Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, Некоторые необходимые условия хроматичности многочлена, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 1, 73–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:46:37

Некоторые необходимые условия хроматичности многочлена

© 2001 г. В. А. Воблый

Предложены два необходимых условия хроматичности многочлена, которые в ряде случаев оказываются сильнее некоторых известных условий.

Пусть $P(G, \lambda)$ — хроматический многочлен графа G с p помеченными вершинами. Известно (см. [1–5]) много необходимых условий того, что многочлен $P(\lambda)$ степени p с целыми коэффициентами является хроматическим многочленом некоторого графа G . В этой статье предложены еще два необходимых условия хроматичности многочлена, которые в ряде случаев оказываются сильнее некоторых известных условий.

Теорема 1. Пусть

$$p(G, \lambda) = \sum_{k=0}^p a_k \lambda^k$$

— хроматический многочлен связного графа g с p вершинами. Тогда для любого $j = 1, \dots, p$

$$(-1)^{p-j} \sum_{k=j}^p \binom{k-1}{j-1} a_k \geq 0. \quad (1)$$

Доказательство. Известно [6], что в разложении

$$P(G, \lambda) = \sum_{k=1}^p P(T_k, \lambda) \quad (2)$$

по базису из деревьев T_k с k вершинами коэффициенты b_k чередуются по знаку, то есть $b_k = (-1)^{p-k} |b_k|$, $k = 1, \dots, p$. Подставляя в (2) известное выражение для хроматического многочлена дерева

$$P(T_k, \lambda) = \lambda(1 - \lambda)^{k-1}$$

(см. [1]), после замены переменной $\lambda = \mu + 1$, получим, что

$$P(G, \mu + 1) = \sum_{k=0}^p a_k (\mu + 1)^k = \sum_{k=1}^p b_k (\mu + 1)^{k-1}. \quad (3)$$

Так как $a_0 = 0$, деля обе части (3) на $\mu + 1$, применяя формулу бинома Ньютона и изменяя порядок суммирования, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p b_k \mu^{k-1} &= \sum_{k=1}^p a_k (\mu + 1)^{k-1} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \mu^i a_k \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^k \binom{k-1}{j-1} \mu^{j-1} a_k = \sum_{j=1}^p \sum_{k=j}^p \binom{k-1}{j-1} a_k \mu^{j-1}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , находим, что

$$b_j = \sum_{k=j}^p \binom{k-1}{j-1} a_k = (-1)^{p-j} |b_j|.$$

Следовательно, для любого $j = 1, \dots, p$

$$|b_j| = (-1)^{p-j} \sum_{k=j}^p \binom{k-1}{j-1} a_k \geq 0.$$

Отметим, что для $j = p$ неравенство (1) равносильно тому, что $a_p \geq 0$, а для $j = p - 1$ оно равносильно неравенству $a_{p-1} + (p-1)a_p \leq 0$, или $-q + p - 1 \leq 0$, то есть условию связности графа. При $j = 1$ условие (1) превращается в неравенство

$$(-1)^{p-1} \sum_{k=1}^p a_k \geq 0,$$

которое следует из условия Оре (см. [2])

$$P(G, 1) = \sum_{k=1}^p a_k = 0.$$

Таким образом, имеет смысл использовать (1) при $j = 2, \dots, p - 2$.

Теорема 2. Пусть $P(G, \lambda)$ – хроматический многочлен графа G с p вершинами. Тогда для любого $j = 2, \dots, p$

$$P(G, \lambda) \geq \sum_{s=1}^{j-1} (-1)^{j-s+1} \binom{p+1}{j-s} P(G, s). \quad (4)$$

Доказательство. В [7] приведено тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(G, n) x^n = \frac{1}{(1-x)^{p+1}} \sum_{i=0}^p q_i x^i, \quad (5)$$

где $q_i \geq 0$ для любого $i = 0, 1, \dots, p$. Умножим обе части равенства (5) на множитель $(1-x)^{p+1}$, затем разложим его по формуле бинома Ньютона и получим равенство

$$\sum_{m=0}^{p+1} (-1)^m \binom{p+1}{m} x^m \sum_{n=1}^{\infty} P(G, n) x^n = \sum_{i=0}^p q_i x^i.$$

Используя формулу для общего члена произведения степенных рядов

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \sum_{j=0}^{\infty} d_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j c_s d_{j-s} x^j,$$

где

$$c_j = P(G, j), \quad d_j = (-1)^j \binom{p+1}{j},$$

получим, что для любого $j = 0, 1, \dots, p$

$$q_j = \sum_{s=0}^j (-1)^{j-s} \binom{p+1}{j-s} P(G, s) \geq 0.$$

Выделяя слагаемое, соответствующее $s = j$, и перенеся оставшуюся часть суммы в правую часть неравенства, завершаем доказательство.

Интересно сравнить (1) и (4) с необходимыми условиями Котляра [5] хроматичности многочлена:

$$\sum_{k=j}^p S(k, j) a_k \geq 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (6)$$

где $S(k, j)$ — числа Стирлинга 2-го рода, и необходимыми условиями Хватала [4]:

$$\Delta^{j+1} P(G, 0) \geq \frac{J}{j-1} (2^{p/j} - 2) \Delta^j P(G, 0), \quad j = 2, \dots, p-1. \quad (7)$$

Многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^4 + 7\lambda^3 - 5\lambda^2 + \lambda$$

не является хроматическим, так как он должен был бы соответствовать графу с 5 вершинами, 4 ребрами и 1 компонентой связности, то есть дереву T_5 . Однако

$$P(T_5, \lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^4 + 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda.$$

Условие (1) не выполнено при $j = 2$, хотя условия (4), (6) и (7) выполняются при любом допустимом значении j . В то же время для нехроматического многочлена

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda,$$

соответствующего графу с 4 вершинами, 3 ребрами и 1 компонентой связности и отличающегося от

$$P(T_4, \lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda,$$

условия (1), (6) и (7) выполнены, а условие (4) не выполняется при $j = 3$.

Оказывается, что условие (4) всегда сильнее условия Котляра.

Теорема 3. *Необходимое условие Котляра (6) хроматичности многочлена следует из условия (4).*

Доказательство. Действительно, подставляя в левую часть неравенства (6) выражение для a_k через $P(G, \lambda)$, получаем, что

$$\begin{aligned}\gamma_j &= \sum_{k=j}^p S(k, j) a_k \\ &= \sum_{k=j}^p S(k, j) \operatorname{Coef}_{\lambda} P(G, \lambda) \lambda^{-k-1}.\end{aligned}$$

Переставляя знаки операций суммирования и взятия коэффициента при степени многочлена и используя производящую функцию чисел Стирлинга 2-го рода (см. например [8])

$$\sum_{k=j}^{\infty} S(k, j) t^k = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \frac{1}{1-it},$$

находим, что

$$\begin{aligned}\gamma_j &= \operatorname{Coef}_{\lambda} \lambda^{-1} P(G, \lambda) \sum_{k=j}^{\infty} S(k, j) \lambda^{-k} \\ &= \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \operatorname{Coef}_{\lambda} \frac{P(G, \lambda)}{\lambda - i} \\ &= \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} P(G, i) \\ &= \frac{1}{j!} \Delta^j P(G, 0).\end{aligned}$$

Следовательно, условие Котляра (6) равносильно условию

$$\Delta^j P(G, 0) \geq 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (8)$$

Подставляя в равенство (5) выражение $P(G, n)$ по формуле Ньютона

$$P(G, n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^j P(G, 0)$$

и изменяя порядок суммирования, получаем, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^p q_i x^i &= (1-x)^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^j P(G, 0) x^n \\ &= (1-x)^{p+1} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^j P(G, 0) \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} x^n.\end{aligned}$$

Делая замену индекса суммирования $i = n - j$ и используя ряд (см., например, [9])

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+j)!}{i!} x^i = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}},$$

находим, что

$$\sum_{i=0}^p q_i x^i = (1-x)^p \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^j P(G, 0) \left(\frac{x}{1-x} \right)^j.$$

После замены переменной $t = x/(1-x)$ и применения бинома Ньютона получим равенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^j P(G, 0) t^j &= \sum_{i=0}^p q_i t^i (t+1)^{p+1-i} \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{s=0}^{p+1-i} \binom{p+1-i}{j-i} q_i t^{i+s}. \end{aligned}$$

Наконец, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t , находим, что

$$\Delta^j P(G, 0) = \sum_{i=0}^p \binom{p+1-i}{j-i} q_i = \sum_{i=0}^j \binom{p+1-i}{j-i} q_i \geq 0$$

при $q_i \geq 0$, и таким образом завершим доказательство.

Отметим, что легко доказывается по индукции, что условие Котляра является следствием также условием Хватала.

Список литературы

1. Харари Ф., *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.
2. Оре О., *Теория графов*. Наука, Москва, 1968.
3. Read R. C., An introduction to chromatic polynomials. *J. Combin. Theory* (1968) **4**, 52–71.
4. Wolf H. S., Which polynomials are chromatic? *Colloq. Intern. sulle Theorie Combinatorie*, Rome, 1976, 247–256.
5. Котляр Б. Д., Об одном необходимом условии хроматичности многочлена. *Кибернетика и системный анализ* (1998) №5, 176–178.
6. Adam A. A., Broere J., Chromatic polynomials of graphs in terms of trees. *J. Math. Phys. Sci.* (1993) **27**, 231–240.
7. Linial N., Graph coloring and monotone functions on posets. *Discrete Math.* (1986) **58**, №1, 97–98.
8. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*. ИЛ, Москва, 1963.
9. Прудников Ф. П., *Интегралы и ряды*. Наука, Москва, 1981.

Статья поступила 15.09.1999.