Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Э. Зверович, Сильные k -раскраски графов, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 1, 78–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:41:59

УДК 519.1

Сильные k -раскраски графов

© 2001 г. И. Э. Зверович

Правильная k -раскраска $C_1, \dots, C_k$ графа G называется сильной, если для любой вершины $u \in VG$ существует индекс $i \in \{1, \dots, k\}$ такой, что u смежна с каждой вершиной класса C_i . В этой работе рассмотрен класс $S(k)$ сильно k -раскрашиваемых графов и показано, что задача распознавания $S(k)$ является NP-полной при любом $k \geq 4$, а при $k = 3$ — полиномиально разрешимой. Мы даем характеристику класса $S(3)$ в терминах запрещенных порожденных подграфов и решаем проблему единственности сильной 3-раскраски.

Мы придерживаемся, в основном, терминологии книг [1, 3]. Хорошо известно, что задачи k -раскраски (разбиения множества вершин графа на k подмножеств с заданными наследственными свойствами порожденных подграфов) часто являются сложными уже при малых значениях k . Так, задача распознавания k -раскрашиваемых графов (в обычном смысле) является NP-полной при $k \geq 3$ [1]. Для графов, имеющих (k, l) -раскраску (то есть разбиение на k независимых множеств и l клик), задача распознавания NP-полна при $\max\{k, l\} \geq 3$ (см. [2]).

Однако, введение дополнительных условий на множества ребер между цветными классами позволяет получить в некоторых случаях полиномиально распознаваемые классы. Так, можно показать, что все классы графов, имеющих l -ограниченную k -раскраску, могут быть охарактеризованы конечным числом запрещенных порожденных подграфов, что влечет полиномиальную распознаваемость таких классов.

В этой работе мы рассмотрим класс $S(k)$ сильно k -раскрашиваемых графов и покажем, что задача распознавания $S(k)$ является NP-полной при любом $k \geq 4$, а при $k = 3$ полиномиально разрешимой. Кроме того, мы дадим характеристику класса $S(3)$ в терминах запрещенных порожденных подграфов и решим проблему единственности сильной 3-раскраски.

Запись $u \sim v$ (соответственно, $u \not\sim v$) означает, что вершины u и v смежны (соответственно, не смежны). Окружением вершины u графа G называется множество $N(u) = \{v \in VG : u \sim v\}$. Если $X, Y \subseteq VG$ и $X \cap Y = \emptyset$, то $X \sim Y$ (соответственно, $X \not\sim Y$) означает, что $x \sim y$ (соответственно, $x \not\sim y$) для любых $x \in X$ и $y \in Y$. При $X = \{x\}$ мы будем писать $x \sim Y$ и $x \not\sim Y$ вместо $\{x\} \sim Y$ и $\{x\} \not\sim Y$. Подграф графа G , порожденный множеством $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq VG$, обозначается через $G(X)$ или $G(x_1, \dots, x_n)$.

Правильная k -раскраска $C_1, \dots, C_k$ графа G называется сильной, если для любой вершины $u \in VG$ существует индекс $i \in \{1, \dots, k\}$ такой, что $u \sim C_i$. Обозначим через $S(k)$ класс всех графов, имеющих сильную k -раскраску. Ясно, что $S(1) = \emptyset$ и $S(2)$ есть множество всех полных двудольных графов (наследственный

Рис. 1. Некоторые минимальные запрещенные порожденные подграфы для класса $S(3)$

класс, определяемый двумя запрещенными порожденными подграфами $K_1 \cup K_2$ и K_3). Очевидно, что при любом $k \geq 3$ класс $S(k)$ также является наследственным и, следовательно, допускает характеристику в терминах запрещенных порожденных подграфов.

Теорема 1. *Граф G принадлежит $S(3)$ тогда и только тогда, когда он не содержит графов $G_1, \dots, G_{10}$ (рис. 1) и простых циклов C_{2n+1} , $n \geq 2$, в качестве порожденных подграфов.*

Доказательство. Докажем необходимость.

Лемма 1. *Если H — двудольный граф, то $H \in S(3)$.*

Рис. 2.

Доказательство. Пусть $C_1 \cup C_2 = VH$ есть разбиение на доли графа H . Тогда $C_1, C_2, C_3 = \emptyset$ является сильной 3-раскраской графа H .

Покажем, что $H = C_{2n+1} \notin S(3)$ при $n \geq 2$. Пусть $VH = \{v_1, \dots, v_{2n+1}\}$ (вершины перечислены в порядке обхода цикла). Пусть C_1, C_2, C_3 — сильная 3-раскраска графа H . Можно считать, что $v_1 \in C_1$ и $v_2 \in C_2$. Каждая вершина v_i , $4 \leq i \leq 2n$, не смежна с вершинами v_1 и v_2 , поэтому $v_i \in C_3$. Так как граф H не двудольный, то хотя бы одна из вершин v_3 или v_{2n+1} принадлежит C_3 . В силу симметрии можно считать, что $v_3 \in C_3$. Так как v_3 не смежна с $v_1 \in C_1$ и v_{2n+1} , то $v_{2n+1} \notin C_2$. Следовательно, $v_{2n+1} \in C_3$. Так как v_1 не смежна с $v_3 \in C_3$ и v_4 , то $v_4 \notin C_2$. Поэтому $v_4 \in C_1$. Тогда $v_2 \in C_2$ не смежна с вершинами $v_4 \in C_1$ и $v_{2n+1} \in C_3$. Пришли к противоречию. Итак, простые циклы C_{2n+1} не принадлежат $S(3)$ при $n \geq 2$.

Непосредственно проверяется, что графы $G_1, \dots, G_{10}$ (рис. 1) не имеют сильной 3-раскраски. При удалении любой вершины из графов $G_1, \dots, G_{10}$ и C_{2n+1} , $n \geq 2$, получается либо двудольный граф, (который по лемме 1 принадлежит $S(3)$), либо один из графов, показанных на рис. 2 (которые имеют сильную 3-раскраску). Итак, графы $G_1, \dots, G_{10}$ и C_{2n+1} , $n \geq 2$, являются минимальными запрещенными порожденными подграфами для класса $S(3)$.

Докажем достаточность. Пусть граф G не содержит порожденных подграфов $G_1, \dots, G_{10}$ и C_{2n+1} , $n \geq 2$. Вершина называется доминирующей, если она смежна со всеми другими вершинами графа.

Лемма 2. Если граф G содержит доминирующую вершину u , то $G \in S(3)$ тогда и только тогда, когда граф $G - u$ является двудольным.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть C_1, C_2, C_3 — 3-раскраска графа G . Можно считать, что $C_1 = \{u\}$. Тогда $G - u$ имеет 2-раскраску C_2, C_3 .

Докажем достаточность. Пусть C_2, C_3 есть разбиение на доли графа $G - u$. Тогда $C_1 = \{u\}$, C_2, C_3 является сильной раскраской графа G .

Продолжим доказательство теоремы. Если в G есть доминирующая вершина u , то граф $G - u$ не содержит треугольников (так как G не имеет порожденного подграфа G_2). Кроме того, все циклы C_{2n+1} , $n \geq 2$, по условию не являются порожденными подграфами графа $G - u$. По теореме Кенига граф $G - u$ является двудольным. По

Рис. 3. Графы F и H Рис. 4. Граф Q

лемме 2 справедливо включение $G \in S(3)$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что в G нет доминирующих вершин.

Вершины u и v называются раздвоенными, если $N(u) = N(v)$. В частности, раздвоенные вершины не смежны.

Лемма 3. Если u и v являются раздвоенными вершинами графа G , то $G \in S(3)$ тогда и только тогда, когда $G - u \in S(3)$.

Доказательство. Необходимость вытекает из наследственности графа $S(3)$.

Докажем достаточность. Пусть C_1, C_2, C_3 является сильной 3-раскраской графа $G - u$, причем $u \in G_1$. Легко видеть, что $G_1 \cup \{u\}, C_2, C_3$ является сильной 3-раскраской графа G .

В силу леммы 3 можно считать, что граф G не имеет раздвоенных вершин.

Лемма 4. Если граф G , не имеющий порожденных подграфов $G_1, \dots, G_{10}$ и C_{2n+1} , $n \geq 2$, не содержит доминирующих и раздвоенных вершин, то либо G является двудольным, либо по крайней мере один из графов F или H , показанных на рис. 3, является порожденным подграфом графа G .

Доказательство. Пусть G не является двудольным. Тогда G содержит порожденный нечетный простой цикл $C = C_{2n+1}$. При $n \geq 2$ получаем противоречие с условием. Поэтому $C = C_3$. Пусть $VC = \{u, v, w\}$.

Рассмотрим максимальное независимое множество I , содержащее вершину u . Так как u не является доминирующей, то $|I| \geq 2$. Если существует вершина $x \in I \setminus \{u\}$, не смежная с одной из вершин v, w (пусть $x \sim w$), то $x \sim v$ (иначе $\{u, v, w, x\}$ порождает G_1) и мы получаем порожденный подграф Q , показанный на рис. 4.

В противном случае произвольная вершина $x \in I \setminus \{u\}$ смежна с v и w . Так как u и x не являются раздвоенными, существует вершина y , не смежная с одной из них и смежная с другой. В силу симметрии можно считать, что $y \sim u$ и $y \sim x$. Так как $\{v, w, x, y\}$ не порождает G_1 , можно считать, что $y \sim u$. Так как $\{u, v, w, y\}$ не порождает G_2 , можно считать, что $y \sim w$. Тогда множество $\{u, v, x, y\}$ порождает граф Q .

Итак, мы показали, что граф G содержит порожденный подграф Q . (Обозначения вершин см. на рис. 4). Рассмотрим теперь максимальное независимое множество J , содержащее вершину v . Так как v не является доминирующей, то $|J| \geq 2$. Если существует вершина $z \in J \setminus \{v\}$, не смежная хотя бы с одной из вершин u, w (пусть $z \sim u$), то $z \sim w$ (иначе $\{u, v, w, z\}$ порождает G_1) и множество $\{u, v, w, x, z\}$ порождает один из графов F или H , что и требуется. В противном случае, произвольная вершина $z \in J \setminus \{v\}$ смежна с обеими вершинами u и w . Так как $\{u, w, x, z\}$ не порождает G_1 , то $u \sim z$. Далее, вершины v и z не являются раздвоенными, то есть существует вершина t , не смежная с одной из них и смежная с другой. В силу симметрии можно считать, что $t \sim v$ и $t \sim z$. Как и выше, из отсутствия G_1 и G_2 следует, что t смежна ровно с одной вершиной множества $\{u, w\}$. Пусть $t \sim u$ и $t \sim w$. Тогда множество $\{u, w, x, z, t\}$ порождает F или H .

Если граф G является двудольным, то $G \in S(3)$ по лемме 1. В противном случае, по лемме 4 граф G содержит один из графов F или H в качестве порожденного подграфа.

Лемма 5. Если граф G удовлетворяет условиям леммы 4 и содержит порожденный подграф F (рис. 3), то $G \in S(3)$.

Доказательство. Если $G = F$, то $G \in S(3)$. В противном случае существует вершина $u \in VG \setminus VF$. Зафиксируем обозначения вершин подграфа F , указанные на рис. 3. Легко проверить, что F имеет единственную (с точностью до переименования цветных классов) сильную 3-раскраску C_1, C_2, C_3 . Будем считать, что $C_1 = \{b\}$, $C_2 = \{a, c, e\}$ и $C_3 = \{d\}$.

Покажем, что эта раскраска порождает единственную сильную 3-раскраску всего графа G . В табл. 1 показаны все 32 варианта для подграфа, порожденного множеством $VF \cup \{u\}$; 1 (соответственно, 0) означает, что u смежна (соответственно не смежна) с вершиной, указанной в заголовке столбца, а * означает, что в соответствующей позиции может быть как 0, так и 1.

Итак, цвет каждой вершины $u \in VG \setminus VF$ определяется в соответствии с табл. 1 однозначно, то есть раскраска C_1, C_2, C_3 графа F определяет разбиение VG на три класса, которые мы также будем обозначать C_1, C_2, C_3 .

Покажем, что C_1 порождает пустой граф. Допустим, что существуют смежные вершины $u, v \in C_1$. Ясно, что $u, v \notin VF$. Из табл. 1 видно, что обе вершины u и v смежны с вершинами a и d , но не смежны с b . Так как $\{a, e, u, v\}$ не порождает G_1 , то e смежна с одной из вершин u, v . Пусть $e \sim v$. Так как $\{d, e, u, v\}$ не порождает G_2 , то $e \sim u$.

Если $c \sim u$ и $c \sim v$, то $\{a, c, u, v\}$ порождает G_1 ; если $c \sim u$ и $c \sim v$, то $VF \cup \{u, v\}$ порождает G_3 ; если $c \sim u$ и $c \sim v$, то $\{a, b, c, e, u, v\}$ порождает G_4 ; если $c \sim u$ и $c \sim v$, то $\{c, d, u, v\}$ порождает G_2 .

Итак, во всех случаях получаем противоречие. Поэтому C_1 порождает пустой граф. В силу симметрии, C_3 также порождает пустой граф.

Таблица 1.

$a b c d e$	Запрещенный порожденный подграф, или класс вершины u
* 0 0 0 *	$G(b, c, d, u) = G_1$
1 1 0 * 0	$G(a, b, e, u) = G_1$
0 * 0 1 1	$G(a, d, e, u) = G_1$
* 1 1 0 0	$G(b, c, e, u) = G_1$
0 0 1 1 *	$G(a, c, d, u) = G_1$
* 1 1 1 *	$G(b, c, d, u) = G_2$
0 0 1 0 0	$G(a, b, c, d, e, u) = G_3$
0 0 1 0 1	$G(a, b, c, d, e, u) = G_4$
1 0 1 0 0	$G(a, b, c, d, e, u) = G_4$
1 1 0 1 1	$G(a, b, c, d, e, u) = G_5$
1 0 1 0 1	$G(a, b, d, e, u) = G_5$
1 0 * 1 *	$u \in C_1$
* 1 * 0 1	$u \in C_3$
0 0 0 1 0	$u \in C_2$
0 1 0 0 0	$u \in C_2$
0 1 0 1 0	$u \in C_2$

Покажем теперь, что C_2 порождает пустой граф. Допустим, что существуют несмежные вершины $u, v \in C_2$. Ясно, что $u, v \notin VF$. Обе вершины u, v не смежны с вершинами a, c, e (табл. 1). Каждая из вершин u, v смежна по крайней мере с одной из вершин b, d . Пусть $u \sim d$. Так как $\{b, e, u, v\}$ не порождает G_1 , то $b \sim v$. Следовательно, $v \sim d$ и $u \approx d$. Получаем, что $VF \cup \{u, v\}$ порождает G_6 . Получили противоречие.

Итак, мы показали, что разбиение $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = VG$ является правильной 3-раскраской графа G . Покажем теперь, что она является сильной.

Предположим теперь, что существуют несмежные вершины $u \in C_1$ и $v \in C_3$. Из табл. 1 ясно, что $u, v \notin VF$, $u \sim a$, $u \sim d$, $u \approx b$, $v \sim b$, $v \sim e$ и $v \approx d$. Допустим сначала, что и $c \approx u$ и $c \approx v$. Если $u \approx e$ и $v \approx a$, то $VF \cup \{u, v\}$ порождает G_7 . В противном случае, в силу симметрии, можно считать, что $v \sim a$. Тогда $\{a, b, c, e, u, v\}$ порождает G_3 или G_4 . Получаем противоречие. Поэтому можно считать, что $u \sim c$. Так как $\{c, d, u, v\}$ не порождает G_1 , то $v \sim c$. Если $u \approx e$ и $v \approx a$, то $\{a, b, c, e, u, v\}$ порождает G_4 . Поэтому можно считать, что $v \sim a$. Поскольку $\{a, d, e, u, v\}$ не порождает цикл C_5 , то $u \sim e$. Итак, мы получаем порожденный подграф F_1 , показанный на рис. 5.

При наличии порожденного подграфа F_1 покажем, что $u \sim C_2$. Предположим, что существует вершина $w \in C_2$, не смежная с u . Ясно, что $w \in VG \setminus VF$. Так как w не смежна с a, c, e и $\{c, d, u, w\}$ не порождает G_1 , то $w \sim d$.

Если $w \approx v$, то $\{a, d, e, u, v, w\}$ порождает G_4 ; если $w \sim v$, то $\{a, d, u, v, w\}$ порождает G_5 . Получаем противоречие.

Итак, доказано, что каждая вершина класса C_1 смежна со всеми вершинами класса C_3 или C_2 . Аналогичное утверждение справедливо для любой вершины класса C_3 .

Остается показать, что каждая вершина из C_2 смежна со всеми вершинами по

Рис. 5. Порожденный подграф F_1

крайней мере одного из классов C_1 или C_3 . Предположим, что существуют вершины $u \in C_2$, $v \in C_1$ и $w \in C_3$ такие, что $u \sim v$ и $v \sim w$. Так как $v \in C_1$ и $v \sim u \in C_2$, то, по доказанному выше, $v \sim C_3$. В частности, $v \sim w$. Пусть сначала $u = c$. Тогда $v, w \in VG \setminus VF$. Если $a \sim w$ и $e \sim v$, то $VF \cup \{v, w\}$ порождает G_7 . В противном случае можно считать, что $a \sim w$. Тогда $\{a, b, c, e, v, w\}$ порождает G_3 или G_4 . Получаем противоречие.

Если $u = a$ (соответственно, $u = e$), то, согласно табл. 1, u смежна с каждой вершиной класса C_1 (соответственно, класса C_3). Поэтому остается рассмотреть случай, когда $u \in VG \setminus VF$. В соответствии с табл. 1 и в силу симметрии можно считать, что $u \sim d$. Тогда $w \in VG \setminus VF$. Пусть $v = b$, то есть $u \sim b$. Так как $\{b, c, u, w\}$ не порождает G_1 , то $w \sim c$. Так как $\{a, b, u, w\}$ не порождает G_1 , то $w \sim a$. Тогда $VF \cup \{u, w\}$ порождает G_6 . Получаем противоречие. Остается рассмотреть последний вариант $u \sim b$ и $v \in VG \setminus VF$. Так как $\{a, u, v, w\}$ и $\{e, u, v, w\}$ не порождают G_1 , а $v \sim w$, то $a \sim w$ и $e \sim u$. Тогда $\{a, b, d, e, u, v, w\}$ порождает G_8 . Опять получаем противоречие.

Таким образом, доказано, что G имеет сильную 3-раскраску, то есть $G \in S(3)$.

Лемма 6. Если граф G удовлетворяет условиям леммы 4 и не содержит порожденного подграфа F (рис. 3), то $G \in S(3)$.

Доказательство. В силу леммы 4, мы можем считать, что G содержит порожденный подграф H (рис. 3). Зафиксируем в G порожденный подграф H вместе с обозначениями вершин, указанными на рис. 3. Если $G = H$, то $G \in S(3)$. В противном случае пусть $u \in VG \setminus VH$. Как и в доказательстве леммы 5, составим таблицу вариантов смежности вершины u с вершинами множества VH (табл. 2). Из таблицы 2 ясно, что возможны восемь вариантов $H_1, \dots, H_8$ (рис. 6) для подграфа, порожденного множеством $VH \cup \{u\}$.

Покажем, что вариант H_1 невозможен. Вершины u и c не являются раздвоенными. Поэтому существует вершина v такая, что $v \sim u$ и $v \sim c$. Так как $v \sim c$, в соответствии с таблицей 2, возможны три случая:

- (1) $v \sim b$ и $v \sim d$ (тогда $\{b, d, u, v\}$ порождает G_2);

Рис. 6.

Таблица 2.

a b c d e	Запрещенный порожденный подграф, или подграф $G(VH \cup \{u\})$
* 0 0 0 *	$G(b, c, d, u) = G_1$
1 0 0 1 1	$G(a, c, e, u) = G_1$
1 1 0 * 1	$G(a, c, e, u) = G_1$
* 1 1 0 0	$G(b, c, e, u) = G_1$
0 0 1 1 *	$G(a, c, d, u) = G_1$
* 1 1 1 *	$G(b, c, d, u) = G_2$
* 1 0 0 0	$G(b, c, d, e, u) = F$
0 0 0 1 *	$G(a, b, c, d, u) = F$
0 0 1 0 1	$G(a, b, c, d, u) = F$
* 0 1 0 0	$G(b, c, d, e, u) = F$
0 1 0 1 1	$G(a, c, d, e, u) = F$
1 1 0 1 0	$G(a, b, c, e, u) = F$
0 1 0 1 0	H_1
0 1 0 0 1	H_2
1 0 0 1 0	H_3
1 0 1 0 1	H_6
* 1 1 0 1	H_5, H_7
1 0 1 1 *	H_4, H_8

Рис. 7.

- (2) $v \sim b$ и $v \sim e$ (тогда $\{b, c, e, u, v\}$ порождает F);
 (3) $v \sim a$ и $v \sim d$ (тогда $\{a, c, d, u, v\}$ порождает F).

Покажем, что вариант H_2 (аналогично H_3) невозможен. В графе H_2 вершины u и a раздвоены. Поэтому существует вершина v , смежная с u и не смежная с a . В соответствии с таблицей 2, возможны два варианта (случай, когда $VF \cup \{u\}$ порождает H_1 исключен):

- (1) $v \sim e$ и $v \sim c$ (тогда $\{c, e, u, v\}$ порождает G_1);
 (2) $v \sim e$ и $v \sim c$ (тогда $\{a, c, e, u, v\}$ порождает F).

Покажем, что H_4 и H_5 невозможны. Так как в H_4 вершины u и b раздвоены, существует вершина v такая, что $v \sim b$ и $v \sim u$. Согласно таблице 2 и с учетом рассмотренных случаев, получаем, что $v \sim e$ и $v \sim c$. Тогда $\{c, b, e, u, v\}$ порождает F . Получаем противоречие.

Итак, мы показали, что для каждой вершины $u \notin VH$ множество $VH \cup \{u\}$ порождает один из графов H_6, H_7 или H_8 . Если существуют две смежные вершины $u, v \notin VH$, то множество $\{a, e, u, v\}$ порождает G_2 , что невозможно. Поэтому $VG \setminus VH$ является независимым множеством. Так как в G нет раздвоенных вершин, для любых $u, v \in VG \setminus VH$ выполняется соотношение $N(u) \cap VH \neq N(v) \cap VH$.

Если $VH \cup \{u\}$ порождает H_7 , а $VH \cup \{v\}$ порождает H_8 , то $VH \cup \{u, v\}$ порождает G_{10} , что невозможно. Поэтому остается четыре варианта для графа G , показанные на рис. 7. Все они являются сильно 3-раскрашиваемыми графами, поэтому $G \in S(3)$. Лемма и теорема доказаны.

Следующий алгоритм вытекает из доказательства теоремы 1 и имеет сложность $O(mn)$, где m и n — число ребер и вершин графа соответственно.

Алгоритм распознавания сильно 3-раскрашиваемых графов

Вход: граф G .

Выход: $G \notin S(3)$ или $G \in S(3)$ и сильная 3-раскраска C_1, C_2, C_3 .

Шаг 1. Если граф G двудольный и C_1, C_2 — разбиение его на доли, то выход $G \in S(3)$ и $C_1, C_2, C_3 = \emptyset$. Иначе перейти к шагу 2.

Шаг 2. Пусть $R_1, \dots, R_k$ — классы эквивалентности раздвоенных вершин графа G . Построить граф G' , удаляя из R_i все вершины, кроме одной, для любого $i = 1, \dots, k$. Для $X \subseteq VG'$ положим

$$R(X) = \cup \{R_i : X \cap R_i \neq \emptyset\} \subseteq VG.$$

Шаг 3. Если граф G' содержит доминирующую вершину d и граф $G' - d$ двудольный с долями G'_1 и G'_2 , то выход $G \in S(3)$ и $C_1 = R(C'_1)$, $C_2 = R(C'_2)$, $C_3 = R(\{d\})$. Если граф $G' - d$ не двудольный, то выход $G \notin S(3)$. Если граф G' не содержит доминирующей вершины, то перейти к шагу 4.

Шаг 4. Если в G нет треугольника, то выход $G \notin S(3)$. Иначе найти любой треугольник C (пусть $VC = \{u, v, w\}$) и перейти к шагу 5.

Шаг 5. Найти вершину $x \notin VG$, смежную ровно с одной вершиной из C (пусть $x \sim w$) и перейти к шагу 6. Если такой вершины нет, то выход $G \notin S(3)$.

Шаг 6. Найти вершину y , смежную ровно с одной из вершин u, v и не смежную с w и перейти к шагу 7. Если такой вершины нет, то выход $G \notin S(3)$.

Шаг 7. Если множество $U = \{u, v, w, x, y\}$ порождает граф F (рис. 3), то по доказательству леммы 6 либо можно найти в G запрещенный порожденный подграф (в этом случае выход $G \notin S(3)$), либо однозначно строится сильная 3-раскраска C_1, C_2, C_3 (в этом случае выход $G \in S(3)$ и C_1, C_2, C_3).

Шаг 8. Если U порождает граф H (рис. 3), то по доказательству леммы 6 либо находится запрещенный порожденный подграф (в этом случае выход $G \notin S(3)$), либо порожденный подграф F (тогда переход к шагу 8), либо граф G совпадает с одним из графов на рис. 7 (выход $G \in S(3)$ и C_1, C_2, C_3 — раскраска, указанная на рис. 7).

Задача “Сильная k -раскрашиваемость”

Вход: граф G и целое $k \geq 1$.

Вопрос: справедливо ли включение $G \in S(k)$?

Предложение 1. Задача “Сильная k -раскрашиваемость” является NP-полной при любом $k \geq 4$.

Доказательство. Известно [1], что задача “Раскрашиваемость графа в k цветов” NP-полна при любом $k \geq 3$. Сведем ее к рассматриваемой задаче. Пусть задан граф G и число $k \geq 3$. Построим граф H путем добавления к G изолированной вершины $u \in VG$. Покажем, что G имеет правильную k -раскраску тогда и только тогда, когда $H \in S(k+1)$.

Если граф G имеет правильную k -раскраску $C_1, \dots, C_k$, то положим

$$D_1 = C_1 \cup \{u\}, \quad D_i = C_i, \quad 2 \leq i \leq k, \quad D_{k+1} = \emptyset$$

и получим сильную $(k+1)$ -раскраску графа H , то есть $H \in S(k+1)$.

Если теперь граф H имеет сильную $(k+1)$ -раскраску $C_1, \dots, C_{k+1}$, причем вершина $u \in C_1$, то для u существует цветной класс C_i , $2 \leq i \leq k+1$, такой, что $u \sim C_i$. Так как u — изолированная вершина, то $C_i = \emptyset$ и граф G является раскрашиваемым.

Две k -раскраски графа считаются одинаковыми, если они различаются только обозначениями цветных классов. Соединение $G + H$ графов G и H с $VG \cap VH = \emptyset$ определяется как граф с множеством вершин $VG \cup VH$ и множеством ребер

$$EG \cup EH \cup \{xy: x \in VG, y \in VH\}.$$

Теорема 2. *Граф $G \in S(3)$ имеет более одной сильной 3-раскраски тогда и только тогда, когда он является несвязным двудольным графом, либо может быть получен раздвоением вершин следующих графов: $K_1 + B$, где B — несвязный двудольный граф; P_4 , H и H_6 (рис. 7).*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть B — несвязный двудольный граф. Тогда B имеет по крайней мере два различных разбиения на доли: C_1, C_2 и D_1, D_2 . Если $G = B$ (соответственно, $G = K_1 + B$), то G имеет по крайней мере две различные сильные 3-раскраски: $C_1, C_2, C_3 = \emptyset$ и $D_1, D_2, D_3 = \emptyset$ (соответственно, $C_1, C_2, C_3 = \{u\}$ и $D_1, D_2, D_3 = \{u\}$, где $\{u\} = VK_1$). Легко проверить, что каждый из графов P_4, H и H_6 имеет две различные сильные 3-раскраски. Наконец, очевидно, что если граф имеет более одной сильной 3-раскраски, то любой граф, полученный из него раздвоением вершин, также обладает таким свойством.

Докажем необходимость. Без ограничения общности будем считать, что в графе G нет раздвоенных вершин. Пусть граф G имеет две различные сильные 3-раскраски: C_1, C_2, C_3 и D_1, D_2, D_3 .

Свойство А. Любой цветной класс одной из указанных раскрасок имеет непустое пересечение не более, чем с двумя цветными классами другой раскраски.

Действительно, иначе вторая раскраска не будет сильной.

Из того, что раскраски различны, следует, что существуют вершины u и v , имеющие одинаковый цвет в одной раскраске и различные цвета в другой раскраске. Пусть $u, v \in C_1$, $u \in D_1$ и $v \in D_2$.

Положим $A = C_1 \cap D_1 \neq \emptyset$ и $B = C_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Ясно, что $A \sim B$ и, по свойству А, $C_1 = A \cup B$. Так как вершины u и v не являются раздвоенными, существует вершина w такая, что $w \sim u$ и $w \sim v$. В силу симметрии можно считать, что $w \in C_2$. Так как $v \in C_1$, $v \sim w$ и $w \in C_2$, то $v \sim C_3$ (иначе раскраска C_1, C_2, C_3 не является сильной). Аналогично, $B \sim D_3$.

Свойство В. Справедливы соотношения $A \sim D_3$ и $B \sim D_3$.

Действительно, $A \subseteq D_1$, $A \sim B$, $B \subseteq D_2$ и $A, B \neq \emptyset$, поэтому $A \sim D_3$ (иначе раскраска D_1, D_2, D_3 не является сильной). Аналогично, $B \sim D_3$.

Из $v \in B$, $v \sim w$ и $B \sim D_3$ следует, что $w \notin D_3$. Так как $w \sim u$ и $u \in D_1$, то $w \notin D_1$. Поэтому $w \in D_2$ и множество $D = C_1 \cap D_2$ не пусто.

Пусть $C = C_2 \setminus D$. Ясно, что $C \cap D_2 = \emptyset$ и $C \sim D$. Из свойства А следует, что либо $C \subseteq D_1$, либо $C \subseteq D_3$.

Из $v \in D_2$ и $v \sim C_3$ следует, что $C_3 \cap D_2 = \emptyset$. Пусть $E = C_3 \cap D_3$ и $F = C_3 \cap D_1$. Ясно, что $E \sim F$ и, по свойству А, $C_3 = E \cup F$. Так как $A, F \subseteq D_1$, то $A \sim F$. Так как $B, D \subseteq D_2$, то $B \sim D$. Из свойства В следует, что $A \sim E$. Из $u \sim F$ и $u \in C_1$ следует, что $F \sim C_2$, то есть $F \sim C$ и $F \sim D$. Аналогично, $v \sim D$ и $v \in C_1$, поэтому $D \sim C_3$. Далее, $w \sim B$ и $w \in C_2$, откуда $B \sim C_3$.

Возможны два случая. Рассмотрим случай $F \neq \emptyset$. Так как $F \subseteq D_1$ и $F \sim C$, то $C \subseteq D_3$. Из свойства В следует, что $A \sim C$ и $B \sim C$. Так как $A \sim F$, $A \subseteq C_1$ и

Рис. 8.

$F \subseteq C_3$, то $A \sim C_2$. Наконец, из $C, E \subseteq D_3$ следует, что $C \sim E$. Мы получаем граф, показанный на рис. 8. Так как в G нет раздвоенных вершин, то $G \in \{P_4, H, H_6\}$ и в этом случае теорема верна.

В случае $F = \emptyset$ рассмотрим сначала подслучай $C \subseteq D_1$ (возможно, $C = \emptyset$). Так как $A, C \subseteq D_1$, то $A \sim C$. Из соотношений

$$C \subseteq D_1, \quad D \subseteq C_2, \quad C \sim D, \quad D \neq \emptyset$$

следует, что $C \sim E \subseteq D_3$. Так как в G нет раздвоенных вершин, то $|E| \leq 1$ и либо $G = B$, либо $G = K_1 + B$, где $B = G(A \cup B \cup C \cup D)$ — несвязный двудольный граф.

Теперь рассмотрим подслучай $\emptyset \neq C \subseteq D_3$. По свойству $B \sim A$ и $B \sim C$. Так как $C, E \subseteq D_3$, то $C \sim E$. Так как $D \subseteq D_2$, $C \subseteq D_3$, $D \sim C$ и $C \neq \emptyset$, то $D \sim D_1$. В частности, $D \sim A$. Итак, G совпадает с графом, показанным на рис. 8, при $F = \emptyset$. Он получается из P_4 или H раздвоением вершин (так как множество E может быть пустым). Теорема доказана.

Список литературы

1. Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. Мир, Москва, 1982.
2. Brandstadt A., Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Math.* (1998) **152**, 47–54.
3. Jensen T. R., Toft B., *Graph coloring problems*. Wiley, New York, 1995.

Статья поступила 13.04.1998.