формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию леммы и f — ее минимальный c -экран. Тогда по теореме из [8] $f(C) = \text{form}(G/F_C(G))$, если $C \in K(G)$, и $f(C) = \emptyset$, если $C \notin K(G)$. Пусть $\mathfrak{M}$ — собственная c -подформация формации $\mathfrak{F}$, m — ее минимальный c -экран и $A \in K(\mathfrak{M})$. Рассуждая как при доказательстве леммы 4, получим, что $A \in \mathfrak{M}$.

Допустим, что $\{A, B, D\} \subseteq K(\mathfrak{M})$. Тогда $\{A, B, D\} \subseteq \mathfrak{M}$ и $A \times B \times D \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = c\text{form}(A \times B \times D) \subseteq \mathfrak{M}$. Получили противоречие. Поэтому $K(\mathfrak{M})$ равно либо $(C_1) \cup (C_2)$, где C_1 и C_2 — неизоморфные простые группы из $K(G)$, либо (C) , где $C \in K(G)$, либо $\emptyset$. Значит, максимальными c -подформациями формации $\mathfrak{F}$ являются

$$c\text{form}(B \times D), \quad c\text{form}(A \times D), \quad c\text{form}(B \times A),$$

c -длина которых, согласно лемме 4, равна 2. Поэтому $l_c(\mathfrak{F}) = 3$. Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть $\mathfrak{F} = c\text{form } G$, где $G = [M]B$ — монолитическая группа с абелевым монолитом M , $K(M) = (A)$, $B \in \mathfrak{J} \setminus (A)$. Тогда $l_c(\mathfrak{F}) = 3$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G} = c\text{form}(A \times B)$, f и h — минимальные c -экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$. Покажем, что $\mathfrak{G}$ является максимальной c -подформацией формации $\mathfrak{F}$. По теореме из [8]

$$f(A) = \text{form } B, \quad f(B) = (1), \quad h(A) = h(B) = (1),$$

если B — абелева группа и

$$f(B) = \text{form } B = h(B), \quad h(A) = (1),$$

если B — неабелева группа. Ясно, что не существует минимального c -экрана m , отличного от h и f такого, что $h \leq m \leq f$. Тогда по следствию 1 из [8] $\mathfrak{G}$ — максимальная c -подформация формации $\mathfrak{F}$. По лемме 4 $l_c(\mathfrak{G}) = 2$ и, значит, $l_c(\mathfrak{F}) = 3$. Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть $G = [P]H$ — монолитическая группа с монолитом P . Если $K(P) = (Z_p)$ и H — монолитическая группа с монолитом $Q = O_p(H) \neq H$, то $\mathfrak{G} = c\text{form } H$ является единственной максимальной c -подформацией формации $\mathfrak{F} = c\text{form } G$.

Доказательство. Пусть f и h — минимальные c -экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ соответственно, $A \cong Z_p$ и $K(Q) = (B)$. Так как из монолитичности группы $G = [P]H$ следует, что $C_G(P) = P$, то по теореме из [8]

$$f(A) = \text{form}(G/F_A(G)) = \text{form}(G/P) = \text{form } H, \quad h(A) = 1.$$

По лемме 3.9 из [9] $O_p(G/P) = 1$. Следовательно, $(B) \neq (A)$. Поэтому

$$K(\mathfrak{F}) = K(\mathfrak{G}) = (A) \cup (B).$$

Если $B \cong Z_q$, то Q является силовой q -подгруппой группы H . Поэтому в любом случае Q не содержится в $\Phi(H)$. Тогда по лемме 18.2 из [10] $\text{form } H$ обладает единственной максимальной подформацией $\text{form}(H/Q)$. В силу теоремы из [8] $f(C) = h(C)$ для любой группы $C \in \mathfrak{J} \setminus A$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — собственная s -подформация формации $\mathfrak{F}$ и m — ее минимальный s -экран. По следствию 1 из [8] имеем $m \leq f$. Допустим, что $m(A) = f(A)$. Тогда из

$$G/P \in f(A) = m(A) \subseteq \mathfrak{M}$$

следует, что $G \in \mathfrak{M}$, а значит, $\mathfrak{F} = \text{sform } G \subseteq \mathfrak{M}$. Получили противоречие. Следовательно, $m(A) \neq f(A)$. Тогда

$$m(A) \subseteq \text{form}(H/Q) \subseteq \mathfrak{N}_p.$$

Пусть $M \in \mathfrak{M}$ и K/L — главный p -фактор группы M . Тогда $M/C_M(K/L) \in m(A)$. По лемме 3.9 из [9] $O_p(M/C_M(K/L)) = 1$ и, значит, $M/C_M(K/L) = 1$. Следовательно, $M/F_A(M) = 1$ для любой группы $M \in \mathfrak{M}$. По теореме из [8] получим, что

$$m(A) = \text{form}(M/F_A(M) | M \in \mathfrak{M}) = (1).$$

Следовательно, $m(A) = h(A)$. Поскольку $m(C) \subseteq f(C) = h(C)$ для любой группы $C \in \mathfrak{J} \setminus (A)$, то $m \leq h$. Отсюда следует, что

$$\mathfrak{M} = CF(m) \subseteq CF(h) = \mathfrak{G}$$

и, значит, $\mathfrak{G}$ является единственной максимальной s -подформацией формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Следствие 2. Пусть $G = [P]H$ — монолитическая группа с монолитом P . Если $K(P) = (Z_p)$ и H — монолитическая группа с неабелевым монолитом $Q = O_p(H) \neq H$, то $l_c(\mathfrak{F}) = 3$.

Доказательство. По лемме 10 $\mathfrak{G} = \text{form } H$ — единственная максимальная s -подформация формации $\mathfrak{F}$. Так как $H/Q \in \text{sform } Z_p$, по теореме 1 $l_c(\mathfrak{G}) = 2$. Поэтому $l_c(\mathfrak{F}) = 3$. Следствие доказано.

Лемма 11. Пусть A, B и C — простые группы, C не изоморфна B , G — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M \neq G$, $K(M) = (A)$ и $G/M \in \text{sform } B$. Если $\mathfrak{F} = \text{sform}(G \times C)$, то $l_c(\mathfrak{F}) = 3$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G} = \text{sform } G$, f и h — минимальные s -экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ соответственно. Покажем, что $\mathfrak{G}$ является максимальной s -подформацией формации $\mathfrak{F}$. Возможны следующие три случая.

1. Группы B и C не изоморфны группе A . Тогда $K(\mathfrak{F}) = (A) \cup (B) \cup (C)$, а $K(\mathfrak{G}) = (A) \cup (B)$. По теореме из [8]

$$f(A) = \text{form } G = h(A), \quad f(B) = h(B), \quad h(C) = \emptyset,$$

а $f(C) = 1$, если C — абелева группа и $f(C) = \text{form } C$, если C — неабелева группа. В силу следствия 1 не существует минимального s -экрана m , отличного от h и f , такого, что $h \leq m \leq f$. Тогда по следствию 1 из [8] $\mathfrak{G}$ — минимальная s -подформация формации $\mathfrak{F}$.

2. Группы B и A изоморфны. Тогда C не изоморфна A и $K(\mathfrak{F}) = (A) \cup (C)$, а $K(\mathfrak{G}) = (A)$. По теореме из [8]

$$f(A) = h(A) = \text{form } G, \quad h(C) = \emptyset,$$

а $f(C) = (1)$, если C — абелева группа, и $f(C) = \text{form } C$, если C — неабелева группа, поэтому, как в первом случае, получаем, что $\mathfrak{G}$ — максимальная s -подформация формации $\mathfrak{F}$.

3. Группы C и A изоморфны. Тогда B не изоморфна A и

$$K(\mathfrak{F}) = (A) \cup (B) = K(\mathfrak{G}).$$

По теореме из [8]

$$f(A) = \text{form}(G \times C), \quad h(A) = \text{form } G, \quad f(B) = h(B).$$

Пусть $\mathcal{L} = \text{form } C$. По лемме 18.2 из [10] $h(A)$ обладает единственной максимальной подформацией $\text{form}(G/M) \subseteq \text{sform } B$. Так как C не изоморфна B , то $\mathcal{L} \cap \text{sform } B = (1)$. Тогда $h(A) \cap \mathcal{L} = (1)$. Поскольку $f(A) = \text{form}(h(A) \cup \mathcal{L})$, по лемме из [13] $f(A) = h(A) \times \mathcal{L}$. Отсюда следует, что $h(A)$ является максимальной подформацией формации $f(A)$. Теперь, как и в первом случае, получаем, что $\mathfrak{G}$ — максимальная s -подформация формации $\mathfrak{F}$.

По теореме 1 $l_c(\mathfrak{G}) = 2$ и, значит, $l_c(\mathfrak{F}) = 3$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Кроссово многообразие групп содержит лишь конечное множество разрешимых попарно неизоморфных формационно критических групп.*

Доказательство является несложной модификацией доказательства леммы 1.1 из [14].

Лемма 13. *Пусть группа $G = H_1 \times H_2$, где H_i — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M_i \neq H_i$, $H_i/M_i \in \text{sform } C$, $K(M_i) = (A_i)$, $i = 1, 2$; A_1, A_2 и C — простые группы. Если*

$$(\text{sform } H_1) \cap (\text{sform } H_2) = \text{sform } C, \quad \mathfrak{F} = \text{sform } G,$$

то $l_c(\mathfrak{F}) = 3$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}_i = \text{sform } H_i$, $i = 1, 2$. Покажем, что $\mathfrak{G}_1$ является максимальной s -подформацией формации $\mathfrak{F}$. Пусть f и h — минимальные s -экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}_1$.

Возможны следующие пять случаев.

1. Группы A_1, A_2 и C попарно неизоморфны. Тогда

$$K(\mathfrak{F}) = (A_1) \cup (A_2) \cup (C), \quad K(\mathfrak{G}_1) = (A_1) \cup (C).$$

По теореме из [8]

$$f(A_1) = h(A_1) = \text{form } H_1, \quad f(C) = h(C), \quad f(A_2) = \text{form } H_2, \quad h(A_2) = \emptyset.$$

В силу леммы 2 не существует минимального s -экрана m , отличного от h и f такого, что $h \leq m \leq f$. Тогда по следствию 1 из [8] $\mathfrak{G}_1$ — максимальная s -подформация формации $\mathfrak{F}$.

2. Группы C и A_1 изоморфны, группа C не изоморфна A_2 . Тогда

$$K(\mathfrak{F}) = (A_1) \cup (A_2), \quad K(\mathfrak{G}_1) = (A_1).$$

По теореме из [8]

$$f(A_1) = \text{form}(H_1 \times P),$$

где $P \in \text{sform } C = \text{form } C$ и, значит,

$$f(A_1) = h(A_1) = \text{form } H_1, \quad f(A_2) = \text{form } H_2, \quad h(A_2) = \emptyset.$$

Отсюда, как и в первом случае, находим, что $\mathfrak{G}_1$ — максимальная s -подформация формации $\mathfrak{F}$.

3. Группы C и A_2 изоморфны, группа C не изоморфна A_1 . Тогда

$$K(\mathfrak{F}) = (A_1) \cup (A_2) = K(\mathfrak{G}_1).$$

По теореме из [8]

$$f(A_1) = h(A_1) = \text{form } H_1, \quad f(A_2) = \text{form } H_2, \quad h(A_2) = \text{form}(H_1/M_1) = \text{form } C.$$

По лемме 18.2 из [10] $h(A_2)$ обладает единственной максимальной подформацией $\text{form}(H_2/M_2) = \text{form } C = h(A_2)$. Как и в первом случае, отсюда следует, что $\mathfrak{G}_1$ — максимальная s -подформация формации $\mathfrak{F}$.

4. Группы A_1 и A_2 изоморфны, группа C не изоморфна A_1 . Тогда

$$K(\mathfrak{F}) = (A_1) \cup (A_2) = K(\mathfrak{G}_1).$$

Так как $\mathfrak{G}_i \subseteq \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$, и $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \text{sform } C$, то $\mathfrak{G}_i$ является собственной s -подформацией в $\mathfrak{F}$. По теореме из [8]

$$f(A_1) = \text{form } G, \quad f(C) = h(C), \quad h(A_1) = \text{form } H_1.$$

Покажем, что не существует минимального s -экрана m , отличного от h и f такого, что $h \leq m \leq f$. Пусть C — неабелева простая группа. Тогда по лемме 3.37 из [10] любая формационно критическая группа A из $f(A_1)$ является гомоморфным образом группы G . Следовательно, A изоморфна либо H_1 , либо H_2 , либо C . Так как

$$\text{form}((H_1) \cup (C)) = \text{form } H_1,$$

отсюда следует, что $h(A_1)$ является максимальной подформацией в $f(A_1)$ и, значит, либо $m = h$, либо $m = f$. Пусть $C \cong Z_p$. Тогда $\text{sform } C = \mathfrak{N}_p$, H_i/M_i является p -группой, $i = 1, 2$, и из соотношения

$$G/(M_1 \times M_2) \cong (H_1/M_1) \times (H_2/M_2)$$

следует, что $G/(M_1 \times M_2)$ является p -группой. По лемме 3.37 из [10] каждая формационно критическая группа из $f(A_1) \setminus \mathfrak{N}_p$ является гомоморфным образом группы G и, значит, изоморфна либо H_1 , либо H_2 . Так как $f(A_1) \subseteq \text{var } G$, по лемме 12 $f(A_1)$ содержит лишь конечное множество попарно неизоморфных формационно критических p -групп. Пусть $m(A_1) = \text{form}(H_1 \times R)$, где R — прямое произведение всех попарно неизоморфных формационно критических p -групп из $f(A_1)$. Допустим, что $\mathfrak{G}_1 \neq CF(m) = \mathfrak{M}$. Пусть $T \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{G}_1$ и T — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда группа T монолитическая с монолитом $N = T^{\mathfrak{G}_1}$. Пусть $K(N) = (C)$. Так как N m -центральна в T , то $T/C_T(N) \in m(C) = h(C)$. Теперь из $T/N \in \mathfrak{G}_1$ следует, что $T \in \mathfrak{G}_1$. Получили противоречие.

Пусть $K(N) = (A_1)$. Тогда $T \cong T/C_T(N) \in t(A_1)$. Поскольку $H_1 \times R$ обладает h -центральным рядом, то $H_1 \times R \in \mathfrak{G}_1$ и, значит, $t(A_1) \subseteq \mathfrak{G}_1$. Тогда $T \in \mathfrak{G}_1$. Получили противоречие.

Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_1$ и $m = h$. Поэтому $\mathfrak{G}_1$ является максимальной s -подформацией формации $\mathfrak{F}$.

5. Группы A_1, A_2 и C изоморфны. Тогда $K(\mathfrak{F}) = (A_1) = K(\mathfrak{G}_1)$. Как и в четвертом случае, C — неабелева группа и нетрудно показать, что $h(A_1)$ максимальна в $f(A_1)$ и $\mathfrak{G}_1$ — максимальная s -подформация формации $\mathfrak{F}$.

Так как $\mathfrak{G}_1$ — максимальная s -подформация формации $\mathfrak{F}$ и согласно теореме 1 $l_c(\mathfrak{G}_1) = 2$, то $l_c(\mathfrak{F}) = 3$. Лемма доказана.

Теорема 2. Если $\mathfrak{F}$ — s -формация, то $l_c(\mathfrak{F}) = 3$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \text{sform } G$, где G — группа одного из следующих типов:

- (1) $G = A \times B \times C$, где A, B, C — попарно неизоморфные простые группы;
- (2) $G = H \times C$, где H — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M \neq H$, $K(M) = (A)$, $H/M \in \text{sform } B$; $A, B, C \in K(G)$ и B не изоморфна C ;
- (3) G — монолитическая группа с неабелевым монолитом M и $l_c(\text{sform } G/M) = 2$;
- (4) $G = H_1 \times H_2$, где H_i — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M_i \neq H_i$, $H_i/M_i \in \text{sform } C$, $K(M_i) = (A_i)$, $i = 1, 2$; A_1, A_2 и C — простые группы и $(\text{sform } H_1) \cap (\text{sform } H_2) = \text{sform } C$;
- (5) $G = [M]B$ — монолитическая группа с абелевым монолитом M и B принадлежит $\mathfrak{J} \setminus K(M)$;
- (6) $G = [M]H$ — монолитическая группа с монолитом $M = O_p(G)$, H — монолитическая группа с неабелевым монолитом $Q = O^p(H) \neq H$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — s -формация, f — минимальный s -экран формации $\mathfrak{F}$ и $l_c(\mathfrak{F}) = 3$. По лемме 6 $\mathfrak{F} = \text{sform } G$ и по лемме 7 $\delta(K(\mathfrak{F})) \leq 3$. Возможны четыре случая.

1. Пусть $\delta(K(\mathfrak{F})) = 3$ и $K(\mathfrak{F}) = (A) \cup (B) \cup (C)$. Пусть группы A, B и C принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Тогда в силу леммы 8 $\text{sform}(A \times B \times C) = \mathfrak{F}$ и, значит, $G = A \times B \times G$ — группа типа 1 из заключения теоремы.

Пусть $A \notin \mathfrak{F}$ и $\{B, C\} \subseteq \mathfrak{F}$. В силу леммы 3 $A \notin \mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \text{sform}(B \times C)$. Ясно, что $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. Выберем группу $D \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$ наименьшего порядка с таким свойством. Тогда D — монолитическая группа с монолитом $P = D^{\mathfrak{F}_1}$. Пусть $\mathfrak{G} = \text{sform } D$. Так как $l_c(\mathfrak{F}_1) = 2$ и $\mathfrak{F}_1 \subset \text{sform}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{G})$, то $\mathfrak{F} = \text{sform}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{G})$ и, значит,

$$K(\mathfrak{F}) = K(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{G}) = K(\mathfrak{F}_1) \cup K(\mathfrak{G}).$$

Отсюда следует, что $A \in K(\mathfrak{G})$. Поскольку $A \notin \mathfrak{G}$, то $\delta(K(\mathfrak{G})) > 1$ и $K(P) = (A)$. Тогда $l_c(\mathfrak{G}) > 1$ по лемме 1. Пусть $l_c(\mathfrak{G}) = 2$. Из $\delta(K(\mathfrak{G})) > 1$ в силу теоремы 1 следует, что $\delta(K(\mathfrak{G})) = 2$. Пусть $K(\mathfrak{G}) = (A) \cup (B)$. По теореме 1 $\mathfrak{G} = \text{sform } H$, где H — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M \neq H$ таким, что $K(M) = (A)$ и $H/M \in \text{sform } B$. Рассмотрим группу $G = H \times C \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{G} \subset \text{sform } G$ и $l_c(\mathfrak{G}) = 2$, то $\text{sform } G = \mathfrak{F}$ и G — группа типа 2 из заключения теоремы.

Пусть $l_c(\mathfrak{G}) = 3$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ и в качестве группы G можем выбрать группу D с неабелевым монолитом $P \neq D$ таким, что $K(P) = (A)$. В силу леммы 5

$$\text{cform}(D/P) = \text{cform}(B \times C)$$

и по теореме 1 G — группа типа 3 из заключения теоремы.

Пусть $A \notin \mathfrak{F}$, $B \notin \mathfrak{F}$ и $C \in \mathfrak{F}$. В силу леммы 3 $A \notin \mathfrak{N}$ и $B \notin \mathfrak{N}$. Пусть T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus (\text{cform } C)$. Тогда T — монолитическая группа с монолитом T_1 . Допустим, что T_1 — элементарная абелева p -группа. По лемме 3 $Z_p \in \mathfrak{F}$ и, значит, $C \cong Z_p$. Тогда $\text{cform } C = \mathfrak{N}_p$ и из $T_1 = T^{\mathfrak{N}_p}$ следует, что $T \in \mathfrak{N}_p$. Но $T \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}_p$. Получили противоречие. Следовательно, T_1 — неабелева группа. Пусть $\mathfrak{T} = \text{cform } T$. По лемме 5 $\mathfrak{T}$ обладает единственной максимальной c -подформацией

$$\mathfrak{M} = \text{cform}(T/T_1) = \text{cform } C.$$

Так как $l_c(\mathfrak{M}) = 1$ по лемме 1, справедливо равенство $l_c(\mathfrak{T}) = 2$. По теореме 1 $\delta(K(\mathfrak{T})) \leq 2$. Ясно, что $C \in \mathfrak{T}$. Пусть для определенности $A \notin K(\mathfrak{T})$. Выберем группу $L \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{T}$ минимального порядка с таким свойством. Тогда L — монолитическая группа с монолитом $L_1 = L^{\mathfrak{T}}$. Пусть $\mathfrak{L} = \text{cform } L$. Так как $\mathfrak{F} = \text{cform}(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{L})$, то

$$K(\mathfrak{F}) = K(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{L}) = K(\mathfrak{T}) \cup K(\mathfrak{L})$$

и, значит, $\{A, C\} \subseteq K(\mathfrak{L})$. Следовательно, $l_c(\mathfrak{L}) \geq 2$ и $L_1 \subset L$.

Пусть $l_c(\mathfrak{L}) = 2$. Тогда в силу леммы 7 получим, что $K(\mathfrak{L}) = (A) \cup (C)$, а из $K(\mathfrak{F}) = K(\mathfrak{T}) \cup K(\mathfrak{L})$ следует, что $K(\mathfrak{L}) = (B) \cup (C)$. По теореме 1 $\mathfrak{L} = \text{cform } F$, где F — монолитическая группа с монолитом $F_1 \neq F$ таким, что $K(F_1) = (A)$ и $F/F_1 \in \text{cform } C$. Пусть $R = F \times T$. Тогда $R \in \mathfrak{F}$ и $\text{cform } R \subseteq \mathfrak{F}$. По лемме 12 $l_c(\text{cform } R) = 3$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \text{cform } R$ и в качестве группы G можно выбрать группу R , то есть G — группа типа 4 из заключения теоремы.

Пусть $l_c(\mathfrak{L}) = 3$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} = \text{cform } L$, где L — монолитическая группа с монолитом $L_1 = L^{\mathfrak{T}}$. Так как $A \notin K(\mathfrak{T})$, то $K(L_1) = (A)$. Следовательно, L — монолитическая группа с неабелевым монолитом L_1 . По лемме 5 $\mathfrak{L}$ обладает единственной максимальной c -подформацией $\mathfrak{L}_1 = \text{cform}(L/L_1)$, причем $l_c(\mathfrak{L}_1) = 2$. В качестве группы G можно выбрать группу L и, значит, G — группа типа 3 из заключения теоремы.

II. Пусть $K(\mathfrak{F}) = (A) \cup (B)$, $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$. Тогда $A \times B \in \mathfrak{F}$ и в силу теоремы 1 получим, что $\mathfrak{F}_1 = \text{cform}(A \times B) \subset \mathfrak{F}$. Выберем группу $H \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$ наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H — монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}_1}$. Пусть $\mathfrak{G} = \text{cform } H$ и $K(M) = (A)$. Если $l_c(\mathfrak{G}) = 1$, то H — простая группа, неизоморфная ни группе A , ни группе B , что невозможно. Значит, $l_c(\mathfrak{G}) \in \{2, 3\}$.

Пусть $l_c(\mathfrak{G}) = 2$. Тогда по лемме 7 $\delta(K(\mathfrak{G})) \leq 2$. Пусть $K(\mathfrak{G}) = (A)$. Тогда по теореме 1 H — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M \neq H$, $K(M) = (A)$ и $H/M \in \text{cform } A$. Пусть $F = H \times B$. Тогда $F \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1 \subset \text{cform } F \subseteq \mathfrak{F}$ и, следовательно, $\mathfrak{F} = \text{cform } F$ и в качестве группы G можем взять группу F , то есть G — группа типа 2 из заключения теоремы.

Пусть $K(\mathfrak{G}) = (A) \cup (B)$. Допустим, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}$. Так как $l_c(\mathfrak{F}_1) = l_c(\mathfrak{G}) = 2$, то $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{G}$ и, значит, $H \in \mathfrak{F}_1$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{F}_1$ не содержится в $\mathfrak{G}$. Но тогда и $\{A, B\}$ не содержится в $\mathfrak{G}$. Пусть для определенности, $A \notin \mathfrak{G}$. Тогда по лемме 3 $A \notin \mathfrak{U}$ и по теореме 1 H — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M \neq H$, $K(M) = (A)$ и $H/M \in \text{cform } B$. Пусть $R = H \times A$. Тогда $R \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \text{cform } R$.

В качестве группы G можем взять группу R , то есть группа G — группа типа 2 из заключения теоремы.

Пусть $l_c(\mathfrak{G}) = 3$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. Пусть $M = H^{\mathfrak{F}_1}$ — неабелева группа. Тогда по лемме 5 $\mathfrak{F}$ содержит единственную максимальную s -подформацию $\mathfrak{G}_1 = \text{sform}(H/M)$. Из того, что $l_c(\mathfrak{F}) = 3$, следует, что $l_c(\mathfrak{G}_1) = 2$. В качестве группы G можно выбрать группу H и, значит, G — группа типа 3 из заключения теоремы.

Пусть M — абелева группа, $K(M) = (A)$ и $A \cong Z_p$. Пусть $B \notin \mathcal{U}$. Допустим, что M центральна в H . Пусть f_1 — минимальный s -экран формации $\mathfrak{F}_1 = \text{sform}(A \times B)$. Тогда $f_1(A) = (1)$ и $f_1(B) = \text{form } B$. Так как $H/M \in \mathfrak{F}_1$, каждый главный p -фактор группы H/M централен в H/M . Поэтому $f(A) = (1)$. Поскольку

$$f(B) = \text{form}(H/F_B(H)) = \text{form}((H/M)/F_B(H/M)) \subseteq f_1(B),$$

то $f(B) = f_1(B)$ и $f(C) = f_1(C) = \emptyset$ для любой простой группы C , неизоморфной группам A и B . Следовательно, $f = f_1$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Тогда по теореме 1 $l_c(\mathfrak{F}) = 2$. Получили противоречие. Значит, M не центральна в H . Хорошо известно, что класс $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп является композиционной формацией. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{N}^*$. Поскольку $H/M \in \mathfrak{F}_1$, то

$$H/M = F^*(H/M) = F(H/M)E(H/M),$$

где $E(H/M)$ — слой группы H/M , причем $E(H/M)$ является центральным произведением квазипростых групп E_i таких, что $E_i/Z(E_i) \cong B$, $Z(E_i) = O_p(E_i)$, $i = 1, 2, 3$, и $F(H/M) = O_p(H/M)$. По лемме 3.9 из [9] $O_p(H/C_H(M)) = 1$. Теперь из строения H следует, что $f(A) = \text{form } B$ и $f(B) = \text{form } B$. По лемме 18.8 из [10] существует точный неприводимый $F_p[B]$ -модуль V . Рассмотрим группу $R = [V]B$. Пусть φ — минимальный s -экран формации $\mathfrak{R} = \text{sform } R$. По теореме из [8] $\varphi(Z_p) = \text{form } B$. Следовательно, $\varphi = f$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}$ и в качестве группы G можно взять группу R , то есть G — группа типа 5 из заключения теоремы.

Пусть $B \cong Z_q$. Тогда $\mathfrak{F}_1 = \text{sform}(A \times B) = \mathfrak{N}_p \times \mathfrak{N}_q$. Допустим, что M центральна в H . Так как $H/M \in \mathfrak{F}_1$, то H нильпотентна и $K(H) \subseteq (A) \cup (B)$. Но тогда $\mathfrak{F} = \text{sform } H \subseteq \mathfrak{N}_p \times \mathfrak{N}_q$ и, значит, $l_c(\mathfrak{F}) \leq 2$. Получили противоречие. Следовательно, M не центральна в H . Из включения $H/M \in \mathfrak{N}_p \times \mathfrak{N}_q$ следует, что силовская p -подгруппа H_p нормальна в H и, значит, $H = [H_p]H_q$. В силу леммы 3.9 из [9] $H_p \subseteq C_H(M) = C$. Допустим, что $D = C \cap H_q \neq 1$. Тогда $D \triangleleft H_q$ и

$$H_p/M \subseteq N_{H/M}(DM/M) = N_H(DM)/M.$$

Следовательно, $H_p \subseteq N_H(DM) = T$. По лемме Фраттини из $DM \triangleleft T$ следует, что $T = DMN_T(D) = N_T(D)$. Поэтому

$$N_H(D) \supseteq \langle T \cup H_q \rangle \supseteq \langle H_p \cup H_q \rangle = H$$

и, значит, $D \triangleleft H$, но это противоречит монолитичности группы H . Поэтому $D = 1$. По теореме из [8] получим, что $f(A) = \text{form } H_q$, $f(B) = 1$ и $f(C) = \emptyset$ для любой простой группы C , неизоморфной группам A и B . По теореме 2.4 из [9] $f(X)$ наследственна для любой $X \in \mathfrak{J}$. Тогда по следствию 1.1 из [12] формация $\mathfrak{F}$ наследственна. Пусть $S = [M]H_q \leq H$. Тогда $S \in \mathfrak{F}$. Пусть ψ — минимальный s -экран формации $\mathfrak{F}_2 = \text{sform } S$. По теореме из [8] $\psi(A) = \text{form } H_q$, $\psi(B) = (1)$ и $\psi(C) = \emptyset$ для любой простой группы C , неизоморфной группам A и B . Так как $f = \psi$, то

$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$ и, значит, $H = S$. Допустим, что $|H_q| > q$. Если H_q — абелева группа, то по лемме 4.1 из [9] H_q — циклическая группа. Пусть $1 < Q < H_q$ и $S_1 = [M]Q$. Тогда $S_1 \in \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}_3 = \text{cform } S_1$ и ψ_1 — минимальный s -экран формации $\mathfrak{F}_3$. По теореме из [8]

$$\psi_1(A) = \text{form } Q \subset \text{form } H_q = f(A), \quad \psi_1(B) = (1)$$

и $\psi_1(C) = \emptyset$ для любой простой группы C , неизоморфной группам A и B . Тогда по следствию 1 из [8] $\mathfrak{F}_3 \subset \mathfrak{F}$. По теореме 1 $l_c(\mathfrak{F}_3) \geq 3$ и, значит, $l_c(\mathfrak{F}) > 3$. Получили противоречие. Если H_q — неабелева группа, то, полагая $Q = Z(H_q)$, аналогично получим противоречие. Следовательно, $|H_q| = q$ и $G = S$ — типа 5 из заключения теоремы.

III. Пусть $K(\mathfrak{F}) = (A) \cup (B)$, $A \notin \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3 A — неабелева простая группа и каждая простая группа из $\mathfrak{F}$ изоморфна группе B . Так как $l_c(\mathfrak{F}) = 3$, по определению s -длины в $\mathfrak{F}$ существует максимальная s -подформация $\mathfrak{G}$ такая, что $l_c(\mathfrak{G}) = 2$. В силу теоремы 1 $\mathfrak{G} = \text{cform } H$, где H — монолитическая группа с неабелевым монолитом $M \neq H$ и $H/M \in \text{cform } B$. Пусть $F \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$ и F — группа минимального порядка с таким свойством. Тогда F — монолитическая группа с монолитом $N = F^\mathfrak{G}$, $B \in K(F)$ и $K(F) \subseteq (A) \cup (B)$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \text{cform } F$. По лемме 1 $l_c(\mathfrak{F}_1) \geq 2$.

Пусть $l_c(\mathfrak{F}_1) = 2$. Тогда по теореме 1 можем считать, что F — монолитическая группа с неабелевым монолитом $N \neq F$ и $F/N \in \text{cform } B$. Поскольку $\mathfrak{G} \notin \mathfrak{F}_1$ и по лемме 5 $\text{cform } B$ — единственная максимальная s -подформация в s -формациях $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}_1$, то $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{F}_1 = \text{cform } B$. Полагая $G = H \times F$, получим, что $\mathfrak{F} = \text{cform } G$ и G — группа типа 4 из заключения теоремы.

Пусть $l_c(\mathfrak{F}_1) = 3$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 = \text{cform } F$ и $K(F) = (A) \cup (B)$. Пусть N — неабелева группа. Тогда, в силу леммы 5, $l_c(\text{cform}(F/N)) = 2$. Полагая $G = F$, получим, что G — группа типа 3 из заключения теоремы.

Пусть N — абелева p -группа. Тогда $K(N) = (B)$, $A \in K(H) = K(\mathfrak{G})$ и $F/N \in \mathfrak{G}$. По лемме 5 $\text{cform } B = \mathfrak{N}_p$ — единственная максимальная s -подформация формации $\mathfrak{G}$. Допустим, что $F/N \in \mathfrak{N}_p$. Тогда $F \in \mathfrak{N}_p$ и, значит, $\mathfrak{F} = \text{cform } F = \mathfrak{N}_p$, что невозможно. Следовательно, $\text{cform}(F/N) = \mathfrak{G}$. Пусть h — минимальный s -экран формации $\mathfrak{G}$. Допустим, что N центральна в F . Тогда $f(B) = h(B) = 1$, $f(A) = h(A) = \text{form } H$ и $g(C) = h(C) = \emptyset$ для любой простой группы C , неизоморфной группам A и B . Поэтому $f = h$ и, значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. Однако, $l_c(\mathfrak{G}) = 2$. Получили противоречие. Значит, N не центральна в F . По лемме 3.9 из [9] $O_p(F/C_F(N)) = 1$. Поскольку $N \leq C_F(N)$ и $C = C_F(N) \neq F$, то $A \in K(F/C)$ и $F/C \in \mathfrak{G}$. Так как $A \notin \mathfrak{G}$, отсюда следует, что $O^p(F/C) \neq F/C$. Тогда по лемме 1 $l_c(\text{cform}(F/C)) > 1$ и, значит, $\text{cform}(F/C) = \mathfrak{G}$. По теореме из [8]

$$h(A) = \text{form } H = \text{form}((F/C)/F_A(F/C)).$$

Следовательно, $H \in \text{form}(F/C) = f(B)$. Так как $O_p(H) = 1$, по лемме 18.8 из [10] существует точный неприводимый $F_p[H]$ -модуль V . Рассмотрим группу $D = [V]H$. Пусть $\mathfrak{D} = \text{cform } D$ и d — минимальный s -экран формации $\mathfrak{D}$. По теореме из [8]

$$\begin{aligned} d(B) &= \text{form}(D/F_B(D)) = \text{form } H \subseteq f(B), \\ d(A) &= \text{form}(D/F_A(D)) = \text{form } H = h(A) \subseteq f(A). \end{aligned}$$

Следовательно, $d \leq f$. Тогда $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}$. Так как по следствию 2 $l_c(\mathfrak{D}) = 3$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{D}$. Полагая $G = D$, получим, что G — группа типа 6 из заключения теоремы.

IV. Пусть $K(\mathfrak{F}) = (A)$. Допустим, что $A \cong Z_p$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ и $l_c(\mathfrak{F}) = 1$. Получили противоречие. Следовательно, A — неабелева простая группа. Далее, следуя схеме рассуждений пункта III, нетрудно показать, что $\mathfrak{F} = \text{sform } G$ и G — группа либо типа 4, либо типа 3 из заключения теоремы.

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \text{sform } G$, где G — группа одного из типов 1–6 из условия теоремы. Покажем, что $l_c(\mathfrak{F}) = 3$. Если G — группа типа 1 или 2, то по лемме 8 или 11 соответственно, получим, что $l_c(\mathfrak{F}) = 3$.

Пусть G — группа типа 3. Тогда по лемме 5 $\mathfrak{F}$ содержит единственную максимальную s -подформацию $\mathfrak{F}_1 = \text{sform}(G/M)$. Так как по условию $l_c(\mathfrak{F}_1) = 2$, отсюда следует, что $l_c(\mathfrak{F}) = 3$.

Пусть G — группа типа 4. Тогда по лемме 13 $l_c(\mathfrak{F}) = 3$.

Если G — группа типа 5 или 6, то по лемме 9 или 10 соответственно получим, что $l_c(\mathfrak{F}) = 3$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Скиба А. Н., *Алгебра формаций*. Беларуская навука, Минск, 1997.
2. Скиба А. Н., О локальных формациях длины 5. В кн.: *Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп*. Наука и техника, Минск, 1986, 135–149.
3. Чиспяков С. В., *О композиционных формациях с заданными системами нильпотентных подформаций*. Деп. в ВИНТИ 26.10.98, №3098–В98.
4. Ведерников В. А., Формации конечных групп с дополняемыми подформациями длины 3. *Тезисы докладов научно-практической конференции, посвященной 60-летию БГПИ*. Брянск, 1990, т. 1, 41–42.
5. Эйдинов М. И., Элементы высоты два решетки формаций конечных групп. *Изв. вузов. Математика* (1990) №6, 77–80.
6. Ведерников В. А., Формации конечных групп с дополняемыми подформациями длины 3. *Вопросы алгебры* (1993) 6, 16–21.
7. Джарадин Дж., Элементы высоты 3 решетки p -насыщенных формаций. *Вопросы алгебры* (1995) 9, 119–132.
8. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., О минимальном композиционном экране композиционной формации. *Вопросы алгебры* (1992) 7, 39–43.
9. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп*. Наука, Москва, 1978.
10. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., *Формации алгебраических систем*. Наука, Москва, 1989.
11. Сорокина М. М., *Композиционные критические формации*. Дисс. на соиск. ученой степ. канд-та физ.-матем. наук. Брянск, 1998.
12. Ведерников В. А., Сорокина М. М., Композиционные наследственные критические форматы. *Вопросы алгебры* (1997) 11, 6–19.
13. Скиба А. Н., О дополняемых подформациях. *Вопросы алгебры* (1996) 9, 114–118.
14. Bryant R. M., Bryce R. A., Hartley B., The formation generated by a finite group. *Bull. Austral. Math. Soc.* (1970) 2, №3, 347–357.

Статья поступила 03.07.1998.

Переработанный вариант поступил 14.03.2000.