Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Кравцов, В. М. Кравцов, Е. В. Лукшин, О нецелочисленных вершинах многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 2, 120–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:26:42

О нецелочисленных вершинах многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях

© 2001 г. М. К. Кравцов, В. М. Кравцов, Е. В. Лукшин

Исследуются нецелочисленные вершины многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. В частности, получены достаточно точные оценки снизу, а в некоторых случаях и формулы для определения r -нецелочисленных вершин такого многогранника, то есть вершин, число дробных компонент у которых равно r .

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект Ф97-266.

1. Введение

Известно (см. [1, 2]), что многогранник

$$M(2, n) = \left\{ x = \|x_{ij}\|_n : \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j \in N_n, \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i \in N_n, x_{ij} \geq 0, (i, j) \in N_n^2 \right\},$$

где $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $N_n^2 = N_n \times N_n$, задачи о назначениях является целочисленным, то есть все его вершины имеют только целочисленные компоненты.

Рассмотрим многогранник $M(3, n)$, $n \geq 2$, заданный условиями

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijt} = 1, \quad t \in N_n, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ijt} = 1, \quad j \in N_n, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ijt} = 1, \quad i \in N_n, \quad (3)$$

$$x_{ijt} \geq 0, \quad (i, j, t) \in N_n^3, \quad (4)$$

где $N_n^3 = N_n \times N_n \times N_n$. Поскольку целочисленные точки многогранника $M(3, n)$ служат допустимой областью широко распространенной в приложениях трехиндексной аксиальной задачи о назначениях [1], многогранник $M(3, n)$ будем называть многогранником трехиндексной аксиальной задачи о назначениях.

Известны следующие свойства многогранника $M(3, n)$ (см. [1]):

- (1) ранг матрицы системы (1)–(3) равен $3n - 2$; из этого свойства вытекает, что вершина многогранника $M(3, n)$ содержит не более, чем $3n - 2$ положительных компонент;
- (2) размерность многогранника $M(3, n)$ равна $n^3 - 3n + 2$;
- (3) количество целочисленных вершин многогранника $M(3, n)$ равно $(n!)^2$.

В отличие от многогранника $M(2, n)$ многогранник $M(3, n)$ трехиндексной аксиальной задачи о назначениях не является целочисленным [1, 3], то есть имеет и вершины с дробными координатами. Проблема нахождения решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях является NP -полной проблемой [4]. Сложное строение нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, естественно, создает принципиальные трудности на пути исследования этого многогранника.

В настоящей работе исследуются нецелочисленные вершины многогранника $M(3, n)$ трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. Доказаны теоремы, касающиеся строения и подсчета r -нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, то есть вершин, число дробных компонент которых равно r . Выведены формулы для подсчета мощности некоторых классов r -нецелочисленных вершин такого многогранника.

Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями из [1].

2. Общие свойства вершин

Рассмотрим матрицу $\|y_{ij}\|_n$, принадлежащую многограннику $M(2, n)$. Запишем эту матрицу в виде n^2 -мерного вектора

$$z(y) = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, \dots, y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nn}).$$

Удалив в векторе $z(y)$ нулевые компоненты, получим вектор $z^+(y)$, число компонент которого равно числу $t(y)$ положительных элементов матрицы y . Заметим, что компоненты вектора $z^+(y)$ занумерованы тем же способом, что и компоненты вектора $z(y)$. Поскольку сумма компонент вектора $z^+(y)$ равна n , пара векторов, состоящая из вектора $z^+(y)$ и вектора $e = (1, \dots, 1)$ с n компонентами, определяет классический транспортный многогранник $M(z^+(y), e)$ порядка $t(y) \times n$, который достаточно полно изучен (см. [1, 3, 5 – 10]).

Пусть $g(y) = \|g_{pt}^y\|_{t(y) \times n}$ — некоторая матрица многогранника $M(z^+(y), e)$, где индекс p представляет собой совокупность индексов (i, j) , задаваемую номерами компонент вектора $z^+(y)$. Тогда по этой матрице определим матрицу $x(g(y)) = \|x_{ijt}^{g(y)}\|_n$, полагая

$$x_{ijt}^{g(y)} = \begin{cases} g_{pt}^y, & \text{если } (i, j) = p, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, что построенная таким образом матрица $x(g(y))$ удовлетворяет условиям (1)–(4), то есть $x(g(y)) \in M(3, n)$. Легко также заметить, что любая матрица

многогранника $M(3, n)$ может быть построена по правилу (5). Следовательно, многогранник $M(3, n)$ представим в виде

$$M(3, n) = \{x(g(y)) : y \in M(2, n), g(y) \in M(z^+(y), e)\}. \quad (6)$$

При этом будем говорить, что матрица $\|x_{ijt}^{g(y)}\|_n$ многогранника $M(3, n)$ построена на основе матрицы $g(y)$ многогранника $M(z^+(y), e)$.

Важность указанного в (6) представления состоит в том, что оно служит основой для построения и исследования вершин многогранника $M(3, n)$. Используя это представление, задачу нахождения экстремума функции

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n c_{ijt} x_{ijt},$$

где c_{ijt} — заданные действительные числа, при ограничениях (1)–(4) и x_{ijt} равно нулю или единице для всех $(i, j, t) \in N_n^3$, можно свести к решению $n!$ двухиндексных задач о назначениях

$$\text{extr} \left\{ \sum_{(i,j) \in K(y)} \sum_{t=1}^n c_{ijt} x_{ijt} : \|x_{ijt}\|_n \in M(z^+(y), e^3) \right\}, \quad y \in \text{Ver } M(2, n).$$

Здесь $K(y) = \{(i, j) \in N_n^2 : y_{ij} = 1\}$, $\text{Ver } M$ — множество вершин многогранника M .

Данный факт дает основу для построения новых алгоритмов решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях.

Основываясь на равенстве (6), легко доказать следующее утверждение.

Предложение 1. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \{x(g(y)) : g(y) \in \text{Ver } M(z^+(y), e)\} &\subset \text{Ver } M(3, n), \quad y \in \text{Ver } M(2, n), \\ \text{Ver } M(z^+(y^1), e) \cap \text{Ver } M(z^+(y^2), e) &= \emptyset, \quad y^1, y^2 \in \text{Ver } M(2, n), \quad y^1 \neq y^2, \end{aligned}$$

где $\text{Ver } M$ — множество вершин многогранника M .

Очевидно, что всякая целочисленная точка многогранника $M(3, n)$ является его вершиной. Поэтому в силу предложения 1 и равенства (6) получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Число $f_0^z(M(3, n))$ целочисленных вершин многогранника $M(3, n)$ выражается формулой*

$$f_0^z(M(3, n)) = \sum_{y \in \text{Ver } M(2, n)} f_0(M(z^+(y), e)),$$

где $f_0(M)$ — число вершин многогранника M .

Так как $f_0(M(2, n)) = n!$ (см. [2]), а многогранник $M(z^+(y), e)$ для любого $y \in \text{Ver } M(2, n)$ отличается от многогранника $M(2, n)$ лишь нумерацией элементов их матриц, то из предложения 2 вытекает следующий известный результат [1]: число целочисленных вершин многогранника $M(3, n)$ выражается формулой

$$f_0^z(M(3, n)) = (n!)^2. \quad (7)$$

3. Характеризация некоторых классов r -нецелочисленных вершин

Совокупность элементов матрицы $x = \|x_{ijt}\|_n$ с фиксированным значением одного индекса, например, i будем называть двумерным сечением ориентации (jt) матрицы x . Двумерное сечение матрицы x назовем нецелочисленным сечением, если оно содержит хотя бы одну дробную компоненту. Очевидно следующее утверждение.

Лемма 1. *Всякая нецелочисленная матрица x многогранника $M(3, n)$ обладает следующими свойствами:*

- (1) *каждое нецелочисленное двумерное сечение матрицы x содержит по крайней мере две дробных компоненты;*
- (2) *$I(x) = J(x) = T(x) \geq 2$, где $I(x)$, $J(x)$ и $T(x)$ — число всех нецелочисленных двумерных сечений соответственно ориентации $(j t)$, $(i t)$, $(i j)$ матрицы x .*

Пусть $r \in N_{3n-2}$. Вершину многогранника $M(3, n)$ назовем r -нецелочисленной вершиной, если число ее дробных компонент равно r . Через $\sigma(n, r)$ будем обозначать число всех r -нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$.

Из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Для всех $r \in N_3$, $n \geq 2$*

$$\sigma(n, r) = 0.$$

Теорема 1. *При $n > 2$*

$$\sigma(n, 5) = 0.$$

Доказательство. Предположим, что существует матрица x многогранника $M(3, n)$, $n > 2$, являющаяся его 5-нецелочисленной вершиной. Тогда согласно лемме 1 для этой матрицы найдутся только два двумерных сечения одной ориентации, в одном из которых содержится две, а в другом три дробные компоненты. Вычеркнув из матрицы x все сечения, содержащие только целочисленные компоненты, получим матрицу, которая должна быть 5-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, 2)$. Но это противоречит тому, что число положительных компонент любой вершины многогранника $M(3, 2)$ не превосходит четырех. Следовательно, $\sigma(n, 5) = 0$. Теорема 1 доказана.

Пусть $n \geq 3$. Зафиксируем некоторое число $m \in \{2, \dots, n-1\}$. Пусть I_1, J_1, T_1 — некоторые подмножества (возможно, совпадающие) мощности m множества N_n . Положим

$$I_2 = N_n \setminus I_1, \quad J_2 = N_n \setminus J_1, \quad T_2 = N_n \setminus T_1.$$

Так как $m \leq n-1$, то $I_2 \neq \emptyset$, $J_2 \neq \emptyset$, $T_2 \neq \emptyset$. Для двух троек подмножеств (I_1, J_1, T_1) и (I_2, J_2, T_2) определим многогранники

$$M(I_s, J_s, T_s) = \left\{ x = \|x_{ijt}\|_{I_s \times J_s \times T_s} : \sum_{i \in I_s} \sum_{j \in J_s} x_{ijt} = 1, t \in T_s, \right. \\ \left. \sum_{i \in I_s} \sum_{t \in T_s} x_{ijt} = 1, j \in J_s, \sum_{j \in J_s} \sum_{t \in T_s} x_{ijt} = 1, i \in I_s, x_{ijt} \geq 0, (i, j, t) \in I_s \times J_s \times T_s \right\},$$

где $s = 1, 2$.

Замечание 1. Многогранники $M(I_1, J_1, T_1)$ и $M(I_2, J_2, T_2)$ отличаются, соответственно, от многогранников $M(3, m)$ и $M(3, n - m)$ лишь нумерацией элементов их матриц.

Очевидно, что при $n - m = 1$ многогранник $M(I_2, J_2, T_2)$ вырождается в точку.

Методом от противного легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $y^s = \|y_{ijt}^s\|_{I_s \times J_s \times T_s}$ — некоторая вершина многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$, $s = 1, 2$. Тогда матрица $x^0 = \|x_{ijt}^0\|_n$ с элементами

$$x_{ijt}^0 = \begin{cases} y_{ijt}^s, & \text{если } (i, j, t) \in I_s \times J_s \times T_s, \quad s = 1, 2, \\ 0 & \text{при остальных } (i, j, t) \in N_n^3 \end{cases} \quad (8)$$

является вершиной многогранника $M(3, n)$.

Пусть $r \in \{4, 6, 7, \dots, 3n - 2\}$. Через $m(r)$ будем обозначать наименьшее натуральное число k , для которого выполняется неравенство $\sigma(k, r) > 0$. Очевидно, что $m(r) \geq 2$ и $\sigma(n, r) = 0$ для всех $n < m(r)$. Следующее свойство функции $\sigma(n, r)$ вытекает из определения числа $m(r)$ и леммы 2.

Лемма 3. Пусть натуральные числа m и r удовлетворяют условию $\sigma(m, r) > 0$. Тогда для любого натурального числа $n > m$ справедливо неравенство $\sigma(n, r) > 0$.

Обозначим через R_{ijt} вектор-столбец матрицы ограничений (1)–(3), у которого единицы стоят в строках с номерами i , $(n + j)$ и $(2n + t)$, а остальные элементы нули.

Теорема 2. Пусть

$$q(n) = \begin{cases} 3n - 2, & \text{если } 2 \leq n \leq 6, \\ 2n + 3, & \text{если } n = 7, \\ 2n + 4, & \text{если } n = 8, \\ 2n + 5, & \text{если } n \geq 9. \end{cases} \quad (9)$$

Для любого числа $r \in \{4, 6, 7, \dots, q(n)\}$ у многогранника $M(3, n)$ существуют r -нецелочисленные вершины.

Доказательство. Сначала покажем, что для любых чисел $r \in \{4, 6, 7, \dots, 3n - 2\}$ и $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ у многогранника $M(3, n)$ имеются r -нецелочисленные вершины. Рассмотрим матрицу $x^1 = \|x_{ijt}^1\|_2$ с ненулевыми компонентами

$$x_{111}^1 = x_{122}^1 = x_{212}^1 = x_{221}^1 = 1/2.$$

Очевидно, что $x^1 \in M(3, 2)$. Поскольку уравнение

$$\alpha_1 R_{111} + \alpha_2 R_{122} + \alpha_3 R_{212} + \alpha_4 R_{221} = 0$$

имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, матрица x^1 является 4-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, 2)$.

При помощи аналогичных рассуждений можно показать, что матрицы

$$\begin{aligned} x^2 = \|x_{ijt}^2\|_3, \quad x^3 = \|x_{ijt}^3\|_3, \quad x^4 = \|x_{ijt}^4\|_4, \quad x^5 = \|x_{ijt}^5\|_4, \quad x^6 = \|x_{ijt}^6\|_4, \quad x^7 = \|x_{ijt}^7\|_5, \\ x^8 = \|x_{ijt}^8\|_5, \quad x^9 = \|x_{ijt}^9\|_5, \quad x^{10} = \|x_{ijt}^{10}\|_6, \quad x^{11} = \|x_{ijt}^{11}\|_6, \quad x^{12} = \|x_{ijt}^{12}\|_6, \end{aligned}$$

ненулевые компоненты которых определяются равенствами

$$\begin{aligned} x_{111}^2 = x_{221}^2 = x_{112}^2 = x_{332}^2 = x_{233}^2 = x_{323}^2 = 1/2, \\ x_{221}^3 = x_{332}^3 = 2/3, \quad x_{111}^3 = x_{112}^3 = x_{133}^3 = x_{213}^3 = x_{323}^3 = 1/3, \\ x_{111}^4 = x_{221}^4 = x_{122}^4 = x_{212}^4 = x_{333}^4 = x_{443}^4 = x_{344}^4 = x_{434}^4 = 1/2, \\ x_{221}^5 = x_{332}^5 = 3/4, \quad x_{143}^5 = x_{413}^5 = x_{444}^5 = 1/2, \\ x_{111}^5 = x_{112}^5 = x_{234}^5 = x_{324}^5 = 1/4, \\ x_{231}^6 = 3/4, \quad x_{112}^6 = x_{422}^6 = x_{343}^6 = x_{324}^6 = 1/2, \\ x_{141}^6 = x_{433}^6 = x_{213}^6 = x_{414}^6 = x_{144}^6 = 1/4, \\ x_{454}^7 = x_{545}^7 = 2/3, \quad x_{111}^7 = x_{221}^7 = x_{122}^7 = x_{212}^7 = 1/2, \\ x_{343}^7 = x_{433}^7 = x_{553}^7 = x_{334}^7 = x_{335}^7 = 1/3, \\ x_{334}^8 = x_{225}^8 = 4/5, \quad x_{542}^8 = x_{153}^8 = 3/5, \quad x_{551}^8 = x_{412}^8 = x_{443}^8 = 2/5, \\ x_{211}^8 = x_{321}^8 = x_{431}^8 = x_{114}^8 = x_{115}^8 = 1/5, \\ x_{921}^9 = x_{332}^9 = x_{443}^9 = 3/5, \quad x_{111}^9 = x_{112}^9 = x_{454}^9 = x_{544}^9 = x_{355}^9 = x_{525}^9 = 2/5, \\ x_{213}^9 = x_{553}^9 = x_{134}^9 = x_{235}^9 = 1/5, \\ x_{111}^{10} = x_{332}^{10} = x_{444}^{10} = x_{665}^{10} = 2/3, \\ x_{221}^{10} = x_{222}^{10} = x_{123}^{10} = x_{233}^{10} = x_{313}^{10} = x_{554}^{10} = x_{555}^{10} = x_{456}^{10} = x_{566}^{10} = x_{646}^{10} = 1/3, \\ x_{221}^{11} = x_{362}^{11} = x_{636}^{11} = 2/3, \quad x_{445}^{11} = x_{555}^{11} = 1/2, \quad x_{456}^{11} = x_{546}^{11} = 1/6, \\ x_{111}^{11} = x_{112}^{11} = x_{143}^{11} = x_{253}^{11} = x_{523}^{11} = x_{314}^{11} = x_{464}^{11} = x_{634}^{11} = 1/3, \\ x_{221}^{12} = x_{362}^{12} = 2/3, \quad x_{111}^{12} = x_{112}^{12} = x_{623}^{12} = x_{553}^{12} = x_{463}^{12} = x_{434}^{12} = x_{544}^{12} \\ = x_{654}^{12} = x_{155}^{12} = x_{235}^{12} = x_{445}^{12} = x_{316}^{12} = x_{536}^{12} = x_{646}^{12} = 1/3, \end{aligned}$$

являются r -нецелочисленными вершинами соответственно с

$$r = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

многогранников $M(3, 3)$, $M(3, 3)$, $M(3, 4)$, $M(3, 4)$, $M(3, 4)$, $M(3, 5)$, $M(3, 5)$, $M(3, 5)$, $M(3, 6)$, $M(3, 6)$ и $M(3, 6)$. Отсюда, с учетом леммы 3, получаем, что для любого $r \in \{4, 6, 7, \dots, 3n - 2\}$, где $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, у многогранника $M(3, n)$ существуют r -нецелочисленные вершины, и тем самым теорема 2 доказана при $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Поэтому будем считать, что $n \geq 7$. На основании только что доказанной теоремы для $n = 2, 3, 4, 5, 6$ и леммы 3 заключаем, что многогранник $M(3, n)$, $n \geq 7$, имеет r -нецелочисленные вершины, где $r \in N_{16} \setminus \{1, 2, 3, 5\}$.

Пусть $n = 2k + 5$, где k — натуральное число. Положим

$$\begin{aligned} I_s = J_s = T_s = \{2s - 1, 2s\}, \quad s \in N_k, \\ I_{k+1} = J_{k+1} = T_{k+1} = \{2k + 1, 2k + 2, 2k + 3, 2k + 4, 2k + 5\}. \end{aligned}$$

Пусть

$$y^s = \|y_{ijt}^s\|_{I_s \times J_s \times T_s}, \quad s \in N_h, \quad h \leq k,$$

— 4-нецелочисленная вершина многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$,

$$y^s = \|y_{ijt}^s\|_{I_s \times J_s \times T_s}, \quad s = h+1, \dots, k,$$

при $h+1 \geq k$, — целочисленная вершина многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$,

$$y^{k+1} = \|y_{ijt}^{k+1}\|_{I_{k+1} \times J_{k+1} \times T_{k+1}},$$

— r_1 -нецелочисленная вершина $M(I_{k+1}, J_{k+1}, T_{k+1})$, где $r_1 \in \{10, 11, 12, 13\}$. Тогда по лемме 2 матрица x^0 , элементы которой определяются по формуле (8), является r -нецелочисленной вершиной $M(3, n)$, где $r = 4h + r_1$, $h \in N_k$, $r_1 \in \{10, 11, 12, 13\}$. Тем самым для любого $r \in \{14, 15, \dots, 2n+3\}$ у многогранника $M(3, n)$, $n = 2k+5$, установлено существование r -нецелочисленных вершин.

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что у многогранника $M(3, n)$ при $n = 2k+5$, $k \geq 2$, существуют $(2n+4)$ - и $(2n+5)$ -нецелочисленные вершины. Для этого вместо многогранников $M(I_1, J_1, T_1)$ и $M(I_2, J_2, T_2)$ достаточно рассмотреть многогранник $M(I'_1, J'_1, T'_1)$, где $I'_1 = J'_1 = T'_1 = N_4$, взяв в нем 9- и 10-нецелочисленные вершины.

Пусть теперь $n = 2k+6$, где k — натуральное число. Положим

$$I_s = J_s = T_s = \{2s-1, 2s\}, \quad s \in N_k,$$

$$I_{k+1} = J_{k+1} = T_{k+1} = \{2k+1, 2k+2, 2k+3, 2k+4, 2k+5, 2k+6\}.$$

Пусть y^s , $s \in N_h$, $h \leq k$, есть 4-нецелочисленная вершина многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$, y^s , $s = h+1, \dots, k$, при $h+1 \geq k$, есть целочисленная вершина многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$, y^{k+1} есть r_2 -нецелочисленная вершина многогранника $M(I_{k+1}, J_{k+1}, T_{k+1})$, где $r_2 \in \{12, 13, 14, 15, 16\}$. Тогда по лемме 2 матрица x^0 , построенная согласно формуле (8), является r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$, где $r = 4h + r_2$, $h \in N_k$, $r_2 \in \{12, 13, 14, 15, 16\}$. Итак, доказано, что для любого числа $r \in \{16, 17, \dots, 2n+4\}$ у многогранника $M(3, n)$, $n = 2k+6$, существуют r -нецелочисленные вершины.

Если вместо многогранников $M(I_1, J_1, T_1)$ и $M(I_2, J_2, T_2)$ рассмотреть многогранник $M(I'_1, J'_1, T'_1)$, где $I'_1 = J'_1 = T'_1 = N_4$, и взять у него 9-нецелочисленную вершину, то, повторяя рассуждения, использованные выше, приходим к выводу, что у многогранника $M(3, n)$, $n = 2k+6$, $k \geq 2$, существуют $(2n+5)$ -нецелочисленные вершины. Теорема 2 доказана.

Положим $R_n = \{r \in \{4, 6, 7, \dots, 3n-2\} : m(r) \leq n\}$. Согласно теореме 2 справедливо включение $\{4, 6, 7, \dots, q(n)\} \subset R_n$, где число $q(n)$ определяется по формуле (9).

Следующая лемма дает основные свойства матриц, являющихся r -нецелочисленными вершинами многогранника $M(3, m(r))$.

Лемма 4. Пусть $r \in R_n$. Тогда любая r -нецелочисленная вершина x^0 многогранника $M(3, m(r))$ обладает следующими двумя свойствами:

- (1) каждое двумерное сечение матрицы x^0 содержит по крайней мере две дробных компоненты;

- (2) среди двумерных сечений одной ориентации матрицы x^0 найдется по крайней мере два сечения, каждое из которых имеет по две дробных компоненты.

Доказательство. Если $m(r) = 2$, то справедливость этой леммы вытекает из леммы 1, поскольку $m(4) = 2$. Поэтому будем считать, что $m(r) \geq 3$.

Предположим, что существует r -нецелочисленная вершина x^0 многогранника $M(3, m(r))$, для которой первое свойство не выполняется. Тогда по лемме 1 найдется по крайней мере одна тройка индексов (i_0, j_0, t_0) такая, что $x_{i_0 j_0 t_0}^0 = 1$. Через $\bar{x}^0$ обозначим матрицу, получающуюся из матрицы x^0 вычеркиванием тех трех двумерных сечений, каждое из которых содержит элемент $x_{i_0 j_0 t_0}^0$. Ясно, что матрица $\bar{x}^0$ является r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(I_1, J_1, T_1)$, где

$$I_1 = N_{m(r)} \setminus \{i_0\}, \quad J_1 = N_{m(r)} \setminus \{j_0\}, \quad T_1 = N_{m(r)} \setminus \{t_0\}.$$

Замечая, что многогранники $M(I_1, J_1, T_1)$ и $M(3, m(r) - 1)$ отличаются лишь нумерацией элементов их матриц, получаем, что $\sigma(m(r) - 1, r) > 0$. Но это противоречит выбору числа $m(r)$, чем и завершается доказательство первого свойства.

Допустим теперь, что существует r -нецелочисленная вершина x^0 многогранника $M(3, m(r))$, для которой второе свойство не выполняется. Это означает, что для матрицы x^0 должен выполняться один из следующих случаев:

- (1) среди двумерных сечений одной ориентации матрицы x^0 найдется только одно сечение, содержащее две дробных компоненты;
- (2) каждое двумерное сечение матрицы x^0 содержит по крайней мере 3 дробных компоненты.

Рассмотрим первый случай. С одной стороны, согласно только что установленному первому свойству, справедливо неравенство $r \geq 3(m(r) - 1) + 2$, то есть $r \geq 3m(r) - 1$, а с другой стороны, так как число положительных компонент любой вершины многогранника $M(3, m(r))$ не превосходит $3m(r) - 2$, справедливо неравенство $r \leq 3m(r) - 2$. Полученное противоречие доказывает невозможность первого случая.

Невозможность второго случая доказывается аналогично. Лемма 4 доказана.

Поскольку число нецелочисленных двумерных сечений одной ориентации любой матрицы x , представляющей собой r -нецелочисленную вершину многогранника $M(3, n)$, где $n \geq m(r)$, не меньше $m(r)$ (см. леммы 2 и 4), а всякая вершина многогранника $M(3, m(r))$ содержит не более, чем $3m(r) - 2$ положительных компонент, на основании леммы 1 получаем следующий результат.

Теорема 3. Пусть $r = 2m(r) + q$, где $q \in \{0, 1, \dots, m(r) - 2\}$. Для того чтобы матрица x была r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$, $n \geq m(r)$, необходимо, чтобы каждое нецелочисленное двумерное сечение матрицы x содержало не менее двух и не более, чем $q + 2$ положительных компонент. Кроме того, если $q \geq 1$ и среди нецелочисленных двумерных сечений одной ориентации матрицы x существует сечение, содержащее $q + 2$ положительных компонент, то оно единственно в этой ориентации.

В качестве следствий из теоремы 3 укажем характеристические свойства r -нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, $n \geq m(r)$, где $r = 2m(r) + q$, $q = 0, 1, 2, 3, 4$.

Следствие 2. Пусть $r = 2m(r)$, $n \geq m(r)$. Для того чтобы матрица x была r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$, необходимо, чтобы $I(x) = J(x) = T(x) = m(r)$, причем каждое нецелочисленное двумерное сечение матрицы x содержало только две положительные компоненты.

Следствие 3. Пусть $r = 2m(r) + 1$, $n \geq m(r)$. Для того чтобы матрица x была r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$, необходимо, чтобы $I(x) = J(x) = T(x) = m(r)$, причем среди нецелочисленных двумерных сечений одной ориентации матрицы x имеется только одно сечение, содержащее 3 положительные компоненты, а остальные сечения содержат по две положительные компоненты.

Следствие 4. Пусть $r = 2m(r) + 2$, $n \geq m(r)$. Для того чтобы матрица x была r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$, необходимо, чтобы выполнялось одно из условий:

- (1) $I(x) = J(x) = T(x) = m(r) + 1$ при $n \geq m(r) + 1$, причем каждое нецелочисленное двумерное сечение матрицы x содержит только две положительные компоненты;
- (2) $I(x) = J(x) = T(x) = m(r)$, причем среди нецелочисленных двумерных сечений одной ориентации матрицы x имеется либо два сечения, каждое из которых содержит 3 положительные компоненты, либо одно сечение, содержащее 4 положительные компоненты.

Следствие 5. Пусть $r = 2m(r) + 3$, $n \geq m(r)$. Для того чтобы матрица x была r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$, необходимо, чтобы выполнялось одно из условий:

- (1) $I(x) = J(x) = T(x) = m(r) + 1$ при $n \geq m(r) + 1$, причем среди нецелочисленных двумерных сечений одной ориентации матрицы x имеется только одно сечение, содержащее 3 положительные компоненты;
- (2) $I(x) = J(x) = T(x) = m(r)$, причем среди нецелочисленных двумерных сечений одной ориентации матрицы x имеется либо три сечения, каждое из которых содержит 3 положительные компоненты, либо одно сечение, содержащее 5 положительных компонент, либо два сечения, одно из которых содержит 4, а другое 3 положительные компоненты.

Следствие 6. Пусть $r = 2m(r) + 4$, $n \geq m(r)$. Для того чтобы матрица x была r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$, необходимо, чтобы выполнялось одно из условий:

- (1) $I(x) = J(x) = T(x) = m(r) + 2$ при $n \geq m(r) + 2$, причем каждое нецелочисленное двумерное сечение матрицы x содержит только две положительные компоненты;
- (2) $I(x) = J(x) = T(x) = m(r) + 1$ при $n \geq m(r) + 1$, причем среди нецелочисленных двумерных сечений одной ориентации матрицы x имеется либо одно сечение, содержащее 4 положительные компоненты, либо два сечения, каждое из которых содержит 3 положительные компоненты;

- (3) $I(x) = J(x) = T(x) = m(r)$, причем среди нецелочисленных двумерных сечений одной ориентации матрицы x имеется либо два сечения, каждое из которых содержит 4 положительные компоненты, либо одно сечение, содержащее 6 положительных компонент, либо два сечения, одно из которых содержит 3, а другое 5 положительных компонент, либо три сечения, два из которых содержат по 3, а одно 4 положительные компоненты, либо четыре сечения, каждое из которых содержит 3 положительные компоненты.

Следующие два примера показывают, что не всякая матрица x^0 многогранника $M(3, n)$, удовлетворяющая условиям следствий 2 и 3, является его вершиной.

Пример 1. Пусть $r = 6$, $n = 3$. Рассмотрим матрицу x^0 с элементами

$$x_{ijt}^0 = \begin{cases} 1/2, & \text{если } (i, j, t) \in \{(3, 1, 1), (1, 3, 1), (3, 2, 2), (2, 3, 2), (2, 1, 3), (1, 2, 3)\}, \\ 0 & \text{для остальных } (i, j, t) \in N_3^3. \end{cases}$$

Очевидно, что $x^0 \in M(3, 3)$. Хотя каждое двумерное сечение этой матрицы содержит по две компоненты, равные $1/2$, однако уравнение

$$\alpha_1 R_{311} + \alpha_2 R_{131} + \alpha_3 R_{322} + \alpha_4 R_{232} + \alpha_5 R_{213} + \alpha_6 R_{123} = 0$$

имеет решение $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_6 = -1$. Поэтому векторы R_{311} , R_{131} , R_{322} , R_{232} , R_{213} и R_{123} являются линейно зависимыми и, значит, матрица x^0 не является вершиной многогранника $M(3, 3)$.

Пример 2. Пусть $r = 7$, $n = 3$. Рассмотрим матрицу $x^0 \in M(3, 3)$ с элементами

$$\begin{aligned} x_{321}^0 &= 5/9, & x_{231}^0 &= 4/9, & x_{232}^0 &= 1/9, & x_{112}^0 &= 8/9, \\ x_{333}^0 &= 4/9, & x_{223}^0 &= 4/9, & x_{113}^0 &= 1/9 \end{aligned}$$

и $x_{ijt}^0 = 0$ для остальных $(i, j, t) \in N_3^3$. Несмотря на то, что среди двумерных сечений одной ориентации матрицы x^0 имеется только одно сечение, содержащее 3 положительные компоненты, а остальные сечения содержат по две положительные компоненты, уравнение

$$\alpha_1 R_{321} + \alpha_2 R_{231} + \alpha_3 R_{232} + \alpha_4 R_{112} + \alpha_5 R_{333} + \alpha_6 R_{223} + \alpha_7 R_{113} = 0$$

имеет решение

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_6 = 1, \quad \alpha_3 = \alpha_7 = -2, \quad \alpha_4 = 2.$$

Значит, матрица x^0 не является вершиной многогранника $M(3, 3)$.

4. Комбинаторные свойства r -нецелочисленных вершин

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Для любых натуральных чисел $n \geq 3$ и $r \in R_{n-1}$ справедливо неравенство

$$\sigma(n, r) \geq \binom{n}{m(r)}^3 ((n - m(r))!)^2 \sigma(m(r), r), \quad (10)$$

причем равенство достигается в случае, когда $r \in \{2m(r), 2m(r) + 1\}$.

Доказательство. Пусть r — произвольное число из R_{n-1} , а I_1, J_1, T_1 — некоторые подмножества (возможно, совпадающие) мощности $m(r)$ множества N_n . Положим

$$I_2 = N_n \setminus I_1, \quad J_2 = N_n \setminus J_1, \quad T_2 = N_n \setminus T_1.$$

Так как $m(r) \leq n - 1$, то $I_2 \neq \emptyset$, $J_2 \neq \emptyset$, $T_2 \neq \emptyset$. Из неравенства $\sigma(m(r), r) > 0$ следует, что многогранник $M(I_1, J_1, T_1)$ (см. замечание 1) имеет r -нецелочисленные вершины. Пусть $y^1 = \|y_{ijt}^1\|_{I_1 \times J_1 \times T_1}$ — некоторая r -нецелочисленная вершина многогранника $M(I_1, J_1, T_1)$, а $y^2 = \|y_{ijt}^2\|_{I_2 \times J_2 \times T_2}$ — некоторая целочисленная вершина многогранника $M(I_2, J_2, T_2)$. Тогда согласно лемме 2 матрица x^0 , элементы которой определяются по формуле (8), является r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

В силу замечания 1 очевидны равенства

$$f_0^z(M(I_2, J_2, T_2)) = f_0^z(M(3, n - m(r))), \quad (11)$$

$$\sigma'(m(r), r) = \sigma(m(r), r), \quad (12)$$

где $\sigma'(m(r), r)$ — число всех r -нецелочисленных вершин многогранника $M(I_1, J_1, T_1)$. Из (11) и (7) вытекает равенство

$$f_0^z(M(I_2, J_2, T_2)) = ((n - m(r))!)^2. \quad (13)$$

Так как каждое двумерное сечение матрицы y^2 содержит только одну положительную компоненту и она равна 1, а из первого свойства леммы 4 следует, что каждое двумерное сечение матрицы y^1 содержит p дробных компонент, где $p \geq 2$, получаем, что среди положительных элементов двух матриц y^1 и y^2 не может быть равных. Поэтому каждый выбор новой тройки подмножеств (I_1, J_1, T_1) , задающих многогранник $M(I_1, J_1, T_1)$, приводит к получению различных r -нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$. Отсюда, приняв во внимание тот факт, что в качестве подмножества I_1 могут быть взяты любые $m(r)$ элементов из множества N_n (число способов выбора $m(r)$ элементного подмножества из множества N_n равно $\binom{n}{m(r)}$) и, следовательно, декартово произведение трех таких подмножеств можно образовать $\binom{n}{m(r)}^3$ способами, получаем, что тройку подмножеств (I_1, J_1, T_1) можно выбрать $\binom{n}{m(r)}^3$ способами. Учитывая, далее, равенства (12) и (13), приходим к неравенству (10).

Пусть теперь $r \in \{2m(r), 2m(r) + 1\}$. Предположим, что для выбранного r имеет место строгое неравенство в (10). Тогда у многогранника $M(3, n)$ должна найтись

r -нецелочисленная вершина x^0 , положительные компоненты которой расположены в p двумерных сечениях одной ориентации, где $p \geq m(r) + 1$. Отсюда, с учетом первого свойства леммы 1, приходим к неравенству $r \geq 2(m(r) + 1)$, что невозможно. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 непосредственно получаем следующее утверждение.

Следствие 7. Для числа $f_0^u(M(3, n))$ нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, $n \geq 3$, справедливо неравенство

$$f_0^u(M(3, n)) \geq \sum_{r \in R_n} \binom{n}{m(r)}^3 ((n - m(r))!)^2 \sigma(m(r), r).$$

Теорема 5. Пусть n, r, r_1 и r_2 — натуральные числа такие, что

$$r = r_1 + r_2, \quad r_1 \geq 4, \quad r_2 \geq 4, \quad n = m(r_1) + m(r_2). \quad (14)$$

Тогда

$$\sigma(n, r) \geq \binom{n}{m(r_1)}^2 \sigma(m(r_1), r_1) \sigma(m(r_2), r_2). \quad (15)$$

Доказательство. Пусть натуральные числа n, r, r_1 и r_2 удовлетворяют условиям (14), а I_1, J_1, T_1 — некоторые подмножества (возможно, совпадающие) мощности $m(r_1)$ множества N_n . Положим

$$I_2 = N_n \setminus I_1, \quad J_2 = N_n \setminus J_1, \quad T_2 = N_n \setminus T_1.$$

Так как

$$n = m(r_1) + m(r_2), \quad m(r_1) \geq 2, \quad m(r_2) \geq 2,$$

то $I_2 \neq \emptyset, J_2 \neq \emptyset, T_2 \neq \emptyset$. В силу замечания 1 для любого $s = 1, 2$ многогранник $M(I_s, J_s, T_s)$ имеет r_s -нецелочисленные вершины. Пусть y^s — некоторая r_s -нецелочисленная вершина многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$, $s = 1, 2$. Тогда согласно лемме 2 матрица x^0 , элементы которой определяются по формуле (8), является r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

Обозначив через $\sigma'(m(r_s), r_s)$ число всех r_s -нецелочисленных вершин многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$, $s = 1, 2$, на основании замечания 1 заключаем, что

$$\sigma'(m(r_s), r_s) = \sigma(m(r_s), r_s), \quad s = 1, 2. \quad (16)$$

Выберем подмножества I'_1 и J'_1 множества N_n так, чтобы

$$|I'_1| = |J'_1| = m(r_1), \quad I'_1 \times J'_1 \neq I_1 \times J_1.$$

Наряду с многогранниками $M(I_s, J_s, T_s)$, $s = 1, 2$, рассмотрим и многогранники $M(I'_s, J'_s, T'_s)$, $s = 1, 2$, где

$$I'_2 = N_n \setminus I'_1, \quad J'_2 = N_n \setminus J'_1, \quad T'_s = T_s.$$

Если $\bar{y}^s = \|\bar{y}_{ijt}^s\|_{I'_s \times J'_s \times T'_s}$ — некоторая r_s -нецелочисленная вершина многогранника $M(I'_s, J'_s, T'_s)$, $s = 1, 2$, то по лемме 2 матрица $\bar{x}^0$ с элементами

$$\bar{x}_{ijt}^0 = \begin{cases} \bar{y}_{ijt}^s, & \text{если } (i, j, t) \in I'_s \times J'_s \times T'_s, \quad s = 1, 2, \\ 0 & \text{для остальных } (i, j, t) \in N_n^3 \end{cases}$$

является r -нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$. Поскольку $\bar{y}^s \neq y^s$, $s = 1, 2$, то $\bar{x}^0 \neq x^0$. Следовательно, каждый выбор новой пары подмножеств (I'_1, J'_1) , где $I'_1 \subset N_n$, $J'_1 \subset N_n$, $|I'_1| = |J'_1| = m(r_1)$, приводит к получению различных r -нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$. Отсюда, учитывая, что пару подмножеств (I'_1, J'_1) , для которой $I'_1 \subset N_n$, $J'_1 \subset N_n$, $|I'_1| = |J'_1| = m(r_1)$, можно выбрать $\binom{n}{m(r_1)}^2$ способами, в силу равенств (16) получаем неравенство (15). Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть натуральные числа n, r, r_1 и r_2 удовлетворяют условиям (14) и $r_1 \neq r_2$. Если любая пара матриц y^1 и y^2 , представляющих собой r_1 - и r_2 -нецелочисленные вершины многогранников $M(3, m(r_1))$ и $M(3, m(r_2))$ соответственно, не имеет равных положительных элементов, то

$$\sigma(n, r) \geq \binom{n}{m(r_1)}^3 \sigma(m(r_1), r_1) \sigma(m(r_2), r_2).$$

Доказательство этой теоремы проводится таким же образом, как и доказательство теоремы 5. Различие состоит лишь в том, что теперь тройку подмножеств (I_1, J_1, T_1) , где $I_1 \subset N_n$, $J_1 \subset N_n$, $T_1 \subset N_n$, $|I_1| = |J_1| = |T_1| = m(r_1)$, задающих многогранник $M(I_1, J_1, T_1)$, можно выбрать $\binom{n}{m(r_1)}^3$ способами.

Следующие четыре теоремы приведем без доказательства, так как идея доказательства та же, что и в доказательстве теорем 4–6.

Теорема 7. Пусть натуральные числа n, m, r, r_1 и r_2 удовлетворяют условиям

$$r = r_1 + r_2, \quad r_1 \geq 4, \quad r_2 \geq 4, \quad m = m(r_1) + m(r_2), \quad n > m. \quad (17)$$

Тогда

$$\sigma(n, r) \geq \binom{n}{m}^3 ((n - m)!)^2 \binom{m}{m(r_1)}^2 \sigma(m(r_1), r_1) \sigma(m(r_2), r_2).$$

Теорема 8. Пусть натуральные числа n, m, r, r_1 и r_2 удовлетворяют условиям (17) и $r_1 \neq r_2$. Если любая пара матриц y^1 и y^2 , представляющих собой r_1 - и r_2 -нецелочисленные вершины многогранников $M(3, m(r_1))$ и $M(3, m(r_2))$ соответственно, не имеет равных положительных элементов, то

$$\sigma(n, r) \geq \binom{n}{m}^3 ((n - m)!)^2 \binom{m}{m(r_1)}^3 \sigma(m(r_1), r_1) \sigma(m(r_2), r_2).$$

Теорема 9. Пусть натуральные числа n, m, r, r_1 и r_2 удовлетворяют условиям (17) и $m = m(r) + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma(n, r) \geq \binom{n}{m-1}^3 ((n - m + 1)!)^2 \sigma(m - 1, r) \\ + \binom{n}{m}^3 ((n - m)!)^2 \binom{m}{m(r_1)}^2 \sigma(m(r_1), r_1) \sigma(m(r_2), r_2). \end{aligned}$$

Теорема 10. Пусть натуральные числа n, m, r, r_1 и r_2 удовлетворяют условиям (17) и

$$m = m(r) + 1, \quad r_1 \neq r_2.$$

Если любая пара матриц y^1 и y^2 , представляющих собой r_1 - и r_2 -нецелочисленные вершины многогранников $M(3, m(r_1))$ и $M(3, m(r_2))$ соответственно, не имеет равных положительных элементов, то

$$\begin{aligned} \sigma(n, r) \geq \binom{n}{m-1}^3 ((n-m+1)!)^2 \sigma(m-1, r) \\ + \binom{n}{m}^3 ((n-m)!)^2 \binom{m}{m(r_1)}^3 \sigma(m(r_1), r_1) \sigma(m(r_2), r_2). \end{aligned}$$

5. Формулы для чисел r -нецелочисленных вершин некоторых классов

Так как $m(4) = 2, m(6) = 3, m(7) = 3, m(8) = 4, m(9) = 4, m(11) = 5$ (см. доказательство теоремы 2), в силу теоремы 4 справедливы следующие формулы:

$$\sigma(n, 4) = \binom{n}{2}^3 ((n-2)!)^2 \sigma(2, 4), \quad n > 2, \quad (18)$$

$$\sigma(n, 6) = \binom{n}{3}^3 ((n-3)!)^2 \sigma(3, 6), \quad n > 3, \quad (19)$$

$$\sigma(n, 7) = \binom{n}{3}^3 ((n-3)!)^2 \sigma(3, 7), \quad n > 3,$$

$$\sigma(n, 8) = \binom{n}{4}^3 ((n-4)!)^2 \sigma(4, 8), \quad n > 4,$$

$$\sigma(n, 9) = \binom{n}{4}^3 ((n-4)!)^2 \sigma(4, 9), \quad n > 4,$$

$$\sigma(n, 11) = \binom{n}{5}^3 ((n-5)!)^2 \sigma(5, 11), \quad n > 5.$$

Теорема 11. Справедливы равенства

$$\sigma(n, 4) = (n!)^2 \frac{n(n-1)}{4}, \quad n \geq 2.$$

Доказательство. В силу формулы (18) для доказательства этой теоремы достаточно показать, что $\sigma(2, 4) = 2$.

Пусть

$$y = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

где $0 < \alpha < 1$. Ясно, что $y \in M(2, 2)$. Рассмотрим многогранник $M(z^+(y), e)$ порядка 4×2 , определенный векторами

$$z^+(y) = (\alpha_{(1,1)}, 1 - \alpha_{(1,2)}, 1 - \alpha_{(2,1)}, \alpha_{(2,2)}), \quad e = (1, 1).$$

Легко видеть, что

$$\text{Ver } M(z^+(y), e) = \begin{cases} \{g^l(y) : l \in N_6\}, & \text{если } \alpha = 1/2, \\ \{g^l(y) : l \in N_9 \setminus \{5\}\}, & \text{если } 0 < \alpha < 1/2, \\ \{g^l(y) : l \in N_{12} \setminus \{6, 7, 8, 9\}\}, & \text{если } 1/2 < \alpha < 1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
 g^1(y) &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, & g^2(y) &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \\
 g^3(y) &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, & g^4(y) &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \\
 g^5(y) &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 2\alpha-1 \end{pmatrix}, & g^6(y) &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 1-2\alpha \\ 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \\
 g^7(y) &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1-2\alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, & g^8(y) &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \\ 1-2\alpha & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \\
 g^9(y) &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, & g^{10}(y) &= \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2\alpha-1 \\ 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1-\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \\
 g^{11}(y) &= \begin{pmatrix} 2\alpha-1 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, & g^{12}(y) &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & 0 \\ 2\alpha-1 & 1-\alpha \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Здесь 1-я, 2-я, 3-я и 4-я строки матрицы $g^l(y)$ занумерованы соответственно парами (1,1), (1,2), (2,1) и (2,2).

Прежде всего заметим, что при $\alpha = 1/2$ верны равенства

$$g^5(y) = g^7(y) = g^8(y) = g^{10}(y), \quad g^6(y) = g^9(y) = g^{11}(y) = g^{12}(y).$$

Очевидно, что при $\alpha = 1/2$ матрица $x(g^5(y))$, построенная на основе матрицы $g^5(y)$ согласно правилу (5), является вершиной многогранника $M(3, 2)$. Точно так же, как была доказана принадлежность матрицы x^1 (см. доказательство теоремы 2) к множеству вершин многогранника $M(3, 2)$, можно доказать, что матрица $x(g^6(y))$, построенная на основе матрицы $g^6(y)$, при $\alpha = 1/2$ является вершиной многогранника $M(3, 2)$. Так как уравнение

$$\alpha_1 R_{111} + \alpha_2 R_{121} + \alpha_3 R_{212} + \alpha_4 R_{222} = 0$$

имеет решение $\alpha_1 = \alpha_4 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$, матрица $x(g^1(y))$, построенная на основе матрицы $g^1(y)$, не является вершиной многогранника $M(3, 2)$. Действуя таким же образом, приходим к заключению, что любая матрица $x(g^l(y))$, $l = 2, 3, 4$, построенная на основе матрицы $g^l(y)$, не является вершиной многогранника $M(3, 2)$.

Матрицы $g^7(y)$, $g^8(y)$, $g^9(y)$, $g^{10}(y)$, $g^{11}(y)$ и $g^{12}(y)$ при $\alpha \neq 1/2$ не являются вершинами многогранника $M(3, 2)$, поскольку содержат 5 положительных компонент.

Таким образом, $\sigma(2, 4) = 2$. Теорема 11 доказана.

Совокупность элементов матрицы $x = \|x_{ijt}\|_n$ с фиксированными значениями двух индексов, например, i и j , будем называть одномерным сечением ориентации t матрицы x . Одномерное сечение матрицы x назовем нецелочисленным, если оно содержит хотя бы одну дробную компоненту.

Из доказательства теоремы 11 вытекают два следствия.

Следствие 8. Матрица x многогранника $M(3, n)$, имеющая 4 дробные компоненты, является его 4-нецелочисленной вершиной тогда и только тогда, когда каждое нецелочисленное одномерное сечение матрицы x содержит лишь одну такую компоненту.

Следствие 9. Все дробные компоненты каждой 4-нецелочисленной вершины многогранника $M(3, n)$ равны $1/2$.

Теорема 12. Справедливы неравенства

$$\sigma(n, 6) = 2(n!)^2 n(n-1)(n-2), \quad n \geq 3.$$

Доказательство. В силу формулы (19) для доказательства этой теоремы достаточно показать, что

$$\sigma(3, 6) = 432. \quad (20)$$

Применяя формулу (6) к многограннику $M(3, 3)$, получим, что

$$M(3, 3) = \{x(g(y)) : y \in M(2, 3), g(y) \in M(z^+(y), e)\},$$

где $e = (1, 1, 1)$. Поскольку у многогранника $M(2, 3)$ не существует матриц, содержащих 1, 2, 3 и 5 дробных компонент, то для доказательства равенства (20) достаточно рассмотреть все возможные матрицы y многогранника $M(2, 3)$, имеющие $h(y)$ дробных компонент, где $h(y) = 4, 6$, и найти все те вершины многогранника $M(z^+(y), e)$, на основе которых можно построить 6-нецелочисленные вершины многогранника $M(3, 3)$.

Пусть $h(y) = 6$, где $y \in M(2, 3)$. Рассмотрим некоторую матрицу

$$y = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 + \alpha_6 = 1, \quad \alpha_1 + \alpha_5 = 1, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 + \alpha_6 = 1, \quad 0 < \alpha_l < 1, \quad l \in N_6. \end{aligned} \quad (21)$$

Ясно, что $y \in M(2, 3)$. Из (21) вытекает, что

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_6 = \alpha, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1 - \alpha,$$

где $0 < \alpha < 1$. Поэтому матрицу y можно записать в виде

$$y = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (22)$$

где $0 < \alpha < 1$.

Пусть $\alpha \neq 1/2$. Рассмотрим многогранник $M(z^+(y), e)$ порядка 6×3 , определенный векторами

$$z^+(y) = (\alpha_{(1,1)}, 1 - \alpha_{(1,2)}, \alpha_{(2,2)}, 1 - \alpha_{(2,3)}, 1 - \alpha_{(3,1)}, \alpha_{(3,3)}), \quad e = (1, 1, 1).$$

Очевидно, что $\text{Ver } M(z^+(y), e) = V(y) \cup W(y)$, где $V(y)$ — множество всех тех вершин многогранника $M(z^+(y), e)$, для каждой из которых число положительных компонент больше 6, $W(y)$ — множество всех тех вершин многогранника $M(z^+(y), e)$, для каждой из которых число положительных компонент равно 6.

Ясно, что любая матрица, построенная на основе матрицы многогранника $M(z^+(y), e)$, принадлежащей множеству $V(y)$, не является 6-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, 3)$.

Легко видеть, что любую матрицу $x(g(y))$ многогранника $M(3, 3)$, построенную на основе матрицы $g(y) \in W(y)$, можно представить в виде выпуклой комбинации

$$x(g(y)) = \alpha x' + (1 - \alpha) x''$$

двух различных матриц $x' = \|x'_{ijt}\|_3$ и $x'' = \|x''_{ijt}\|_3$ многогранника $M(3, 3)$ с элементами

$$x'_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j, t) \in \{(1, 1, t_1), (2, 2, t_2), (3, 3, t_3)\}, \\ 0 & \text{для остальных } (i, j, t) \in N_3^3, \end{cases},$$

$$x''_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j, t) \in \{(1, 2, t'_1), (2, 3, t'_2), (3, 1, t'_3)\}, \\ 0 & \text{для остальных } (i, j, t) \in N_3^3. \end{cases}$$

Здесь t_1, t_2, t_3 — номера столбцов матрицы $g(y)$, для которых

$$g_{(1,1),t_1}^y = \alpha, \quad g_{(2,2),t_2}^y = \alpha, \quad g_{(3,3),t_3}^y = \alpha,$$

а t'_1, t'_2, t'_3 — номера столбцов матрицы $g(y)$, для которых

$$g_{(1,2),t'_1}^y = 1 - \alpha, \quad g_{(2,3),t'_2}^y = 1 - \alpha, \quad g_{(3,1),t'_3}^y = 1 - \alpha.$$

Значит, любая такая матрица $x(g(y))$ многогранника $M(3, 3)$ не является его вершиной. Поскольку любую матрицу многогранника $M(2, 3)$, содержащую 6 дробных компонент, путем перестановки ее строк и столбцов можно привести к матрице вида (22), повторяя рассуждения, приведенные для матрицы y , можно заключить, что всякая матрица $x(g(y))$, построенная на основе матрицы

$$g(y) \in \bigcup_{y \in G_1} W(y),$$

где $G_1 = \{y \in M(2, 3) : h(y) = 6\}$, не является вершиной многогранника $M(3, 3)$.

Пусть теперь $\alpha = 1/2$. В этом случае всякая вершина многогранника $M(z^+(y), e)$, заданного векторами

$$z^+(y) = (1/2_{(1,1)}, 1/2_{(1,2)}, 1/2_{(2,2)}, 1/2_{(2,3)}, 1/2_{(3,1)}, 1/2_{(3,3)}), \quad e = (1, 1, 1),$$

в каждом столбце содержит только две положительные компоненты, причем каждая из них равна $1/2$. Поэтому множество вершин многогранника $M(z^+(y), e)$ можно разбить на два непересекающихся подмножества:

$$\text{Ver } M(z^+(y), e) = V(y) \cup W(y),$$

где $V(y)$ — множество всех тех вершин многогранника $M(z^+(y), e)$, для каждой из которых существует единственный индекс $t \in N_3$ такой, что среди компонент $g_{(1,2),t}^y$, $g_{(2,3),t}^y$, $g_{(3,1),t}^y$ имеется только одна компонента, равная $1/2$; $W(y)$ — множество всех тех вершин многогранника $M(z^+(y), e)$, для каждой из которых для любого $t \in N_3$ среди компонент $g_{(1,2),t}^y$, $g_{(2,3),t}^y$, $g_{(3,1),t}^y$ имеется только одна компонента, равная $1/2$.

Поскольку все компоненты вектора e равны 1, для любых индексов $t_1 \in N_3$, $t_2 \in N_3 \setminus \{t_1\}$ и любых пар

$$(i_1, j_1) \in Q_1(y) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\},$$

$$(i_2, j_2) \in Q_2(y) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

матрица $g(y) \in M(z^+(y), e)$ с элементами

$$\begin{aligned} g_{(i_1, j_1), t_1}^y &= 1/2, & g_{(i_2, j_2), t_1}^y &= 1/2, \\ g_{(i, j), t_2}^y &= 1/2, & (i, j) \in Q_1(y) \setminus \{(i_1, j_1)\}, \\ g_{(i, j), t_3}^y &= 1/2, & (i, j) \in Q_2(y) \setminus \{(i_2, j_2)\}, \\ g_{(i, j), t}^y &= 0 & \text{для остальных индексов,} \end{aligned}$$

где $\{t_3\} = N_3 \setminus \{t_1, t_2\}$, является вершиной многогранника $M(z^+(y), e)$ и принадлежит множеству $V(y)$. Поэтому справедливо равенство

$$|V(y)| = 54. \quad (23)$$

Рассмотрим вершину $\bar{g}(y) = \|\bar{g}_{(i,j),t}^y\|_{6 \times 3} \in V(y)$ с ненулевыми компонентами

$$\begin{aligned} \bar{g}_{(i,j),1}^y &= 1/2, & (i, j) \in \{(1, 1), (2, 2)\}, \\ \bar{g}_{(i,j),2}^y &= 1/2, & (i, j) \in \{(3, 3), (1, 2)\}, \\ \bar{g}_{(i,j),3}^y &= 1/2, & (i, j) \in \{(2, 3), (3, 1)\}. \end{aligned}$$

Так как уравнение

$$\alpha_1 R_{111} + \alpha_2 R_{221} + \alpha_3 R_{332} + \alpha_4 R_{122} + \alpha_5 R_{233} + \alpha_6 R_{313} = 0$$

имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$, матрица $x(\bar{g}(y))$, построенная на основе матрицы $\bar{g}(y)$, является 6-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, 3)$. Поскольку любая вершина $g(y)$ множества $V(y)$ путем перестановки ее столбцов и строк, принадлежащих множествам $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$ (перестановка строки $(i_1, j_1) \in Q_1(y)$ со строкой $(i_2, j_2) \in Q_2(y)$ не допускается), может быть приведена к вершине $\bar{g}(y)$, любая матрица $x(g(y))$, построенная на основе матрицы $g(y) \in V(y)$, является 6-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, 3)$. Отсюда, учитывая равенство (23), находим, что

$$|\{x(g(y)): g(y) \in V(y)\} \cap \text{Ver } M(3, 3)| = 54. \quad (24)$$

Положим

$$G_2 = \{y^1, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6\}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} y^1 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, & y^2 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \\ y^3 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, & y^4 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \\ y^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, & y^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как любую матрицу $w \in G_2$ путем перестановки ее столбцов можно привести к матрице y (в этих обозначениях к матрице y^1), то на основании (24) получаем соотношение

$$|\{x(g(w)): g(w) \in V(w)\} \cap \text{Ver } M(3, 3)| = 54, \quad w \in G_2. \quad (26)$$

Очевидно, что, как и при $\alpha \neq 1/2$, любую матрицу $x(g(y))$ многогранника $M(3, 3)$, построенную на основе матрицы $g(y)$ многогранника $M(z^+(y), e)$, принадлежащей множеству $W(y)$, можно представить в виде выпуклой комбинации двух различных точек x' и x'' многогранника $M(3, 3)$. Поэтому

$$\{x(g(w)): g(w) \in W(w)\} \cap \text{Ver } M(3, 3) = \emptyset, \quad w \in G_2. \quad (27)$$

Рассмотрим теперь второй случай. Пусть $h(y) = 4$, где $y \in M(2, 3)$. Рассмотрим матрицу

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad (28)$$

многогранника $M(2, 3)$, где $0 < \alpha < 1$.

Пусть $\alpha \neq 1/2$. Рассмотрим многогранник $M(z^+(y), e)$ порядка 5×3 , определенный векторами

$$z^+(y) = (1_{(1,1)}, \alpha_{(2,2)}, 1 - \alpha_{(2,3)}, 1 - \alpha_{(3,2)}, \alpha_{(3,3)}), \quad e = (1, 1, 1).$$

Очевидно, что

$$\text{Ver } M(z^+(y), e) = V(y) \cup W(y),$$

где $V(y)$ — множество всех тех вершин многогранника $M(z^+(y), e)$, каждая из которых имеет 5 или 7 положительных компонент; $W(y)$ — множество всех тех вершин многогранника $M(z^+(y), e)$, каждая из которых имеет 6 положительных компонент.

Понятно, что любая матрица, построенная на основе матрицы из множества $V(y)$, не является 6-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, 3)$.

Легко видеть, что любую матрицу $x(g(y))$ многогранника $M(3, 3)$, построенную на основе матрицы $g(y) \in W(y)$, можно представить в виде выпуклой комбинации

$$x(g(y)) = (1 - \alpha)x' + \alpha x''$$

двух различных матриц $x' = \|x'_{ijt}\|_3$ и $x'' = \|x''_{ijt}\|_3$ многогранника $M(3, 3)$ с элементами

$$x'_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j, t) \in \{(1, 1, t_1), (2, 3, t_2), (3, 2, t_3)\}, \\ 0 & \text{для остальных } (i, j, t) \in N_3^3, \end{cases}$$

$$x''_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j, t) \in \{(1, 1, t'_1), (2, 2, t'_2), (3, 3, t'_3)\}, \\ 0 & \text{для остальных } (i, j, t) \in N_3^3. \end{cases}$$

Здесь t_1, t_2, t_3 — номера столбцов матрицы $g(y)$, для которых

$$g_{(1,1),t_1}^y = 1 - \alpha, \quad g_{(2,3),t_2}^y = 1 - \alpha, \quad g_{(3,2),t_3}^y = 1 - \alpha,$$

а t'_1, t'_2, t'_3 — номера столбцов матрицы $g(y)$, для которых

$$g_{(1,1),t'_1}^y = \alpha, \quad g_{(2,2),t'_2}^y = \alpha, \quad g_{(3,3),t'_3}^y = \alpha.$$

Значит, любая такая матрица $x(g(y))$ многогранника $M(3, 3)$ не является его вершиной. Поскольку любую матрицу многогранника $M(2, 3)$, содержащую 4 дробные компоненты, путем перестановки ее строк и столбцов можно привести к матрице вида (28), повторяя рассуждения, приведенные для матрицы y , можно прийти к выводу, что всякая матрица $x(g(y))$, построенная на основе матрицы

$$g(y) \in \bigcup_{y \in G_1} W(y),$$

где $G_1 = \{y \in M(2, 3): h(y) = 4\}$, не является вершиной многогранника $M(3, 3)$.

Пусть теперь $\alpha = 1/2$. В этом случае всякая вершина многогранника $M(z^+(y), e)$, где

$$z^+(y) = (1_{(1,1)}, 1/2_{(2,2)}, 1/2_{(3,3)}, 1/2_{(2,3)}, 1/2_{(3,2)}), \quad e = (1, 1, 1),$$

имеющая 6 положительных компонент, в каждом столбце содержит только две положительные компоненты, причем каждая из них равна $1/2$.

Пусть $V(y)$ — множество всех тех вершин многогранника $M(z^+(y), e)$, для каждой из которых существует единственный индекс $t \in N_3$ такой, что либо $g_{(2,2),t}^y = g_{(3,3),t}^y = 1/2$, либо $g_{(2,3),t}^y = g_{(3,2),t}^y = 1/2$.

Легко видеть, что $V(y) = \{g^l(y) : l \in N_{12}\}$, где

$$\begin{aligned}
 g^1(y) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, & g^2(y) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \\
 g^3(y) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, & g^4(y) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \\
 g^5(y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & g^6(y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 g^7(y) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, & g^8(y) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 g^9(y) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, & g^{10}(y) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 g^{11}(y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, & g^{12}(y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Здесь 1-я, 2-я, 3-я, 4-я и 5-я строки матрицы $g^l(y)$ занумерованы соответственно парами (1,1), (2,2), (3,3), (2,3) и (3,2).

Нетрудно проверить, что любая матрица $x(g(y))$, построенная на основе матрицы $g(y) \in V(y)$ согласно правилу (5), является 6-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, 3)$, то есть справедливо равенство

$$|\{x(g(y)) : g(y) \in V(y)\} \cap \text{Ver } M(3, 3)| = 12. \quad (29)$$

Положим

$$G_2 = \{y^s : s \in N_9\}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}
 y^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, & y^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \\
 y^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, & y^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \\
 y^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & y^6 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 y^7 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & y^8 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \\
 y^9 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Так как любую матрицу $w \in G_2$ путем перестановки ее столбцов можно привести к матрице y (в этих обозначениях к матрице y^2), то на основании (29) получаем соотношение

$$|\{x(g(w)): g(w) \in V(w)\} \cap \text{Ver } M(3, 3)| = 12, \quad w \in G_2. \quad (31)$$

Пусть $W(y)$ — множество всех тех вершин многогранника $M(z^+(y), e)$, каждая из которых содержит 6 положительных компонент и не принадлежит множеству $V(y)$.

Очевидно, что так же, как и при $\alpha \neq 1/2$, любую матрицу $x(g(y))$ многогранника $M(3, 3)$, построенную на основе матрицы $g(y)$ многогранника $M(z^+(y), e)$, принадлежащей множеству $W(y)$, можно представить в виде выпуклой комбинации двух различных точек x' и x'' многогранника $M(3, 3)$. Поэтому

$$\{x(g(w)): g(w) \in W(w)\} \cap \text{Ver } M(3, 3) = \emptyset, \quad w \in G_2. \quad (32)$$

Таким образом, на основании равенств (25)–(27), (30)–(32) получаем равенство (20). Теорема 12 доказана.

Из доказательства теоремы 12 вытекает следующее утверждение.

Следствие 10. Все дробные компоненты каждой 6-нецелочисленной вершины многогранника $M(3, n)$ равны $1/2$.

В [3] сформулирована следующая гипотеза: для всякого p -индексного аксиального транспортного многогранника

$$M(a^1, \dots, a^p) = \left\{ x = \|x_{i_1 \dots i_p}\|_{n_1 \times \dots \times n_p} : \right. \\ \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}} \sum_{i_{s+1}=1}^{n_{s+1}} \dots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1 \dots i_p} = a_{i_s}^s, i_s \in N_{n_s}, s \in N_p, \\ \left. x_{i_1 \dots i_p} \geq 0, (i_1, \dots, i_p) \in N_{n_1} \times \dots \times N_{n_p} \right\},$$

определенного целочисленными векторами

$$a^s = (a_1^s, \dots, a_{n_s}^s), s \in N_p,$$

справедлива оценка

$$f_0^z(M(a^1, \dots, a^p)) / f_0(M(a^1, \dots, a^p)) \geq 2/p,$$

где $f_0^z(M(a^1, \dots, a^p))$ — число целочисленных вершин, а $f_0(M(a^1, \dots, a^p))$ — число вершин многогранника $M(a^1, \dots, a^p)$. Опровергает эту гипотезу утверждение, которое вытекает из теоремы 12 и формулы (7).

Следствие 11. *Справедливы неравенства*

$$\frac{f_0^z(M(3, n))}{f_0(M(3, n))} < \frac{1}{2n(n-1)(n-2)+1}, \quad n \geq 3.$$

6. Оценки снизу для чисел r -нецелочисленных вершин некоторых классов

Так как $m(10) = 4$, $m(12) = 5$, $m(13) = 5$, $m(14) = 6$, $m(15) = 6$, $m(16) = 6$ (см. доказательство теоремы 2), в силу теоремы 4 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sigma(n, 10) &\geq \binom{n}{4}^3 ((n-4)!)^2 \sigma(4, 10), & n > 4, \\ \sigma(n, 12) &\geq \binom{n}{5}^3 ((n-5)!)^2 \sigma(5, 12), & n > 5, \\ \sigma(n, 13) &\geq \binom{n}{5}^3 ((n-5)!)^2 \sigma(5, 13), & n > 5, \\ \sigma(n, 14) &\geq \binom{n}{6}^3 ((n-6)!)^2 \sigma(6, 14), & n > 6, \\ \sigma(n, 15) &\geq \binom{n}{6}^3 ((n-6)!)^2 \sigma(6, 15), & n > 6, \\ \sigma(n, 16) &\geq \binom{n}{6}^3 ((n-6)!)^2 \sigma(6, 16), & n > 6. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, Москва, 1981.
2. Balinski M. L., Russakoff A., On the assignment polytope. *SIAM Rev.* (1974) **16**, №4, 516–525.
3. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач. *Дискретная математика* (1991) **3**, №2, 3–24.
4. Balas E., Saltzman M. J., Facets of the three-index assignment polytope. *Discrete Appl. Math.* (1989) **23**, №3, 201–229.
5. Кравцов М. К., Диаметр и радиус транспортного многогранника. *Докл. АН СССР* (1983) **270**, №2, 278–281.
6. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П., Транспортные многогранники с максимальным числом k -граней. *Докл. АН СССР* (1985) **282**, №4, 784–788.
7. Кравцов М. К., Полиэдральные аспекты транспортных задач. *Докл. АН СССР* (1989) **309**, №2, 271–275.
8. Кравцов М. К., Полиэдральные аспекты многоиндексных транспортных задач с аксиальными суммами. *Докл. АН СССР* (1990) **315**, №6, 1298–1301.
9. Кравцов М. К., О транспортных многогранниках с минимальным числом k -граней. *Дискретная математика* (1992) **4**, №3, 108–117.
10. Кравцов М. К., Крачковский А. П., Асимптотика многоиндексных аксиальных транспортных многогранников. *Дискретная математика* (1998) **10**, №4, 61–81.

Статья поступила 17.05.1999.