Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Глухов (мл.), О кодах Гоппы на одном семействе полей алгебраических чисел, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 2, 14–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:53:13

О кодах Гоппы на одном семействе полей алгебраических чисел

© 2001 г. М. М. Глухов (мл.)

В работе описаны свойства геометрических кодов Гоппы на кривой, заданной уравнением

$$y^s = (x^{q^{(n-u)/2}-1} + 1)^a (x^{q^{(n+u)/2}-1} + 1)^b$$

над конечным полем $K = F_{q^n}$ при произвольных нечетном q , $n > 1$, где $s = a+b$, $s \mid q-1$, $u = 1$ при нечетном n и $u = 2$ при четном n . Находится число и вид F_{q^n} -рациональных точек кривой, степени и индексы ветвления максимальных идеалов колец дискретного нормирования поля $K(x, y)$ и соответствующие им показатели. В некоторых случаях находятся базисы кодов.

1. Введение

Максимальная длина геометрического кода Гоппы на кривой V , заданной уравнением

$$y^s = f(x) \tag{1}$$

над конечным полем K , равна числу K -рациональных точек на этой кривой (см., например, [7]). В связи с этим представляют особый интерес такие многочлены $f(x) \in K[x]$, при которых уравнение (1) имеет сравнительно большое число решений. К таким многочленам относятся, в частности, рассмотренные в [1] многочлены вида

$$(\mu x + (\mu x)^{q^{(n-u)/2}})^a (\mu x + (\mu x)^{q^{(n+u)/2}})^b \tag{2}$$

над полем $K = F_{q^n}$, где $q, a, b, n \in \mathbb{N}$, q нечетно, $n > 1$, $a + b = s$, $\mu \in K^*$, $u = 1$ при нечетном n , $u = 2$ при четном n . В [4] был доказан ряд утверждений о существовании кодов Гоппы с достаточно хорошими параметрами на кривых (1) с многочленом (2). Более глубокое изучение кодов на такой кривой требует перехода от кривой (1) к полю $K(x, y)$ алгебраических функций, заданному уравнением (1). Связи между алгебраическими кривыми и полями алгебраических функций хорошо известны (см., например, [7]). При переходе от кривой (1) к полю $K(x, y)$ K -рациональным точкам кривой соответствуют максимальные идеалы первой степени колец дискретного нормирования поля $K(x, y)$. В то же время построение кодов на кривой (1)

и изучение их свойств требуют знания максимальных идеалов больших степеней и умения вычислять значения и показатели элементов поля $K(x, y)$ относительно этих идеалов. Для решения последней задачи необходимо описание решений уравнения (1) и неприводимых над K делителей многочлена $f(x)$.

Для многочленов вида (2) последние задачи мало зависят от параметра μ и от множителя $(\mu x)^s$. А число точек на кривой при удалении этого множителя даже увеличивается. В связи с этим всюду далее рассматриваются лишь многочлены вида

$$f(x) = (x^{q^{(n-u)/2}-1} + 1)^a (x^{q^{(n+u)/2}-1} + 1)^b. \quad (3)$$

В параграфе 2 данной статьи описываются при нечетном q все делители таких многочленов, неприводимые над полями F_q и F_{q^n} , находятся формулы для числа неприводимых делителей заданной степени. В случае четного q обе эти задачи решаются тривиально. Здесь же находится число и вид F_{q^n} -рациональных точек на кривой (1) с многочленами вида (3). В параграфе 3 на основе результатов параграфа 2 и известных фактов о полях алгебраических функций [7] находятся степени и индексы ветвления максимальных идеалов колец дискретного нормирования поля $K(x, y)$ и соответствующие им показатели. В параграфе 4 результаты параграфов 2 и 3 применяются к построению кодов на рассматриваемых полях. В частности, уточняются параметры кодов, указанные в [4], в некоторых случаях находятся базисы кодов.

2. О неприводимых делителях многочленов и решениях уравнения

В данном пункте будут использоваться следующие обозначения: q — степень простого нечетного числа; F_q — поле из q элементов, F_{q^n} — его расширение степени n , $\exp_2(x)$ — максимальная степень числа 2, на которую делится целое число $x \neq 0$; $m \in \mathbb{N}$, $m = 2^k m_1$, где m_1 — нечетно; $\text{ord}(\alpha)$ — порядок корня α многочлена в мультипликативной группе поля разложения этого многочлена, $e = \exp_2(2(q^{m/2} - 1))$, ϕ — функция Эйлера, $\Phi(m)$ — число неприводимых унитарных многочленов степени m из кольца $F_q[x]$ (всех, при $m > 1$ и всех, кроме x , при $m = 1$). В ходе доказательств без ссылок будут использоваться следующие известные факты из теории конечных полей [3]. Многочлен $x^{q^n} - x$ есть произведение всех неприводимых над F_q унитарных многочленов, степени которых делят n ; многочлен $f(x)$ степени m неприводим над F_q в том и только том случае, когда он делит многочлен $x^{q^m} - x$ и не делит многочлен $x^{q^r} - x$ при $r < m$; все корни α неприводимого многочлена степени m над F_q имеют один и тот же порядок и характеризуются тем, что $\text{ord}(\alpha)$ делит число $q^m - 1$ и не делит число вида $q^r - 1$ при $r < m$. Кроме того, часто будет использоваться следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. Для любого натурального числа r имеет место равенство

$$\exp_2(q^r - 1) = \exp_2(q - 1) + \exp_2(r) + c,$$

где $c = 0$, если $\exp_2(q - 1) > 1$ или $\exp_2(r) = 0$, и $c = \exp_2(q + 1) - 1$ в остальных случаях.

Для описания неприводимых делителей всех многочленов вида (2) над полем F_q достаточно сделать это для многочлена

$$g_u(x) = x^{q^{(n+u)/2}} + x,$$

где $u = 1$ или -1 при нечетном n и $u = 2$ или -2 при четном n .

Теорема 1. *Неприводимый над полем F_q многочлен $h(x)$ степени m делит $g_u(x)$ в том и только том случае, когда выполняются условия*

$$m \mid n + u, \quad m \nmid (n + u)/2, \quad (4)$$

$$\text{ord}(\alpha) \mid 2(q^{m/2} - 1), \quad (5)$$

где α — корень $h(x)$.

При выполнении условий (4) и (5) число X_m неприводимых над полем F_q унитарных делителей степени m многочлена $g_u(x)$ равно

$$X_m = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \Phi\left(\frac{m}{2^i}\right). \quad (6)$$

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Из неприводимости многочлена $h(x)$ над F_q следует, что

$$\alpha^{q^m - 1} = 1, \quad (7)$$

$$\alpha^{q^r - 1} = 1 \iff m \mid r, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Пусть $h(x) \mid g_u(x)$. Тогда α — корень $g_u(x)$, то есть

$$\alpha^{q^{(n+u)/2} - 1} = -1, \quad (9)$$

$$\alpha^{2(q^{(n+u)/2} - 1)} = 1. \quad (10)$$

Из (10), учитывая, что q нечетно, получаем, что $\alpha^{(q^{(n+u)/2} - 1)(q^{(n+u)/2} + 1)} = 1$, то есть

$$\alpha^{q^{n+u} - 1} = 1. \quad (11)$$

Из (11), в частности, следует, что $F_{q^{n+u}}$ есть поле разложения многочлена $h(x)$. Из (11) и (8) получаем, что $m \mid n+u$. Если $m \mid (n+u)/2$, то $q^m - 1 \mid q^{(n+u)/2} - 1$, и в силу (7), $\alpha^{q^{(n+u)/2} - 1} = 1$, вопреки условию (9). Таким образом, условие (4) выполнено.

Докажем (5). Из (7) и (10) следует, что $\alpha^d = 1$, где $d = (q^m - 1, 2(q^{(n+u)/2} - 1))$. Найдем d . Из условия (4) следует, что

$$\exp_2((n+u)/2) = \exp_2(m/2) < \exp_2(m).$$

Отсюда, в силу леммы 1, получаем, что

$$\exp_2(q^{(n+u)/2} - 1) = \exp_2(q^{m/2} - 1) < \exp_2(q^m - 1). \quad (12)$$

Следовательно,

$$d = 2(q^m - 1, q^{(n+u)/2} - 1) = 2(q^{(m, (n+u)/2)} - 1) = 2(q^{m/2} - 1),$$

и из равенства $\alpha^d = 1$ получаем либо $\alpha^{q^{m/2}-1} = -1$, либо $\alpha^{q^{m/2}-1} = 1$, причем последнее противоречит условию (8). Таким образом, $\alpha^{2(q^{m/2}-1)} = 1$ и $\text{ord}(\alpha) \mid 2(q^{n/2} - 1)$.

Обратно, пусть выполнены условия (4) и (5). Из условия $m \mid n + u$ и равенства в (12) следует, что

$$q^{(n+u)/2} - 1 = (q^{m/2} - 1)c,$$

где c нечетно. Тогда

$$\alpha^{q^{(n+u)/2}-1} = \alpha^{(q^{m/2}-1)c} = (-1)^c = -1,$$

то есть α — корень $g_u(x)$. Следовательно, $h(x) \mid g_u(x)$, и первое утверждение теоремы доказано.

Докажем теперь (6). Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию (4), и найдем число X_m . Из первого утверждения теоремы видно, что $X_m = N/m$, где N — число элементов β поля $F_{q^{n+u}}$, удовлетворяющих (5) и условию $\text{ord}(\beta) \nmid q^r - 1$ при $0 < r < m$. Для отыскания числа N рассмотрим сначала множество M всех делителей числа $2(q^{m/2} - 1)$, не являющихся делителями числа $q^r - 1$ при $0 < r < m$. Если $\exp_2(2(q^{m/2} - 1)) = e$ и $P = \{c_1, \dots, c_t\}$ — множество всех нечетных делителей $q^{m/2} - 1$, то M может содержать лишь некоторые числа вида $2^e c_j$. Учитывая (5), нетрудно заметить, что условие, состоящее в том, что $2^e c_j \mid q^r - 1$ при некотором $0 < r < m$, эквивалентно условию, состоящему в том, что $2^{e-1} c_j \mid q^{r_1} - 1$ при некотором $0 < r_1 < m/2$ (при фиксированном r (r_1) в качестве r_1 (r) можно взять $(r, m/2)$ ($2r_1$)). Следовательно,

$$M = \{2^e c_j : j \in \{1, \dots, t\}, 2^{e-1} c_j \nmid q^{r_1} - 1, r_1 < m/2\}.$$

Разобьем P на три подмножества

$$P_1 = \{c_{11}, \dots, c_{1k_1}\}, \quad P_2 = \{c_{21}, \dots, c_{2k_2}\}, \quad P_3 = \{c_{31}, \dots, c_{3k_3}\}$$

так, что $c_{1i} \nmid q^r - 1$ при $0 < r < m/2$; $c_{2j} \mid q^r - 1$ при $0 < r < m/2$ и минимальное из таких r имеет вид $r_j = m/2^{\nu_j}$; $c_{3j} \mid q^r - 1$ при $0 < r < m/2$ и минимальное из таких r не имеет вида $m/2^\nu$. Для упрощения записей обозначим $\bar{R}$ условие, состоящее в том, что $c \nmid q^r - 1$ при $0 < r < m/2$, а его отрицание будем обозначать $\bar{R}$.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Если $c \in P_1$, то числа $2^j c$ удовлетворяют условию $\bar{R}$ при $j = 0, \dots, e - 1$.

Если $c \in P_2$, то числа $2^j c$ удовлетворяют условию $\bar{R}$ при $j = 0, 1, \dots, h$ и условию $\bar{R}$ при $j = h + 1, \dots, e - 1$, где $h = \exp_2(q^{m/4} - 1)$.

Если $c \in P_3$, то числа $2^j c$ удовлетворяют условию $\bar{R}$ при $j = 0, 1, \dots, e - 1$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Докажем второе утверждение. Так как минимальное $r < m/2$, при котором c делит $q^r - 1$, имеет вид $m/2^j$, число $2^j c$ удовлетворяет условию $\bar{R}$ тогда и только тогда, когда $2^j c \mid q^{m/4} - 1$. Значит, максимальное из таких чисел j совпадает с $\exp_2(q^{m/4} - 1)$, и утверждение доказано.

Докажем третье утверждение. Пусть минимальное $r < m/2$, при котором c делит $q^r - 1$, имеет вид $r = 2^\gamma r_1$, $(r_1, 2) = 1$, и $m = 2^k m_1$, $(m_1, 2) = 1$. Поскольку $c \mid q^{m/2} - 1$, то $r \mid m/2$. Следовательно, $r_1 \mid m_1$, $\gamma \leq k - 1$. Учитывая, что $c \in P_3$, получаем, что $r_1 < m_1$ и, значит, $2^{k-1} r_1 < m/2$. Так как $c \mid q^{2^{k-1} r_1} - 1$ и

$$\exp_2(q^{2^{k-1} r_1} - 1) = \exp_2(q^{m/2} - 1) = e - 1,$$

то $2^{(e-1)c} \mid q^{2^{k-1}r_1} - 1$, то есть $2^j c$ удовлетворяет условию $\bar{R}$ при $j = 0, \dots, e-1$. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что порядками корней неприводимых делителей степени m многочлена $g_u(x)$ являются лишь числа $2^e c_{1i}$, $i = 1, \dots, k_1$, и $2^e c_{2j}$, $j = 1, \dots, k_2$. Отсюда, учитывая, что в группе $F_{q^{n+u}}^*$ для каждого делителя $d \mid q^{n+u} - 1$ существует ровно $\phi(d)$ элементов порядка d , получим, что

$$X_m = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{k_1} \phi(2^e c_{1i}) + \sum_{i=1}^{k_2} \phi(2^e c_{2i}) \right).$$

Так как $\phi(2^r c) = 2^{r-1} \phi(c)$ при $r > 0$, то

$$X_m = \frac{2^{e-1}}{m} \left(\sum_{i=1}^{k_1} \phi(c_{1i}) + \sum_{i=1}^{k_2} \phi(c_{2i}) \right),$$

или, короче,

$$X_m = \frac{2^{e-1}}{m} (S_1 + S_2), \quad (13)$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \phi(c_{1i}), \quad S_2 = \sum_{i=1}^{k_2} \phi(c_{2i}).$$

Вычислим $S_1 + S_2$. Из леммы 2 следует, что множество всех делителей D числа $q^{m/2} - 1$ с условием R исчерпывается числами

$$\begin{aligned} 2^j c_{1i}, \quad i = 1, \dots, k_1, \quad j = 0, \dots, e-1, \\ 2^j c_{2i}, \quad i = 1, \dots, k_2, \quad j = h+1, \dots, e-1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{m}{2} \Phi \left(\frac{m}{2} \right) = \sum_{d \in D} \phi(d).$$

Используя свойства функции Эйлера, находим, что

$$\frac{m}{2} \Phi \left(\frac{m}{2} \right) = 2^{e-1} S_1 + (2^h + \dots + 2^{e-2}) S_2. \quad (14)$$

Далее мы вычислим S_2 , а затем, с учетом формулы (13) найдем сумму $S_1 + S_2$.

Для вычисления S_2 разобьем P_2 на подмножества $P_{2,0}, P_{2,1}, \dots, P_{2,k-2}$, где

$$P_{2,j} = \{c \in P_2 : c \mid q^{2^j m_1} - 1, c \nmid q^r - 1, r < 2^j m_1\}.$$

Из определения множеств $P_{2,j}$ видно, что все делители числа $q^{2^j m_1} - 1$, не делящие $q^r - 1$ при $r < 2^j m_1$, исчерпываются числами

$$\begin{aligned} 2^{e_0+j} c, \quad c \in P_{2,0} \cup P_{2,1} \cup \dots \cup P_{2,j-1}, \\ 2^t c, \quad c \in P_{2,j}, \quad t = 0, \dots, e_0 + j, \end{aligned}$$

где $e_0 = \exp_2(q - 1)$. Обозначив множество всех этих чисел через D_j , получаем, что

$$2^j m_1 \Phi(2^j m_1) = \sum_{x \in D_j} \phi(x),$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} 2^j m_1 \Phi(2^j m_1) = & \sum_{c \in P_{2,0}} \phi(2^{e_0+j} c) + \sum_{c \in P_{2,1}} \phi(2^{e_0+j} c) + \dots + \sum_{c \in P_{2,j-1}} \phi(2^{e_0+j} c) \\ & + \sum_{c \in P_{2,j}} \phi(c) + \sum_{c \in P_{2,j}} \phi(2c) + \dots + \sum_{c \in P_{2,j}} \phi(2^{e_0+j} c). \end{aligned}$$

Суммируя эти равенства по всем $j = 0, 1, \dots, k-2$, получаем, что

$$\sum_{j=0}^{k-2} 2^j m_1 \Phi(2^j m_1) = 2^{e_0+k-2} \sum_{c \in P_2} \phi(c) = 2^{e_0+k-2} S_2.$$

Отсюда находим, что

$$S_2 = \frac{1}{2^{e_0+k-2}} \sum_{j=0}^{k-2} 2^j m_1 \Phi(2^j m_1),$$

или, учитывая, что $m = 2^k m_1$,

$$S_2 = \frac{1}{2^{e_0+k-2}} \sum_{i=2}^k \frac{m}{2^i} \Phi\left(\frac{m}{2^i}\right). \quad (15)$$

Теперь, в зависимости от значения величины h в формуле (14), рассмотрим два случая.

Пусть в первом случае $m/4$ чётно или $\exp_2(q - 1) > 1$. Тогда согласно лемме 1

$$e = \exp_2(2(q^{m/2} - 1)) = h + 2,$$

то есть $h = e - 2$, и формула (14) принимает вид

$$\frac{m}{2} \Phi\left(\frac{m}{2}\right) = 2^{e-1} S_1 + 2^{e-2} S_2.$$

Следовательно,

$$S_1 + \frac{1}{2} S_2 = \frac{m}{2^e} \phi\left(\frac{m}{2}\right),$$

и значит,

$$S_1 + S_2 = \left(S_1 + \frac{1}{2} S_2\right) + \frac{1}{2} S_2 = \frac{m}{2^e} \phi\left(\frac{m}{2}\right) + \frac{1}{2^{e_0+k-1}} \sum_{i=2}^k \frac{m}{2^i} \Phi\left(\frac{m}{2^i}\right).$$

Из леммы 1 видно, что в рассматриваемом случае

$$e = \exp_2(2(q^{m/2} - 1)) = \exp_2(q - 1) + k = e_0 + k.$$

Поэтому

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2^{e_0-1}} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \Phi\left(\frac{m}{2^i}\right).$$

Отсюда и из формулы (13) получаем (6).

Во втором случае $m/4$ нечетно и $\exp_2(q-1) = 1$. В силу леммы 1

$$h = \exp_2(q^{m/4} - 1) = \exp_2(q - 1) = e_0 = 1, \quad k = 2$$

и из (14) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \Phi\left(\frac{m}{2}\right) &= 2^{e-1} S_1 + 2^{e-1} \left(1 - \frac{1}{2^{e-2}}\right), \\ \frac{m}{2^e} \Phi\left(\frac{m}{2}\right) &= S_1 + \left(1 - \frac{1}{2^{e-2}}\right) S_2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (15) следует, что

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= S_1 + \left(1 - \frac{1}{2^{e-2}}\right) S_2 + \frac{1}{2^{e-2}} S_2 \\ &= \frac{m}{2^e} \Phi\left(\frac{m}{2}\right) + \frac{1}{2^{e-1}} \sum_{i=2}^k \frac{m}{2^i} \Phi\left(\frac{m}{2^i}\right) \\ &= \frac{m}{2^{e-1}} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \Phi\left(\frac{m}{2^i}\right). \end{aligned}$$

Теперь из (13) снова получаем (6). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о неприводимых делителях многочленов $g_u(x)$ над полем F_{q^n} .

Теорема 2. Если n нечетно, то есть $u = \pm 1$, то любой неприводимый над полем F_q делитель многочлена $g_u(x)$ является неприводимым над полем F_{q^n} .

Если n четно, то есть $u = \pm 2$, то любой неприводимый над полем F_q делитель степени m многочлена $g_u(x)$ разлагается над полем F_{q^n} в произведение двух неприводимых многочленов степени $m/2$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $h(x) \in F_q[x]$, $\deg h(x) = m$, $h(x) \mid g_u(x)$, и α — корень $h(x)$ в его поле разложения. Тогда m — наименьшее натуральное число, при котором $\alpha^{q^m-1} = 1$. Так как $F_q \subset F_{q^n}$, многочлен $g_u(x)$ можно рассматривать как многочлен над F_{q^n} . Пусть m' — наименьшее натуральное число, при котором $\alpha^{(q^n)^{m'}-1} = 1$. Из определений чисел m и m' получаем, что $m \mid nm'$. С другой стороны, согласно теореме 1 $m \mid n + u$, и, следовательно, $(m, n) = 1$ при $u = \pm 1$, и $(m, n) = 2$ при $u = \pm 2$. Отсюда видно, что $m = m'$ при $u = \pm 1$, и $m' = m/2$ при $u = \pm 2$. Значит, над полем F_{q^n} элемент α является корнем неприводимого многочлена степени m при нечетном n и степени $m/2$ при четном n . Теорема доказана.

Из теорем 1, 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Число неприводимых над полем F_{q^n} делителей степени t многочлена $g_u(x)$ вычисляется по формуле (6), если n нечетно, и равно

$$2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \Phi\left(\frac{m}{2^i}\right),$$

если n четно.

Следствие 2. Пусть

$$g_1(x) = x^{q^{(n-u)/2}-1} + 1, \quad g_2(x) = x^{q^{(n+u)/2}-1} + 1$$

— многочлены над полем F_q , q нечетно, $n > 1$, $u = 1$ или 2 в зависимости от четности n .

Если $n \equiv 1 \pmod{2}$ или $n \equiv 2 \pmod{4}$, то многочлены $g_1(x)$, $g_2(x)$ взаимно просты и не имеют корней в поле F_{q^n} .

Если $n \equiv 0 \pmod{4}$, то

$$(g_1(x), g_2(x)) = x^{q-1} + 1,$$

многочлены $g_1(x)$, $g_2(x)$ не имеют корней в поле F_q и имеют $q-1$ общих корней в поле F_{q^n} .

Доказательство. Если $h(x)$ неприводим над F_q и $h(x) \mid g_i(x)$, $i = 1, 2$, то по теореме 1 выполнены следующие условия:

$$m \mid n - u, \quad m \mid n + u, \quad \nmid (n - u)/2, \quad m \nmid (n + u)/2.$$

Нетрудно видеть, что эти условия могут выполняться лишь во втором случае при $m = 2$. При этом корни α многочлена $h(x)$ должны удовлетворять условию

$$\alpha^{2(q-1)} = 1, \quad \alpha^{q-1} \neq 1.$$

Таких элементов ровно $q-1$, это корни многочлена $x^{q-1} + 1$. Следовательно, $h(x)$ делит $x^{q-1} + 1$ и остается заметить, что каждый такой многочлен $h(x)$ разлагается в произведение двух линейных множителей в силу теоремы 2.

Информация о числе решений уравнения (1) и о структуре этих решений содержится в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ — многочлен вида (3) над полем F_{q^n} , $n > 1$, $a + b = s$, $s \mid q-1$, M_0 — множество корней многочлена $f(x)$ в поле F_{q^n} и $M_1 = F_{q^n} \setminus M_0$.

Тогда для $\alpha \in F_{q^n}$ уравнение (1) имеет в F_{q^n} ровно s решений вида (α, β) , если $\alpha \in M_1$, и единственное решение $(\alpha, 0)$, если $\alpha \in M_0$.

Если N_{q^n} — число всех решений уравнения (1), то

$$N_{q^n} = \begin{cases} q^n s, & \text{если } q \text{ нечетно, } n \equiv 1 \pmod{2} \text{ или } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ (q^n - q + 1)s + q - 1, & \text{если } q \text{ любое, } 4 \mid n, \\ (q^n - q^2 + 1)s + q^2 - 1, & \text{если } q, n \text{ четны, } 4 \nmid n. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Известно (см., например [5]), что число N_t решений уравнения $y^s = t$ над полем F_{q^n} выражается формулой

$$N_t = \sum_{\text{ind } \chi = s} \chi(\text{norm}_n t),$$

где $\text{norm}_n t = t \cdot t^q \dots t^{q^{n-1}}$ — относительная норма элемента t , а суммирование ведется по всем характерам группы F_q^* , порядки которых делят s . В [1] доказано, что для многочлена $f(x)$ вида (2), а значит, и для многочлена вида (3), в случае нечетного q элемент $\text{norm}_n f(\alpha)$ при любом $\alpha \in F_{q^n}$ является s -й степенью некоторого элемента этого поля. Следовательно,

$$\chi(\text{norm}_n f(\alpha)) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(\alpha) \neq 0, \\ 0, & \text{если } f(\alpha) = 0, \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

Так как существует ровно s различных мультипликативных характеров показателя s , один из которых равен единичному характеру χ_0 , уравнение $y^s = f(\alpha)$ имеет s решений при $f(\alpha) \neq 0$ и одно решение при $f(\alpha) = 0$. Этим первое утверждение при нечетном q доказано.

Для четного q , как и в [1], пользуясь тождеством $x^{q^n} = x$ в поле F_{q^n} , получим, что

$$\text{norm}_n(f(x)) = \prod_{i=1}^{(n+1)/2} (x^{q^{i-1}} + x^{q^{(n-1)/2+i-1}})^s \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (x^{q^{i-1}} + x^{q^{(n+1)/2+i-1}})^s.$$

Значит, и в этом случае каждый элемент $f(\alpha)$ является s -й степенью элемента из F_{q^n} . Поэтому первое утверждение справедливо и при четном q .

Второе утверждение при нечетном q следует непосредственно из первого утверждения и следствия теорем 1–2.

Пусть q четно. Элемент α поля F_{q^n} является корнем многочлена $x^{q^{(n \pm u)/2-1}} - 1$ в том и только том случае, когда

$$\alpha^{(q^n - 1, q^{(n \pm u)/2-1})} - 1 = 1.$$

Так как

$$(q^n - 1, q^{(n \pm u)/2-1}) = q^{(n, (n \pm u)/2)} - 1$$

и $(n, (n \pm u)/2)$ равен 1 или 2 соответственно в случаях, где $n \equiv 1 \pmod{2}$ или $4 \mid n$, и где $n \equiv 2 \pmod{4}$.

В первом случае получаем, что $f(x)$ имеет $q-1$ корней в F_{q^n} и все они есть корни многочлена $x^{q-1} - 1$; во втором случае $f(x)$ имеет q^2-1 корней в F_{q^n} , и все они есть корни многочлена $x^{q^2-1} - 1$. Отсюда и следует второе утверждение теоремы при четном q . Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3 получаем полезное для дальнейшего следствие.

Следствие 3. Пусть q четно, тогда многочлены

$$x^{q^{(n+u)/2-1}} - 1, \quad x^{q^{(n-u)/2-1}} - 1$$

имеют наибольший общий делитель, равный $x^{q-1} - 1$, если $n \equiv 1 \pmod{2}$ или $4 \mid n$, и равный $x^{q^2-1} - 1$, если $n \equiv 2 \pmod{4}$.

3. О точках и показателях полей алгебраических функций

Приведем сначала некоторые общие сведения о полях алгебраических функций (см., например, [7]). Зафиксируем поле алгебраических функций $F = K(x, y)$, заданное над полем K уравнением (1). Условимся максимальные идеалы дискретных колец нормирования поля F называть точками поля F и обозначать буквой Q с индексами или без. Поле $K(x, y)$ является алгебраическим расширением степени s поля рациональных функций $K(x)$. Поэтому все точки поля $K(x, y)$ являются расширениями соответствующих точек поля $K(x)$. Если точка Q есть расширение точки P , то пишут $Q | P$. Все точки поля $K(x)$ известны — это идеалы $P_{p(x)}$, порождаемые неприводимыми над K многочленами $p(x)$, и бесконечная точка P_∞ ,

$$P_{p(x)} = \{a(x)/b(x) : p(x) \mid a(x), p(x) \nmid b(x)\}, \\ P_\infty = \{a(x)/b(x) : \deg a(x) < \deg b(x)\}.$$

Соответствующие им показатели для ненулевых элементов вычисляются по формулам

$$v_{P_{p(x)}}(c(x)/d(x)) = \exp_{p(x)} c(x) - \exp_{p(x)} d(x), \\ v_{P_\infty}(c(x)/d(x)) = \deg d(x) - \deg c(x).$$

Кольцо дискретного нормирования O_w , где $w = p(x)$ или ∞ , состоит из элементов $z \in K(x)$ с показателем $v_{P_w} \geq 0$, $O_w/P_w = F_w$ — поле, содержащее K (при отождествлении $r \in K$ с $r + P_w$), $[F_w : K] = \deg P_w$ — степень точки P_w ; $\deg P_{p(x)} = \deg p(x)$ и $\deg P_\infty = 1$. Таким образом, поле $K(x)$ содержит $q + 1$ точек степени 1 — это точки $P_{x-\alpha}$, $\alpha \in K$, и P_∞ . Эти точки играют при построении кодов особую роль в силу того, что в этом случае поле F_w изоморфно K и смежный класс $z + P_w$ есть элемент из K ; его называют значением элемента z в точке P_w и обозначают через $z(P_w)$. Следуя [7], далее точки $P_{x-\alpha}$ будем обозначать P_α .

Если точка Q поля F является расширением точки P поля $K(x)$, то для любого элемента $z \in K(x)$

$$v_Q(z) = e(Q | P)v_P(z), \quad (16)$$

где $e(Q | P)$ — индекс ветвления точки P при переходе от $K(x)$ к F .

Дивизором поля F называют формальную линейную комбинацию точек поля F над $\mathbb{Z}$ с конечным числом неравных нулю коэффициентов. Если

$$D = \sum_{P \in S} r_P P$$

— дивизор и $r_P \geq 0$ для всех $P \in S$, то пишут $D \geq 0$, число $\sum_{P \in S} r_P \deg P$ называют степенью дивизора D и обозначают $\deg D$. Каждому элементу $z \in F$ сопоставляют дивизор

$$(z) = \sum v_Q(z)Q,$$

где сумма берется по всем точкам Q с условием $v_Q(z) \neq 0$. Такие дивизоры называются главными. При построении кодов Гоппы необходимо иметь определенную

информацию о точках поля $K(x, y)$, их степенях, индексах ветвления, соответствующих показателях элементов и т.д. Далее, как и раньше, будем считать, что $K = F_{q^n}$, а $f(x)$ имеет вид (3).

Из следствия 2 теорем 1, 2 и следствия 3 теоремы 3 видно, что свойства кривой (1) с многочленом $f(x)$ вида (3) существенно различаются в следующих трех случаях:

- 1) q нечетно, n нечетно или $n \equiv 2 \pmod{4}$;
- 2) q любое, $4 \mid n$;
- 3) q четное, n четное, $4 \nmid n$.

Кривая (1) в случае 1) несингулярна, а в случаях 2) и 3) сингулярна. Последнее имеет своей причиной наличие у многочлена $f(x)$ корней в поле F_{q^n} . В связи с этим в случаях 2) и 3) мы вместо многочлена (3) $f(x) = f_1(x)^a f_2(x)^b$ будем рассматривать соответственно многочлены

$$g(x) = g_1(x)^a g_2(x)^b, \quad h(x) = h_1(x)^a h_2(x)^b,$$

где

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{x^{q^{(n-u)/2}-1} + 1}{x^{q-1} - 1}, & g_2(x) &= \frac{x^{q^{(n+u)/2}-1} + 1}{x^{q-1} - 1}, \\ h_1(x) &= \frac{x^{q^{(n-u)/2}-1} + 1}{x^{q^2-1} - 1}, & h_2(x) &= \frac{x^{q^{(n+u)/2}-1} + 1}{x^{q^2-1} - 1}. \end{aligned}$$

Введем для общности дальнейших рассмотрений обозначение $\phi_i(x)$, полагая $\phi_i(x)$ в случаях 1), 2), 3) равной соответственно $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x)$, $i = 1, 2$.

Заметим, что в любом из этих случаев многочлен $f(x) = \phi_1(x)^a \phi_2(x)^b$ не имеет корней в F_{q^n} , а уравнение (1) имеет ровно sq^n решений (α, β) .

Теорема 4. Пусть $K = F_{q^n}$, $K(x, y)$ — поле алгебраических функций, заданное уравнением (1), где

$$f(x) = \phi_1(x)^a \phi_2(x)^b, \quad a + b = s, \quad s \mid q - 1, \quad (a, s) = 1.$$

Тогда

- 1) $K(x, y)$ есть циклическое расширение поля $K(x)$ степени s , K алгебраически замкнуто в $K(x, y)$, и род поля $K(x, y)$ равен

$$g = \frac{s-1}{2} (\deg \phi_1(x) + \deg \phi_2(x) - 2),$$

- 2) для каждой точки P_α поля $K(x)$ существует ровно s расширений $Q_{\alpha, \beta}$, где β пробегает все решения уравнения $y^s = f(x)$ в K , $Q_{\alpha, \beta}$ как идеал порождается многочленом $x - \alpha$ и содержит $y - \beta$, $e(Q_{\alpha, \beta} \mid P_\alpha) = 1$, $\deg Q_{\alpha, \beta} = \deg P_\alpha = 1$,
- 3) точка P_∞ поля $K(x)$ имеет единственное расширение Q_∞ , порождаемое как идеал элементом x^{-1} , $e(Q_\infty \mid P_\infty) = 1$, $\deg Q_\infty = s$,

- 4) если $p(x)$ — неприводимый над K многочлен и $p(x) \mid f(x)$, то для точки $P_{p(x)}$ поля $K(x)$ существует единственное расширение $Q_{p(x)}$,

$$\deg Q_{p(x)} = \deg P_{p(x)} = \deg p(x), \quad e(Q_{p(x)} \mid P_{p(x)}) = s,$$

- 5) если $p(x)$ неприводим над K и $p(x) \nmid f(x)$, то существует единственное расширение $Q_{p(x)}$ точки $P_{p(x)}$ и

$$e(Q_{p(x)} \mid P_{p(x)}) = 1, \quad \deg Q_{p(x)} = \deg P_{p(x)} = \deg p(x).$$

Доказательство. Докажем утверждение части 1). Так как $s \mid q - 1$, то $(s, \text{char } K) = 1$, и K содержит примитивный корень s -й степени из 1. Кроме того, из условия $(a, s) = 1$ следует, что $(s, \exp_{p(x)} f(x)) = 1$ для любого неприводимого делителя $p(x)$ многочлена $f(x)$ над полем K . Следовательно, выполнены все условия утверждения 6.3.1 из [7]. Из него следует утверждение части 1) теоремы, а также равенства

$$e(Q \mid P) = \begin{cases} s, & \text{если } P = P_{p(x)} \text{ и } p(x) \mid f(x), \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (17)$$

Докажем утверждение части 2). Согласно теореме 1 $f(\alpha)$ при любом $\alpha \in K^*$ является s -й степенью подходящего элемента из K . Следовательно, с учетом условия $s \mid q - 1$, уравнение $y^s = f(\alpha)$ имеет ровно s различных решений. То же самое, очевидно, верно и при $\alpha = 0$. Отсюда видно, что многочлен $z^s - f(\alpha)$ разлагается над K в произведение s различных линейных множителей. Кроме того, для любой точки P поля $K(x)$, не равной P_∞ , справедливо неравенство $v_P(f(x)) \geq 0$ и, значит, y является целым элементом кольца O_P . Таким образом, выполнены все условия теоремы Куммера 3.3.7 из [7]. Из нее и ее следствия 3.3.8 получаем утверждение части 2).

Для доказательства части 3) воспользуемся соответствиями между полями алгебраических функций и проективными кривыми. Полю $K(x, y)$ соответствует гладкая проективная кривая с уравнением

$$z^t(y^s - f(1/z)) = 0, \quad (18)$$

где $t = \deg f(x)$. При $z = 0$ получаем $x^t = 0$ и, значит, на кривой (18) лежит лишь одна бесконечная точка $(0: 1: 0)$. Следовательно, для точки P_∞ существует единственное расширение Q_∞ . Рассмотрим на $K(x, y)$ главный дивизор (x) . Из утверждения части 2) с учетом равенства (17) получаем, что

$$(x) = P_{0, \beta_1} + \dots + P_{0, \beta_s} - Q_\infty.$$

Отсюда по теореме 1.4.11 из [7] и утверждению части 2) получаем, что

$$\deg Q_\infty = \sum_{i=1}^s \deg P_{0, \beta_i} = s.$$

Порождение Q_∞ как идеала в соответствующем кольце дискретного нормирования O_{Q_∞} элементом x^{-1} следует из условия $v_{Q_\infty}(1/x) = 1$.

В случае 4) $P = P_{p(x)}$, $p(x) \mid f(x)$. Из теоремы Куммера получаем, что существует $Q \mid P_{p(x)}$ такое, что $y \in Q$. Значит, $v_Q(y) \geq 1$. С другой стороны,

$$v_Q(y) = \frac{1}{s} v_Q(y^s) = \frac{1}{s} e(Q \mid P_{p(x)}) v_{P_{p(x)}}(y^s) = \frac{1}{s} e(Q \mid P_{p(x)}) v_{P_{p(x)}}(f(x)).$$

Так как $p(x) \mid f(x)$ и $\exp p(x) = a$ или b , справедливы равенства

$$v_{P_{p(x)}} = \begin{cases} a, & \text{если } p(x) \mid \phi_1(x), \\ b, & \text{если } p(x) \mid \phi_2(x). \end{cases}$$

Следовательно,

$$v_Q(y) = \begin{cases} (a/s) e(Q \mid P_{p(x)}), & \text{если } p(x) \mid \phi_1(x), \\ (b/s) e(Q \mid P_{p(x)}), & \text{если } p(x) \mid \phi_2(x). \end{cases}$$

Так как $v_Q(y) \geq 1$, $a/s < 1$, $b/s < 1$, справедливо неравенство

$$e(Q \mid P_{p(x)}) > \max\{s/a, s/b\}.$$

Если бы существовала еще одна точка $Q' \mid P_{p(x)}$, то из тех же соображений выполнялось бы неравенство

$$e(Q' \mid P_{p(x)}) > \max\{s/a, s/b\}.$$

А так как, согласно теореме 3.1.11 из [7]

$$\sum_{Q' \mid P_{p(x)}} e(Q' \mid P_{p(x)}) f(Q' \mid P_{p(x)}) = s,$$

получаем, что $P_{p(x)}$ имеет единственное расширение $Q_{p(x)}$.

Пусть $e(Q_{p(x)} \mid P_{p(x)}) = e$, $f(Q_{p(x)} \mid P_{p(x)}) = f$. Тогда $ef = s$ и $\text{con}(P_{p(x)}) = eQ_{p(x)}$. По следствию 3.1.13 из [7]

$$\begin{aligned} \deg(eQ_{p(x)}) &= s \deg(P_{p(x)}) = s \deg(p(x)), \\ e \deg(Q_{p(x)}) &= s \deg(p(x)). \end{aligned}$$

Отсюда и из (17) получаем утверждение части 4).

В случае 5) $P = P_{p(x)}$, $p(x) \nmid f(x)$. Пусть Q — расширение $P_{p(x)}$. Справедливо равенство

$$v_Q(y) = \frac{1}{s} v_Q(y^s) = \frac{1}{s} e(Q \mid P) v_P(f(x)) = 0$$

(так как $p(x) \nmid f(x)$). Следовательно, $y \in O_Q$ и $y \notin Q$. Пусть $Q_1, \dots, Q_r$ — все расширения точки P . Найдем главный дивизор $(p(x))$. В силу того, что $e(Q_i \mid P) = 1$ и $e(Q_\infty \mid P_\infty) = 1$

$$(p(x)) = v_P(p(x))Q_1 + \dots + v_P(p(x))Q_r + v_{P_\infty}(p(x))Q_\infty.$$

Следовательно,

$$(p(x)) = Q_1 + \dots + Q_r - \deg p(x) Q_\infty.$$

Так как $\deg p(x) = 0$ (теорема 1.4.11, [7]),

$$\sum_{i=1}^r \deg Q_i = \deg p(x).$$

Однако поле $O_P/P = F_P$ вложимо в поле O_{Q_i}/Q_i и значит, $\deg Q_i \geq \deg P_i$. Из последнего равенства следует, что $r = 1$ и $\deg Q_i = \deg p(x)$. Таким образом, существует единственное расширение $Q_{p(x)}$, и

$$e(Q_{p(x)} | P_{p(x)}) = 1, \quad \deg Q_{p(x)} = \deg P_{p(x)} = \deg p(x).$$

Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть Q — точка поля $K(x, y)$. Тогда если $z = u(x)/v(x)$, где $u(x), v(x) \in K[x]$, то

$$v_Q(z) = \begin{cases} \exp_{p(x)} u(x) - \exp_{p(x)} v(x), & \text{если } Q = Q_{p(x)}, p(x) \nmid f(x), \\ s(\exp_{p(x)} u(x) - \exp_{p(x)} v(x)), & \text{если } Q = Q_{p(x)}, p(x) \mid f(x), \\ \deg(v(x)) - \deg(u(x)), & \text{если } Q = Q_\infty, \end{cases} \quad (19)$$

$$v_Q(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } Q = Q_{p(x)}, p(x) \nmid f(x), \\ a, & \text{если } Q = Q_{p(x)}, p(x) \mid \phi_1(x), \\ b, & \text{если } Q = Q_{p(x)}, p(x) \mid \phi_2(x), \\ -s^{-1} \deg f(x), & \text{если } Q = Q_\infty. \end{cases} \quad (20)$$

4. О кодах Гоппы

Пусть $K = F_{q^n}$, $F = K(x, y)$ — поле алгебраических функций, заданное уравнением (1) с $f(x) = \phi_1(x)^a \phi_2(x)^b$, D, G — дивизоры поля F , причем $D = Q_1 + \dots + Q_N$ — сумма точек первой степени, все точки с ненулевыми коэффициентами в G отличны от $Q_1, \dots, Q_N$, и

$$L(G) = \{z \in F : (z) + G \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Под геометрическим кодом Гоппы, заданным дивизорами D и G , понимают (см. [7]) код

$$C(D, G) = \{(z(Q_1), \dots, z(Q_N)) : z \in L(G)\}.$$

В общем случае известно (см. [7]), что он является линейным $[n, k, d]$ -кодом над полем K с параметрами

$$k \geq \deg G + 1 - g, \quad d \geq N - \deg G. \quad (21)$$

При этом, если выполняются неравенства

$$2g - 2 < \deg G < N, \quad (22)$$

то $k = \deg G + 1 - g$ (заметим, что здесь k — размерность кода, d — кодовое расстояние, g — род поля F). Известно также, что при $\deg G < N$ отображение

$$\psi: L(G) \rightarrow C(D, G),$$

действующее по правилу $\psi(z) = (z(Q_1), \dots, z(Q_N))$, является изоморфизмом линейных пространств над K . Поэтому в этом случае задача нахождения порождающей матрицы кода сводится к нахождению базиса пространства $L(G)$. Всюду далее будем считать это условие выполненным.

Рассмотрим сначала самый простой случай, при котором $s = 2$, $D = Q_1 + \dots + Q_N$ — сумма всех $2q^n$ точек поля F и $G = rQ_\infty$. Этот случай представляет особый интерес также и с точки зрения работы [6], где исследуется метод конструирования кодов в виде произведения кодов на гиперэллиптических кривых.

Теорема 5. Пусть $F = K(x, y)$ — поле алгебраических функций, заданное уравнением

$$y^2 = f(x), \quad f(x) = \phi_1(x)\phi_2(x),$$

$2 \mid q-1$, $D = Q_1 + \dots + Q_N$ — сумма всех точек первой степени поля F и $G = rQ_\infty$.

Тогда для любого $r = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ код $C(D, G)$ является $[n, k, d]$ -кодом над K с параметрами $k = 2(r+1) - (1/2) \deg f(x)$, $d \geq N - 2r$ при $r \leq (1/2) \deg f(x) - 1$ и $d = N - 2r$ при $r > (1/2) \deg f(x) - 1$.

Базисом этого кода является система векторов

$$(z(Q_1), \dots, z(Q_N)),$$

где z пробегает множество

$$x^0, x^1, \dots, x^r, \quad (23)$$

если $r \leq (1/2) \deg f(x) - 1$, и множество

$$x^0, x^1, \dots, x^r, x^0y, x^1y, \dots, x^{t-1}y, \quad (24)$$

где $t = r + 1 - (1/2) \deg f(x)$, если $r > (1/2) \deg f(x) - 1$.

Доказательство. Из условия $r < N/2$ следует, что $\dim C(d, g) = \dim L(g)$. Поэтому будем искать базис пространства $L(G)$. Из определения $L(G)$ и из формул (19), (20) легко следует, что $L(G)$ содержит элементы вида $x^i y^j$, если $0 \leq j < 2$, $i + (j/2) \deg f \leq r$, и не содержит элементы вида $u(x)y^i/w(x)$, где $(u(x), w(x)) = 1$ и $\deg w(x) > 0$. Кроме того, так как $[F: K(x)] = 2$, указанные элементы $x^i y^j$ линейно независимы над K . Отсюда следует, что система

$$B = \{x^i y^j: 0 \leq j \leq 1, i + (j/2) \deg f \leq r\}$$

есть базис кода $C(D, G)$. В случае $r \leq (1/2) \deg f - 1$ система B совпадает с системой (23), в противном случае с системой (24). Следовательно, утверждение о размерности кода доказано и остается найти d . Рассмотрим элемент

$$z = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i),$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — попарно различные элементы из K . Очевидно, что $z \in L(G)$ и $z(Q) = 0$ для всех точек Q вида $Q_{\alpha_i, \beta}$. Таких точек $2r$, и значит, $d \leq N - 2r$. Пусть $r > (1/2) \deg f - 1$. По теореме 12 род поля $g = (1/2) \deg f - 1$, и значит, $r > g$. Тогда в силу (21)

$$d \geq N - \deg G \geq N - 2r.$$

Следовательно, $d = N - 2r$, и теорема доказана.

Найдем порождающую матрицу кода $C(D, g)$. Упорядочим произвольно элементы поля K . Пусть

$$K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}, \quad M = N/2 = q^n,$$

и $\pm\beta_i$ — решения уравнения $y^2 = f(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, q^n$. Теперь упорядочим точки первой степени следующим образом:

$$Q_{\alpha_1, \beta_1}, Q_{\alpha_2, \beta_2}, \dots, Q_{\alpha_M, \beta_M}, Q_{\alpha_1, -\beta_1}, Q_{\alpha_2, -\beta_2}, \dots, Q_{\alpha_M, -\beta_M}. \quad (25)$$

Из вида элементов системы (23) замечаем, что первые $r+1$ строк искомой матрицы C образуют подматрицу $C' = (A, A)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_M \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_M^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \dots & \alpha_M^r \end{pmatrix}.$$

В случае $r \leq (1/2) \deg f - 1$ матрица C' и будет порождающей матрицей нашего кода.

Если $r > (1/2) \deg f - 1$, то матрица C будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} A & A \\ B & -B \end{pmatrix},$$

где матрица B имеет размеры $m \times M$, $m = r+1 - 1/2 \deg f(x)$, и ее строки получаются покомпонентным умножением первых m строк матрицы A на вектор $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M)$.

Замечание 1. Соотношения (21) для параметров кода сохраняются и в случае, если в качестве точек $Q_1, \dots, Q_N$ взять любые N точек первой степени, лишь бы N удовлетворяло неравенствам (22). В частности, если выбрать первые M точек из (25), то получим код той же размерности с порождающей матрицей

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

При $r \leq (1/2) \deg f - 1$ это будут коды Рида–Соломона над полем F_{q^n} . Они являются так называемыми МДР-кодами (кодами с максимально достижимым расстоянием). При $r > (1/2) \deg f - 1$, полученные коды не будут МДР-кодами, но по своим параметрам они будут к ним близки.

При построении кодов Гоппы чаще всего в качестве $Q_1, \dots, Q_N$ берут все точки первой степени поля F , а в качестве G дивизор rQ_∞ . Далее мы рассмотрим более общий случай.

Введем следующие обозначения. Пусть $p_{i1}(x), \dots, p_{it_i}(x)$ — все неприводимые над F_{q^n} делители многочлена $\phi_i(x)$, $i = 1, 2$, $p_{31}(x), \dots, p_{3t_3}(x)$ — некоторый набор неприводимых над F_{q^n} многочленов, не являющихся делителями многочлена $f(x)$, $c_i = \deg \phi_i(x)$, $i = 1, 2$, $c = s^{-1} \deg f(x)$, $m_{ik} = \deg p_{ik}(x)$. Будем предполагать, что $m_{3k} > 1$, $k = 1, \dots, t_3$. Из [7] известно, что $m_{1k} > 1$ при $k = 1, \dots, t_1$, $m_{2k} > 1$ при $k = 1, \dots, t_2$. Возьмем дивизоры

$$G = \sum_{k=1}^{t_1} r_{1k} Q_{1k} + \sum_{k=1}^{t_2} r_{2k} Q_{2k} + \sum_{k=1}^{t_3} r_{3k} Q_{3k} + r Q_\infty, \quad (26)$$

где $r_{ik} \geq 0, t_k \geq 0, r > 0, D = Q_1 + \dots + Q_N$ — сумма точек первой степени поля F , и найдем базис кода $C(D, G)$. Для этого построим базис $L(G)$.

Из утверждения 1) теоремы 4 следует, что любой элемент $z \in F$ однозначно представляется в виде

$$u_0(x) + u_1(x)y + \dots + u_{s-1}(x)y^{s-1}, \quad (27)$$

где $u_i(x) \in K(x)$. Выясним, когда $u_i(x)y^i \in L(G)$.

Лемма 3. *Элемент поля F*

$$z = \frac{x^i y^j}{w(x)}, \quad i \geq 0, \quad 0 \leq j < s, \quad w(x) \in F_{q^n}[x],$$

содержится в пространстве $L(G)$ в том и только том случае, когда выполняются следующие условия:

- 1) *любой неприводимый над F_{q^n} делитель многочлена $w(x)$ совпадает с одним из многочленов $p_{l,k}, l = 1, 2, 3, k = 1, \dots, t_l$;*
- 2) $\exp_{p_{1,k}(x)} w(x) \leq (aj + r_{1,k})/s, k = 1, \dots, t_1$;
- 3) $\exp_{p_{2,k}(x)} w(x) \leq (bj + r_{2,k})/s, k = 1, \dots, t_2$;
- 4) $\exp_{p_{3,k}(x)} w(x) \leq r_{3,k}, k = 1, \dots, t_3$;
- 5) $\deg w(x) - i - jc + r \geq 0$, где $c = -v_{Q_\infty}(y) = s^{-1} \deg f(x)$.

Доказательство. Согласно определению пространства $L(G)$ элемент $z \neq 0$ из F содержится в $L(G)$ в том и только том случае, когда $(z) + G \geq 0$, то есть $v_Q(z) + v_Q(G) \geq 0$ для любой точки Q поля F . Из формул (19), (20) замечаем, что условия леммы эквивалентны условию $v_Q(z) + v_Q(G) \geq 0$ соответственно для точек $Q_{p(x)}, p(x) \nmid f(x), p(x) \neq p_{k,l}(x), Q_{p_{1,k}}(x), Q_{p_{2,k}}(x), Q_{p_{3,k}}(x), Q_\infty$. Лемма доказана.

Заметим, что

$$\deg G = \sum_{l,k} r_{lk} \deg Q_{l,k} + r \deg Q_\infty.$$

Отсюда, на основании теоремы 4 получаем, что

$$M = \deg G = \sum_{k=1}^{t_1} r_{1k} m_{1k} + \sum_{k=1}^{t_2} r_{2k} m_{2k} + s \sum_{k=1}^{t_3} r_{3k} m_{3k} + sr.$$

Пользуясь леммой 3, выберем для каждого $j = 0, 1, \dots, s-1$ унитарный многочлен $w_j(x) = w_j(x)$ наибольшей степени, удовлетворяющий первым четырем условиям этой леммы. Получим

$$w_j(x) = \phi_1^{[aj/s]} \phi_2^{[bj/s]} g_{1j} g_{2j} g_{3j},$$

где

$$g_{1j} = \prod_{k=1}^{t_1} p_{1k}(x)^{[(aj+r_{1k})/s] - [aj/s]}, \quad g_{2j} = \prod_{k=1}^{t_2} p_{2k}(x)^{[(bj+r_{2k})/s] - [bj/s]},$$

$$g_{3j} = \prod_{k=1}^{t_3} p_{3k}(x)^{r_{3k}}.$$

Последнее условие леммы 3 для числа $x^i y^j / w_j(x)$ запишется в виде $i \leq d_j$, где $d_j = \deg w_j(x) - jc + r$. Докажем, что при любом $j = 0, 1, \dots, s-1$ выполняется неравенство $d_j \geq -1$. Из неравенства $2g - 2 < \deg G$ (см. (22)) находим, что

$$r \geq \frac{1}{s} \left((s-1)(c_1 + c_2 - 2) - 1 - \sum_{k=1}^{t_1} r_{1k} m_{1k} - \sum_{k=1}^{t_2} r_{2k} m_{2k} \right) - \sum_{k=1} t_3 r_{3k} m_{3k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d_j + 1 &\geq c_1 \left[\frac{aj}{s} \right] + c_2 \left[\frac{bj}{s} \right] + \sum_{k=1}^{t_1} m_{1k} \left(\left[\frac{aj + r_{1k}}{s} \right] - \left[\frac{aj}{s} \right] \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{t_2} m_{2k} \left(\left[\frac{bj + r_{2k}}{s} \right] - \left[\frac{bj}{s} \right] \right) + \frac{(s-1)(c_1 + c_2 - 2) - 1}{s} \\ &\quad - \frac{1}{s} \left(\sum_{k=1}^{t_1} r_{1k} m_{1k} + \sum_{k=1}^{t_2} r_{2k} m_{2k} \right) - jc + 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что

$$c_i = \deg \phi_i(x) = \sum_{k=1}^{t_i} m_{ik}, \quad i = 1, 2, \quad c = \frac{1}{s}(ac_1 + bc_2).$$

Поэтому неравенство (28) можно записать в виде

$$d_{j+1} \geq \sum_{k=1}^{t_1} u_{1k} m_{1k} + \sum_{k=1}^{t_2} u_{2k} m_{2k} - \frac{s-1}{s}.$$

При этом

$$\begin{aligned} u_{1k} &= \left[\frac{aj + r_{1k}}{s} \right] + \frac{s-1}{s} - \frac{r_{1k}}{s} - \frac{ja}{s}, \\ u_{2k} &= \left[\frac{bj + r_{2k}}{s} \right] + \frac{s-1}{s} - \frac{r_{2k}}{s} - \frac{jb}{s}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $u_{1k} \geq 0, u_{2k} \geq 0$ и, значит, $d_j + 1 \geq -(s-1)/s$. Отсюда, учитывая, что число $d_j + 1$ целое, получаем, что $d_j + 1 \geq 0$, то есть $d_j \geq -1$.

Пусть

$$B_j = \left\{ \frac{x^i y^j}{w_j(x)} : 0 \leq i \leq d_j \right\},$$

если $d_j \geq 0$, и $B_j = \emptyset$, если $d_j = -1$.

Теорема 6. Если для определенного равенством (26) дивизора G выполняется условие (22), то множество

$$B = \bigcup_{j=0}^{s-1} B_j$$

является базисом пространства $L(G)$.

Доказательство. Из леммы 3 видно, что $B \subset L(G)$. Из однозначности представления элементов из F в виде (27) следует, что система B линейно независима над F_q^n . Остается доказать равенство $|B| = \dim L(G)$.

Так как $2g - 2 < \deg G$, то, как следует из теоремы Римана–Роха (теорема I.5.17 в [7]),

$$\begin{aligned} \dim L(G) &= \deg G + 1 - g \\ &= \sum_{k=1}^{t_1} r_{1k} m_{1k} + \sum_{k=1}^{t_2} r_{2k} m_{2k} + s \sum_{k=1}^{t_3} r_{3k} m_{3k} + sr + 1 - \frac{s-1}{s} (c_1 + c_2 - 2). \end{aligned}$$

Найдем $|B|$. Из построения множества B заключаем, что

$$|B| = \sum_{j=0}^{s-1} (d_j + 1) = \sum_{j=0}^{s-1} (\deg w_j(x) - j(ac_1 + bc_2) + r + 1).$$

Из (27) находим, что

$$\begin{aligned} \deg w_j(x) &= c_1 \left[\frac{aj}{s} \right] + c_2 \left[\frac{bj}{s} \right] + \sum_{k=1}^{t_1} m_{1k} \left(\left[\frac{aj + r_{1k}}{s} \right] - \left[\frac{aj}{s} \right] \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{t_2} m_{2k} \left(\left[\frac{bj + r_{2k}}{s} \right] - \left[\frac{bj}{s} \right] \right) + \sum_{k=1}^{t_3} r_{3k} m_{3k}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись легко проверяемым равенством

$$\sum_{j=0}^{s-1} \left[\frac{aj + r}{s} \right] = \frac{(a-1)(s-1)}{s} + r,$$

справедливым для любых целых чисел $a > 0$, $s > 0$, $r \geq 0$, $s \in \mathbf{N}$, при условии, что $(a, s) = 1$, получаем, что

$$\sum_{j=0}^{s-1} \deg w_j(x) = c_1 \frac{(a-1)(s-1)}{2} + c_2 \frac{(b-1)(s-1)}{2} + M,$$

где

$$M = \sum_{k=1}^{t_1} r_{1k} m_{1k} + \sum_{k=1}^{t_2} r_{2k} m_{2k} + s \sum_{k=1}^{t_3} r_{3k} m_{3k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B &= c_1 \frac{(a-1)(s-1)}{2} + c_2 \frac{(b-1)(s-1)}{2} + M - \frac{s-1}{s} (ac_1 + bc_2) + rs + s \\ &= M - \frac{s-1}{s} (c_1 + c_2) + s + rs = \dim L(G). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Для построения порождающей матрицы кода $C(D, G)$ упорядочим точки первой степени следующим образом:

$$Q_{\alpha_1, \beta_1}, \dots, Q_{\alpha_{q^n}, \beta_{q^n}}, Q_{\alpha_1, \beta_1 \xi}, \dots, Q_{\alpha_{q^n}, \beta_{q^n} \xi}, \dots, Q_{\alpha_1, \beta_1 \xi^{s-1}}, \dots, Q_{\alpha_{q^n}, \beta_{q^n} \xi^{s-1}},$$

где ξ — любой элемент порядка s в поле F_{q^n} , $\alpha_1, \dots, \alpha_{q^n}$ — произвольная перестановка элементов поля F_{q^n} . Тогда при максимальном значении $N = q^n s$ порождающая матрица кода $C(D, G)$ будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_0 & \dots & A_0 \\ A_1 & A_1 \xi & \dots & A_1 \xi^{s-1} \\ A_2 & A_2 \xi & \dots & A_2 \xi^{s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s-1} & A_{s-1} \xi & \dots & A_{s-1} \xi^{s-1} \end{pmatrix},$$

где A_j — матрица размеров $(d_j + 1) \times q^n$ и A_j получается из первых $d_j + 1$ строк матрицы B их покомпонентным умножением на вектор

$$(v_{j,1}, \dots, v_{j,q^n}),$$

где $v_{j,k} = \beta_k w_j(\alpha_k)^{-1}$, $k = 1, \dots, q^n$, и

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{q^n} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{q^n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{q^n-2} & \alpha_2^{q^n-2} & \dots & \alpha_{q^n}^{q^n-2} \end{pmatrix}.$$

Следствие 5. . Если дивизор G имеет вид (26), D — сумма всех точек первой степени поля F и выполнено условие (22), то $C(D, G)$ есть $[N, k, d]$ -код над полем F_{q^n} , где

$$N = q^n s, \quad k = \dim C(D, G) = \deg G + 1 - g, \quad N - \deg G \leq d \leq N - s \max d_j.$$

В этом утверждении доказательства требует лишь последнее неравенство. Для его доказательства достаточно заметить, что пространство, натянутое на B_j , содержит элементы вида $a(x)y^j/w_j(x)$, где $a(x)$ — любой многочлен степени $l \leq d_j$. Следовательно $L(G)$ содержит элемент

$$\frac{1}{w_j(x)} \prod_{i=1}^{d_j} (x - \alpha_i) y^j,$$

который имеет значение 0 в sd_j точках

$$P_{\alpha_i, \beta_i \xi^t}, \quad i = 1, \dots, d_j, \quad t = 0, \dots, s-1,$$

значит, $d \leq N - sd_j$.

Следствие 6. . Если $G = rQ_\infty$, D — сумма всех точек первой степени поля F и выполнено условие (22), то $C(D, G)$ есть $[N, k, d]$ -код над F_{q^n} , где

$$N = q^n s, \quad k = \deg G + 1 - g, \quad d = N - \deg G.$$

В этом случае последнее равенство следует из предыдущего следствия, если учесть, что $d_0 = r$ и $d \leq N - sr = \deg G$ при $G = rQ_\infty$.

Замечание 2. Из этих двух следствий видно, что использование в качестве G дивизоров, отличных от rQ_∞ , возможно позволит строить коды такой же размерности, что и при $G = rQ_\infty$, но с большим кодовым расстоянием.

Список литературы

1. Глухов М. М. (мл.), Нижние оценки сумм характеров от многочленов над конечными полями. *Дискретная математика* (1994) **6**, №3, 136–142.
2. Глухов М. М. (мл.), О канонических разложениях некоторых двучленов над $\text{GF}(q^m)$. *Тезисы докл. II международной конференции "Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел"*, Воронеж, 1995, с.41.
3. Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*. Мир, Москва, 1988.
4. Ozbudak F., Glukhov M., Jr., Codes on superelliptic curves. *Turkish J. Math.* (1998) **22**, 223–234.
5. Степанов С. А., *Арифметика алгебраических кривых*. Наука, Москва, 1991.
6. Степанов С. А., Озбудак Ф., Расслоенные произведения гиперэллиптических кривых и геометрические коды Гоппы. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 36–42.
7. Stichtenoth H., *Algebraic Function Fields and Codes*. Springer, Berlin, 1993.

Статья поступила 26.06.2000.