Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Кузьмин, О. В. Леонова, О полиномах разбиений,
Дискрет. матем., 2001, том 13, выпуск 2, 144–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:52:25

О полиномах разбиений

© 2001 г. О. В. Кузьмин, О. В. Леонова

Рассматриваются некоторые из полиномов разбиений: однородные полиномы Белла и Платонова, обобщенные A - и B -полиномы, T - и C -полиномы Тушара и P -полиномы, составляющие с T -полиномами квазиортогональную систему. Для всех указанных полиномов изучаются коэффициенты, для которых приводятся рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации. Для C -полиномов найдены рекуррентные соотношения, производящие функции и явное представление.

1. Введение

Понятие полинома разбиений, полинома от нескольких переменных, определяемого с помощью суммы по различным разбиениям значений его индекса, введено Беллом в [1]. Один из таких полиномов, связанный с производными от композиции функций, в [2] назван полиномом Белла. Ряд свойств коэффициентов n -го полинома Белла, так называемых однородных полиномов Белла $A_{n,k}(x)$, и сопряженных с ними полиномов Платонова $B_{n,k}(x)$ приведен в [3].

Обобщенными A - и B -полиномами $A_{n,k}^{(m)}(x)$ и $B_{n,k}^{(m)}(x)$ соответственно в [4] названы обобщения полиномов $A_{n,k}(x)$, которые имеются, например, в [5], [6], и обобщения полиномов, введенные в [7]. Ряд свойств обобщенных A - и B -полиномов установлен в [8].

В связи с изучением некоторых свойств цикловой структуры подстановок Тушара в [9] ввел ряд обобщений полиномов Белла. Для одного класса таких полиномов $T_{n,k}(x, y)$, названных полиномами Тушара, в [10] получены экспоненциальные производящие функции и рекуррентные соотношения. В [11] рассматриваются свойства некоторых частных случаев полиномов $T_{n,k}(x, y)$ и вновь введенных полиномов Тушара $C_{n,k}(x, y)$. Полученные формулы используются в задачах о случайных блужданиях.

В [12, 13] авторами данной публикации изучаются полиномы $T_{n,k}(x, y)$ и $C_{n,k}(x, y)$, при этом получены обобщения некоторых из приведенных в [3] свойств полиномов $A_{n,k}(x)$, перечислительные интерпретации и вероятностные приложения. В [14] вводятся новые, так называемые P -полиномы, составляющие с T -полиномами Тушара квазиортогональную систему. Для P -полиномов $P_{n,k}(x, y)$ получено явное выражение, производящие функции и рекуррентные соотношения, построены алгоритм преобразования T -полиномов в P -полиномы и ему обратный.

Во втором параграфе статьи приводятся необходимые определения и свойства полиномов Белла и Платонова и их коэффициентов.

Во третьем параграфе приводятся необходимые определения и свойства обобщенных A - и B -полиномов и изучаются их коэффициенты.

В четвертом параграфе рассматриваются T - и C -полиномы Тушара и P -полиномы. Изучаются коэффициенты указанных полиномов, приводятся рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации. Для C -полиномов найдены рекуррентные соотношения, производящие функции и явное представление.

2. A - и B -полиномы

2.1. Однородные полиномы Белла

Однородные полиномы Белла от переменных $x_i, i \geq 1$, которые мы будем обозначать $A_{n,k}(x) = A(n, k; x_1, x_2, \dots)$, $1 \leq k \leq n$, и в дальнейшем называть A -полиномами, впервые рассматривались Беллом в [1]. Пусть последовательность аргументов A -полиномов задана в виде производящей функции

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!}.$$

Производящими функциями A -полиномов являются

$$\sum_{n=k}^{\infty} A_{n,k}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(x(t))^k}{k!}, \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} A_{n,k}(x) \frac{g^k t^n}{n!} = e^{gx(t)}. \quad (2)$$

Из (1) или (2) может быть получена явная формула для A -полиномов

$$A_{n,k}(x) = n! \sum_{n,k} \prod_{i=1}^{n-k+1} x_i^{r_i} (r_i! (i!)^{r_i})^{-1}, \quad (3)$$

где $A_{0,0}(x) = 1$ и суммирование ведется по всем $r_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} r_i = k, \quad \sum_{i=1}^{n-k+1} i r_i = n.$$

Пусть

$$\mathcal{D}_x = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots$$

Для A -полиномов известна рекуррентная формула (см., например, [2])

$$A_{n,k}(x) = x_1 A_{n-1,k-1}(x) + \mathcal{D}_x A_{n-1,k}(x), \quad n, k \geq 1, \quad k \leq n. \quad (4)$$

Очевидно, что при каждом произведении $\prod_{i=1}^{n-k+1} x_i^{r_i}$ коэффициент в (3) зависит от спецификации соответствующего разбиения

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} r_i = k, \quad \sum_{i=1}^{n-k+1} i r_i = n.$$

Положим $r = (r_1, r_2, \dots, r_{n-k+1})$, тогда (см. [15])

$$A_{n,k}(x) = \sum_{n,k} a_{n,k}(r) \prod_{i=1}^{n-k+1} x_i^{r_i}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (5)$$

где

$$a_{n,k}(r) = n! \prod_{i=1}^{n-k+1} (r_i! (i!)^{r_i})^{-1}.$$

Выражение (5) показывает, что коэффициент $a_{n,k}(r)$ равен числу подстановок степени n , состоящих из k упорядоченных циклов, из которых r_i имеют длину i , $1 \leq i \leq n - k + 1$.

Сравнивая коэффициенты в левой и правой частях (4), стоящие при произведении $\prod_{i=1}^{n-k+1} x_i^{r_i}$, получим (см. [15]) равенство

$$a_{n,k}(r) = a_{n-1,k-1}(r_1 - 1, r_2, \dots, r_{n-k+1}) + \sum_{i=1}^{n-k} (r_i + 1) a_{n-1,k}(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i + 1, r_{i+1} - 1, r_{i+2}, \dots, r_{n-k+1}). \quad (6)$$

Известно, что числа Стирлинга и Лаха (см. например [2]) могут быть представлены через коэффициенты $a_{n,k}(r)$ в следующем виде [15]:

$$\begin{aligned} S(n, k) &= \sum_{n,k} a_{n,k}(r), \\ |s(n, k)| &= \sum_{n,k} a_{n,k}(r) \prod_{i=1}^{n-k+1} ((i-1)!)^{r_i}, \\ |L(n, k)| &= \sum_{n,k} a_{n,k}(r) \prod_{i=1}^{n-k+1} (i!)^{r_i}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n - 1$ и $s(n, k)$, $S(n, k)$ и $L(n, k)$ — числа Стирлинга первого и второго рода и числа Лаха соответственно.

2.2. Полиномы Платонова

С A -полиномами тесно связаны B -полиномы Платонова, введенные в [16] и более систематично описанные в книге [17]. Строго говоря, это полиномы только от переменных x_i , $i \geq 2$, роль переменной $x_1 \neq 0$ нормирующая. Для B -полиномов справедливо явное выражение

$$B_{n,k}(x) = \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)! x_1^{2n-k}} \sum_{2n-2k, n-k} (-1)^{r_1} r_1! (2n-k-r_1-1)! \prod_{i=1}^{n-k+1} x_i^{r_i} (r_i! (i!)^{r_i})^{-1},$$

где $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n - 1$, $B_{n,n} = x_1^{-n}$ при $n \geq 0$ и суммирование ведется по всем $r_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 2n - 2k$, таким, что

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} r_i = n - k, \quad \sum_{i=1}^{n-k+1} i r_i = 2n - 2k.$$

Тесная связь A - и B -полиномов объясняется тем, что они двояко, алгебраически и аналитически, сопряжены. Алгебраическая сопряженность определяется взаимной обратностью бесконечных нижних треугольных матриц $\|A_{n,k}(x)\|$ и $\|B_{n,k}(x)\|$. Аналитическая сопряженность выражается системой тождеств

$$A_{n,k}(x) = B_{n,k}(\tilde{x}), \quad (8)$$

где $x(t)$ и $\tilde{x}(u)$ — взаимно обратные функции, то есть

$$x(\tilde{x}(u)) = u, \quad \tilde{x}(x(t)) = t.$$

С учетом соотношения (8) из (1) и (2) получаем, что производящими функциями для B -полиномов являются

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(x) \frac{u^n}{n!} &= \frac{\tilde{x}(u)^k}{k!}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(x) \frac{g^k u^n}{n!} &= e^{g\tilde{x}(u)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для B -полиномов справедливо (см. [17]) рекуррентное соотношение

$$x_1 B_{n,k}(x) = B_{n-1,k-1}(x) + \mathcal{D}_x B_{n-1,k}(x), \quad n, k \geq 1, \quad k \leq n. \quad (10)$$

Выше уже отмечалось, что $B_{n,k}(x)$ являются полиномами только от переменных x_i , $i \geq 2$. Вводя нормирующие множители вида $(-1)^{n-k} x_1^{2n-k}$, получим полиномы от всех переменных x_i , $i \geq 1$, вида

$$B'_{n,k}(x) = (-1)^{n-k} x_1^{2n-k} B_{n,k}(x) = \sum_{2n-2k, n-k} b_{n,k}(r) \prod_{i=1}^{n-k+1} x_i^{r_i}, \quad (11)$$

где

$$b_{n,k}(r) = \frac{(-1)^{r_1} r_1! (2n-k-r_1-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=1}^{n-k+1} (r_i! (i!)^{r_i})^{-1}.$$

Как видно из выражения (11), величина

$$b_{n,k}(r) \frac{(-1)^{r_1} (k-1)!}{r_1! (2n-k-r_1-1)_{k-r_1-1}}$$

равна числу подстановок степени $2n-2k$, состоящих из $n-k$ упорядоченных циклов, из которых r_i имеют длину i , $1 \leq i \leq n-k+1$.

Сравнивая в левой и правой частях формулы (10) коэффициенты при произведении $\prod_{i=1}^{n-k+1} x_i^{r_i}$, находим, что

$$\begin{aligned} b_{n,k}(r) &= b_{n-1,k-1}(r) + (k-2n+2) b_{n-1,k}(r_1, r_2-1, r_3, \dots, r_{n-k+1}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-k} (r_i+1) b_{n-1,k}(r_1-1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_i+1, r_{i+1}-1, r_{i+2}, \dots, r_{n-k+1}). \end{aligned} \quad (12)$$

Числа Стирлинга и Лаха могут быть представлены через коэффициенты $b_{n,k}(r)$ в виде [15]

$$\begin{aligned} S(n, k) &= \sum_{2n-2k, n-k} b_{n,k}(r) \prod_{i=1}^{n-k+1} ((i-1)!)^{r_i}, \\ |s(n, k)| &= \sum_{2n-2k, n-k} b_{n,k}(r), \\ |L(n, k)| &= \sum_{2n-2k, n-k} b_{n,k}(r) \prod_{i=1}^{n-k+1} (i!)^{r_i}, \end{aligned}$$

где $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$.

3. Обобщенные A - и B -полиномы

3.1. Обобщенные A -полиномы

Обобщенные A -полиномы $A_{nk}^{(m)}(x)$ для фиксированного целого неотрицательного m могут быть определены как коэффициенты в суммах

$$\sum_{n=k(m+1)}^{\infty} \frac{A_{nk}^{(m)}(x)}{n!} t^n = \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{x_i t^i}{i!} \right)^k,$$

где $x_{m+1} \neq 0$, $k \geq 1$. Известно, что $A_{nk}^{(0)}(x) = A_{nk}(x)$.

Как видно из (3), для $n \geq 1$, $0 \leq k < (n+m+1)/(m+1)$, явное выражение для полиномов $A_{nk}^{(m)}(x)$ имеет вид

$$A_{nk}^{(m)}(x) = n! \sum_{n-km, k} \prod_{i=1}^{n-k(m+1)+1} x_{i+m}^{r_i} (r_i! ((i+m)!)^{r_i})^{-1}, \quad (13)$$

где $x = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$ — формальные переменные, а суммирование ведется по всем разбиениям натурального числа $n - km$ на k натуральных не меньших m слагаемых.

Полиномы $A_{nk}^{(m)}(x)$ удовлетворяют соотношениям [7]

$$A_{n+1, k}^{(m)}(x) = \binom{n}{m} x_{m+1} A_{n-m, k-1}^{(m)}(x) + \sum_{i=m+1}^{n-k+1} x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{nk}^{(m)}(x), \quad (14)$$

где $1 \leq k \leq [(n+1)/(m+1)]$, $n \geq m$.

Соотношение (13) можно переписать в виде

$$A_{n, k}^{(m)}(x) = \sum_{n-km, k} a_{n, k}^{(m)}(r) \prod_{i=1}^{n-k(m+1)+1} x_{i+m}^{r_i}, \quad (15)$$

где

$$a_{n,k}^{(m)}(r) = n! \prod_{i=1}^{n-k(m+1)+1} (r_i!((i+m)!)^{r_i})^{-1}.$$

Выражение (15) показывает, что коэффициент $a_{n,k}^{(m)}(r)$ равен числу подстановок степени n , состоящих из k упорядоченных циклов, из которых r_i имеют длину $i+m$, $1 \leq i \leq n-k(m+1)+1$.

Сравнивая в формуле (14) коэффициенты в правой и левой частях при произведении $\prod_{i=1}^{n-k(m+1)+1} x_i^{r_i}$, получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} a_{n+1,k}^{(m)}(r) &= \binom{n}{m} a_{n-m,k-1}^{(m)}(r_1, \dots, r_{m+1}-1, \dots, r_{n-k(m+1)+1}) \\ &+ \sum_{i=m+1}^{n-k(m+1)+1} (r_i+1) a_{n,k}^{(m)}(r_1, \dots, r_i+1, r_{i+1}-1, \dots, r_{n-k(m+1)+1}). \end{aligned} \quad (16)$$

Полагая $m=0$ в соотношении (16), получаем соотношение (6).

Отметим, что m -присоединенные числа Стирлинга (см., например [5]) представимы через коэффициенты $a_{n,k}^{(m)}(r)$ в виде

$$\begin{aligned} {}^{m+1}s(n, k) &= \sum_{n,k} a_{n,k}^{(m)}(r) \prod_{i=1}^{n-k+1} ((i-1)!)^{r_i}, \\ {}^{m+1}S(n, k) &= \sum_{n,k} a_{n,k}^{(m)}(r), \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n-1, \end{aligned} \quad (17)$$

где ${}^m s(n, k)$ и ${}^m S(n, k)$ — m -присоединенные числа Стирлинга первого и второго рода соответственно.

Полагая $m=0$ в соотношении (17) получаем первое и второе соотношения (7).

3.2. Обобщенные B -полиномы

Обобщенные B -полиномы $B_{nk}^{(m)}(x)$ для фиксированного натурального m задаются [7] соотношениями

$$B_{nk}^{(m)}(x) = \binom{n-1}{k-1} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \left[\frac{x(t)}{t^m} \right]_{t=0}^{-n/m},$$

где

$$x(t) = \sum_{i=m}^{\infty} x_i \frac{t^i}{i!}, \quad x_m \neq 0, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Известно, что $B_{nk}^{(1)}(x) = B_{nk}(x)$.

В [7] показано, что при $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$, $x_m \neq 0$

$$\begin{aligned} B_{nk}^{(m)}(x) &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!} (-1)^{n-k} \left(\frac{m!}{x_m} \right)^{n/m+n-k} \\ &\times \sum_{2n-2k, n-k} (-1)^{r_1} r_1! \prod_{j=0}^{n-k-r_1-1} \left(\frac{n}{m} + j \right) \prod_{i=1}^{n-k+1} x_{i+m-1}^{r_i} (r_i!((i+m-1)!)^{r_i})^{-1}, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем разбиениям натурального числа $2n - 2k$ на $n - k$ натуральных слагаемых. Дополнительно полагают, что

$$B_{nn}^{(m)}(x) = (x_m^{-1} m!)^{n/m}, \quad n \geq 1.$$

Обобщенные B -полиномы удовлетворяют рекуррентному соотношению (см. [18])

$$B_{n+m, k+m-1}^{(m)}(x) = \frac{m!(n+m-1)_{m-1}}{x_m(k+m-2)_{m-1}} (B_{n, k-1}^{(m)}(x) + \mathcal{L} B_{nk}^{(m)}(x)), \quad (18)$$

где

$$\mathcal{L} = x_{m+1} \partial / \partial x_m + x_{m+2} \partial / \partial x_{m+1} + \dots$$

Вводя нормирующие множители вида $(-1)^{n-k} x_m^{n-k+n/m}$, получим полиномы от всех переменных x_i , $i \geq m$, вида

$$\hat{B}_{n,k}^{(m)}(x) = (-1)^{n-k} x_m^{n-k+n/m} B_{n,k}^{(m)}(x) = \sum_{2n-2k, n-k} b_{n,k}^{(m)}(r) \prod_{i=1}^{n-k+1} x_{i+m}^{r_i}, \quad (19)$$

где

$$b_{n,k}^{(m)}(r) = \frac{(-1)^{r_1} r_1! (n-1)! (m!)^{n-k+n/m}}{(k-1)! m^{n-k-r_1}} \times \prod_{j=0}^{n-k-r_1-1} (n+jm) \prod_{i=1}^{n-k+1} (r_i! ((i+m-1)!)^{r_i})^{-1}.$$

Как видно из выражения (19),

$$b_{n,k}^{(m)}(r) \frac{(n-1)!}{(k-1)!(2n-2k)!} (-1)^{r_1} r_1! (m!)^{n-k+n/m} \prod_{j=0}^{n-k-r_1-1} \left(\frac{n}{m} + j \right)$$

равно числу подстановок степени $2n - 2k$, состоящих из $n - k$ упорядоченных циклов, из которых r_i имеют длину i , $m \leq i \leq n$.

Сравнивая в (18) коэффициенты в левой и правой частях при произведении $\prod_{i=1}^{n-k+1} x_i^{r_i+m}$, получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} b_{n+m, k+m-1}^{(m)}(r) &= \frac{m!(n+m-1)_{m-1}}{(k+m-2)_{m-1}} \\ &\times (b_{n, k-1}^{(m)}(r) - (k-n-n/m) b_{n,k}^{(m)}(r_1, \dots, r_m, r_{m+1}-1, \dots, r_{m+2}, \dots, r_{n-km+1}) \\ &- \sum_{i=m+1}^{n-km+1} (r_i+1) b_{n,k}^{(m)}(r_1, \dots, r_m-1, \dots, r_i+1, r_{i+1}-1, \dots, r_{n-km+1})). \quad (20) \end{aligned}$$

Полагая $m = 1$ в соотношении (20) получаем соотношение (12).

Отметим, что числа Стирлинга и Лаха могут быть представлены через коэффициенты $b_{n,k}^{(m)}(r)$ в виде

$$\begin{aligned} S(n, k) &= \sum_{n,k} b_{n,k}(r), \\ |s(n, k)| &= \sum_{n,k} b_{n,k}(r) \prod_{i=1}^{n-k+1} ((i-1)!)^{r_i}, \\ |L(n, k)| &= \sum_{n,k} b_{n,k}(r) \prod_{i=1}^{n-k+1} (i!)^{r_i}, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

4. Полиномы Тушара и P -полиномы

4.1. T -полиномы Тушара

Полиномы от переменных x_i и y_i , $i \geq 1$, которые мы будем обозначать

$$T_{n,k}(x, y) = T_{n,k}(x_1, \dots; y_1, \dots), \quad n, k \geq 1, \quad k \leq n$$

и в дальнейшем называть T -полиномами Тушара, впервые рассматривались Тушаром в [9]. Производящая функция полиномов Тушара имеет вид

$$\sum_{n=k}^{\infty} T_{n,k}(x, y) \frac{t^n}{n!} = (x(t))^k \frac{e^{y(t)}}{k!}, \quad (21)$$

где

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{t^i}{i!}, \quad y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{t^i}{i!}.$$

Известен явный вид этих полиномов (см., например, [10]):

$$T_{n,k}(x, y) = n! \sum_{(n,k)} \prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i} (r_i! s_i! (i!)^{r_i+s_i})^{-1}, \quad (22)$$

где $T_{0,0}(x, y) = 1$ и суммирование ведется по всем наборам целых неотрицательных чисел r_i, s_i , $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^n r_i = k, \quad \sum_{i=1}^n i(r_i + s_i) = n.$$

Непосредственно из (22) следует, что

$$T_{n,0}(x, y) = Y_n(y),$$

где $Y_n(y) = Y_n(y_1, \dots, y_n)$ — хорошо известные полиномы Белла (см., например, [2]), и

$$T_{n,n}(x, y) = x_1^n = A_{nn}(x).$$

Из сопоставления формул (1) и (21) или (3) и (22) видно, что

$$T_{n,k}(x, 0) = A_{n,k}(x).$$

Полиномы Тушара удовлетворяют системе дифференциально-разностных соотношений [12]

$$T_{n,k}(x, y) = x_1 T_{n-1,k-1}(x, y) + (\mathcal{D}_x + \mathcal{D}_y + y_1) T_{n-1,k}(x, y), \quad n, k \geq 1, \quad k \leq n. \quad (23)$$

Соотношение (22) можно переписать в виде

$$T_{n,k}(x, y) = \sum_{(n;k)} t_{n,k}(r, s) \prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i}, \quad (24)$$

где

$$t_{n,k}(r, s) = n! \prod_{i=1}^n (r_i! s_i! (i!)^{r_i+s_i})^{-1}.$$

Сравнивая в левой и правой части формулы (23) коэффициенты при произведении $\prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i}$, получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} t_{n,k}(r, s) &= t_{n-1,k-1}(r_1 - 1, r_2, \dots, r_n; s) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-k} (r_i + 1) t_{n-1,k}(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i + 1, r_{i+1} - 1, r_{i+2}, \dots, r_n; s) \\ &+ t_{n-1,k}(r; s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-k} (s_i + 1) t_{n-1,k}(r; s_1, \dots, s_{i-1}, s_i + 1, s_{i+1} - 1, s_{i+2}, \dots, s_n). \end{aligned}$$

Отметим, что числа Стирлинга и Лаха могут быть представлены через коэффициенты $t_{n,k}(r, s)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} S(n, k) &= \sum_{n,k} t_{n,k}(r, s) \prod_{i=1}^n s_i! (i!)^{s_i}, \\ |s(n, k)| &= \sum_{n,k} t_{n,k}(r, s) \prod_{i=1}^n s_i! (i!)^{s_i} ((i-1)!)^{r_i}, \\ L(n, k) &= \sum_{n,k} t_{n,k}(r, s) \prod_{i=1}^n s_i! (i!)^{r_i+s_i}, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

4.2. P -полиномы

Полиномы от x_i и y_i , $i \geq 1$, обозначаемые

$$P_{n,k}(x, y) = P_{n,k}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots), \quad n, k \geq 1, \quad k \leq n,$$

и называемые P -полиномами, впервые рассматривались авторами этой статьи в [14] и могут быть определены производящей функцией

$$\sum_{n=k}^{\infty} P_{n,k}(x, y) \frac{u^n}{n!} = \frac{\tilde{x}(u)^k}{k!} e^{-y(\tilde{x}(u))}, \quad k \geq 0. \quad (25)$$

Разлагая в ряд правую часть (25) и приравнявая коэффициенты при $u^n/n!$, получаем явную формулу для P -полиномов

$$P_{n,k}(x, y) = \frac{(-1)^{n-k}}{k!x_1^{2n-k}} \sum_{(2n-2k, n-k)} (-1)^{r_1+s_1+\dots+s_n} r_1! \\ \times (2n-k-r_1-1)! \left(\sum_{i=1}^n i s_i + k \right) \prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i} (r_i! s_i! (i!)^{r_i+s_i})^{-1}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $P_{n,n}(x, y) = x_1^{-n}$, $n \geq 1$, и суммирование ведется по всем наборам целых неотрицательных чисел r_i, s_i , $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^n r_i = n - k, \quad \sum_{i=1}^n i(r_i + s_i) = 2n - 2k.$$

Из (4) и (9) или (8) и (12) следует, что

$$P_{n,k}(x, 0) = B_{n,k}(x),$$

то есть P -полиномы являются обобщениями B -полиномов Платонова.

Известно (см. [14]), что P -полиномы удовлетворяют системе дифференциально-разностных соотношений

$$x_1 P_{n,k}(x, y) = P_{n-1,k-1}(x, y) + (\mathcal{D}_x + \mathcal{D}_y - y_1) P_{n-1,k}(x, y), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (26)$$

и связаны с T -полиномами соотношениями квазиортогональности

$$\sum_{i=k}^n T_{n,i}(x, y) P_{i,k}(x, y) = \delta_{n,k}, \\ \sum_{i=k}^n P_{n,i}(x, y) T_{i,k}(x, y) = \delta_{n,k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Вводя нормирующие множители $(-1)^{n-k} x_1^{2n-k}$, получим полиномы от всех переменных x_i , $i \geq 1$

$$P'_{n,k}(x, y) = (-1)^{n-k} x_1^{2n-k} P_{n,k}(x, y) = \sum_{(2n-2k, n-k)} p_{n,k}(r, s) \prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i}, \quad (27)$$

где

$$p_{n,k}(r) = (-1)^{r_1+s_1+\dots+s_n} \frac{r_1!}{k!} (2n-k-r_1-1)! \left(\sum_{i=1}^n i r_i + k \right) \prod_{i=1}^n (r_i! s_i! (i!)^{r_i+s_i})^{-1}.$$

Сравнивая в левой и правой частях (26) коэффициенты при произведении

$\prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i}$, получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} p_{n,k}(r, s) &= p_{n-1,k-1}(r, s) + (k - 2n + 2)p_{n-1,k}(r_1, r_2 - 1, r_3, \dots, r_n; s) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (r_i + 1)p_{n-1,k}(r_1 - 1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_i + 1, r_{i+1} - 1, r_{i+2}, \dots, r_n; s) \\ &\quad + p_{n-1,k}(r_1 - 1, r_2, \dots, r_n; s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (s_i + 1)p_{n-1,k}(r_1 - 1, r_2, \dots, r_n; s_1, \dots, s_{i-1}, s_i + 1, s_{i+1} - 1, s_{i+2}, \dots, s_n). \end{aligned}$$

Отметим, что числа Стирлинга и Лаха выражаются через коэффициенты $p_{n,k}(r, s)$ в виде

$$\begin{aligned} S(n, k) &= \sum_{2n-2k, n-k} p_{n,k}(r, s) (-1)^{s_1+\dots+s_n} k \left(\sum_{i=1}^n i r_i + k \right)^{-1} \prod_{i=1}^n s_i! (i!)^{s_i} ((i-1)!)^{r_i}, \\ |s(n, k)| &= \sum_{2n-2k, n-k} p_{n,k}(r, s) (-1)^{s_1+\dots+s_n} k \left(\sum_{i=1}^n i r_i + k \right)^{-1} \prod_{i=1}^n s_i! (i!)^{s_i}, \\ |L(n, k)| &= \sum_{2n-2k, n-k} p_{n,k}(r, s) (-1)^{s_1+\dots+s_n} k \left(\sum_{i=1}^n i r_i + k \right)^{-1} \prod_{i=1}^n s_i! (i!)^{r_i+s_i}, \end{aligned}$$

где $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$.

4.3. C -полиномы Тушара

Цикловой индикатор симметрической группы степени n равен

$$C_n(t) = C_n(t_1, \dots, t_n) = n! \sum \prod_{i=1}^n t_i^{k_i} (k_i! i^{k_i})^{-1}, \quad (28)$$

(см., например, [2]), где $t = (t_1, \dots, t_n)$, суммирование ведется по всем наборам целых неотрицательных чисел k_i , $1 \leq i \leq n$, таким, что $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ и $C_0 = 1$.

Цикловые индикаторы связаны с полиномами Белла соотношениями

$$C_n(t) = Y_n(1; t_1, t_2, 2!t_3, \dots, (n-1)!t_n) \quad (29)$$

(см., например, [2]).

В [11] при помощи соотношений

$$\begin{aligned} C_{n,k}(x, y) &= C_{n,k}(x_1, \dots; y_1, \dots) \\ &= \binom{n}{k} C_k(x) C_{n-k}(y), \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (30)$$

введены полиномы $C_{n,k}(x, y)$, которые мы будем называть C -полиномами Тушара.

T - и C -полиномы связаны между собой соотношением (см. [13])

$$\sum_{k=0}^n C_{n,k}(x, y) = \sum_{k=0}^n T_{n,k}(x^*, y^*),$$

где $x_i^* = (i-1)!x_i$, $y_i^* = (i-1)!y_i$.

Из (28) и (30) следует, что

$$C_{n,k}(x, y) = n! \sum_{i=1}^n \prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i} (r_i! s_i! i^{r_i+s_i})^{-1}, \quad (31)$$

где $C_{0,0}(x, y) = 1$ и суммирование ведется по всем наборам целых неотрицательных чисел r_i, s_i , $1 \leq i \leq n$, таким, что

$$\sum_{i=1}^n i r_i = k, \quad \sum_{i=1}^n i s_i = n - k.$$

Из соотношений (29) и (30) следует, что

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_{n,k}(x, y) \frac{u^n}{n!} = e^{u\varphi(t)},$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i + y_i}{i} t^i.$$

Теорема 1. Для C -полиномов справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} C_{n,k}(x, y) = \binom{n}{i} (i-1)! C_{n-i, k-i}(x, y), \quad k, i \geq 1, \quad n \geq k, \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} C_{n,k}(x, y) = \binom{n}{i} (i-1)! C_{n-i, k}(x, y), \quad k \geq 0, \quad i \geq 1, \quad n \geq k + i. \quad (33)$$

Доказательство. Докажем соотношение (32). Известно [6], что

$$r \frac{\partial}{\partial t_r} C_n(t) = (n)_r C_{n-r}(t). \quad (34)$$

Продифференцировав соотношение (30) по x_i , с учетом (34) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} C_{n,k}(x, y) &= \binom{n}{k} \frac{\partial}{\partial x_i} C_k(x) C_{n-k}(y) = \binom{n}{k} \frac{1}{i} (k)_i C_{k-i}(x) C_{n-k}(y) \\ &= \frac{n! k!}{k! (n-k)! (k-i)! i} C_{k-i}(x) C_{n-k}(y) \\ &= \frac{n! (n-i)! (i-1)!}{(n-k)! (k-i)! i (n-i)! (i-1)!} C_{k-i}(x) C_{n-k}(y) \\ &= \binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} (i-1)! C_{k-i}(x) C_{n-k}(y) = \binom{n}{i} (i-1)! C_{n-i, k-i}(x, y). \end{aligned}$$

Соотношение (33) доказывается аналогично.

Теорема 2. При $n, k \geq 1$ справедливы соотношения

$$C_{n,k}(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n!}{k(n-i-1)!} x_{i+1} C_{n-i-1, k-i-1}(x, y), \quad (35)$$

$$C_{n,k}(x, y) = \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{n!}{(n-k)(n-i-1)!} y_{i+1} C_{n-i-1, k}(x, y). \quad (36)$$

Доказательство. Докажем соотношение (35). Известно [2], что

$$C_{n+1}(t) = \sum_{i=0}^n (n)_i t_{i+1} C_{n-i}(t). \quad (37)$$

Из (30) с учетом соотношения (37) следует, что

$$\begin{aligned} C_{n,k}(x, y) &= \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (k-1)_i x_{i+1} C_{k-i-1}(x) C_{n-k}(y) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n!(k-1)!}{k!(n-k)!(k-i-1)!} x_{i+1} C_{k-i-1}(x) C_{n-k}(y) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n!(n-i-1)!}{k(n-k)!(k-i-1)!(n-i-1)!} x_{i+1} C_{k-i-1}(x) C_{n-k}(y) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-i-1}{k-i-1} \frac{n!}{k(n-i-1)!} x_{i+1} C_{k-i-1}(x) C_{n-k}(y) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n!}{k(n-i-1)!} x_{i+1} C_{n-i-1, k-i-1}(x, y). \end{aligned}$$

Соотношение (36) доказывается аналогично.

Введем обозначения

$$\mathcal{D}_x(k) = \sum_{i=1}^k i x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathcal{D}_y(n, k) = \sum_{i=1}^{n-k} i y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Теорема 3. Для C -полиномов справедливы соотношения

$$C_{n,k}(x, y) = (x_1 + \mathcal{D}_x(k-1)) C_{n-1, k-1}(x, y) + (y_1 + \mathcal{D}_y(n, k)) C_{n-1, k}(x, y), \quad (38)$$

где $k \geq 1$, $n \geq k+1$.

Доказательство. Из (35) с учетом соотношения (32) получаем, что

$$\begin{aligned} C_{n,k}(x, y) &= \frac{n}{k} x_1 C_{n-1, k-1}(x, y) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n!}{k(n-i-1)!} x_{i+1} C_{n-i-1, k-i-1}(x, y) \\ &= \frac{n}{k} x_1 C_{n-1, k-1}(x, y) + \sum_{i=1}^{k-1} i \frac{n}{k} x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} C_{n-1, k-1}(x, y) \end{aligned}$$

или

$$\frac{k}{n} C_{n,k}(x, y) = x_1 C_{n-1, k-1}(x, y) + \sum_{i=1}^{k-1} i x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} C_{n-1, k-1}(x, y). \quad (39)$$

Из (36) с учетом формулы (31) следует, что

$$\begin{aligned} C_{n,k}(x, y) &= \frac{n}{n-k} y_1 C_{n-1,k}(x, y) + \sum_{i=1}^{n-k-1} \frac{n!}{(n-k)(n-i-1)!} y_{i+1} C_{n-i-1,k}(x, y) \\ &= \frac{n}{n-k} y_1 C_{n-1,k}(x, y) + \sum_{i=1}^{n-k-1} \frac{n}{n-k} i y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} C_{n-i,k}(x, y) \end{aligned}$$

или

$$\frac{n-k}{n} C_{n,k}(x, y) = y_1 C_{n-1,k}(x, y) + \sum_{i=1}^{n-k-1} i y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} C_{n-i,k}(x, y). \quad (40)$$

Из (39) и (40) следует, что

$$C_{n,k}(x, y) = (x_1 + \mathcal{D}_x(k-1)) C_{n-1,k-1}(x, y) + (y_1 + \mathcal{D}_y(n-k)) C_{n-1,k}(x, y).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если соотношение (38) преобразовать с помощью формул (32) и (33), то получим рекуррентное соотношение для полиномов $C_{n,k}(x, y)$, приведенное в [13].

Соотношение (31) перепишем в виде

$$C_{n,k}(x, y) = \sum c_{n,k}(r, s) \prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i}, \quad (41)$$

где

$$c_{n,k}(r, s) = n! \prod_{i=1}^n (r_i! s_i! i^{r_i+s_i})^{-1}.$$

Как видно из (41), коэффициент $c_{n,k}(r, s)$ можно интерпретировать как число подстановок степени n с r циклами, обладающими специальными свойствами.

Сравнивая в формуле (38) коэффициенты в левой и правой части при произведении $\prod_{i=1}^n x_i^{r_i} y_i^{s_i}$, находим, что справедливо рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} c_{n,k}(r, s) &= c_{n-1,k-1}(r_1-1, r_2, \dots, r_n; s) + c_{n-1,k}(r; s_1-1, s_2, \dots, s_n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (r_i+1) i c_{n-1,k-1}(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i+1, r_{i+1}-1, r_{i+2}, \dots, r_n; s) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-k+1} (s_i+1) i c_{n-1,k}(r; s_1, \dots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}-1, s_{i+2}, \dots, s_n). \end{aligned}$$

Отметим, что числа Стирлинга и Лаха могут быть представлены через коэффициенты $c_{n,k}(r, s)$ в виде

$$\begin{aligned} S(n, k) &= \sum_{n,k} c_{n,k}(r, s) \prod_{i=1}^{n-k+1} s_i! i^{s_i} ((i-1)!)^{-r_i}, \\ |s(n, k)| &= \sum_{n,k} c_{n,k}(r, s) \prod_{i=1}^{n-k+1} s_i! i^{s_i}, \quad |L(n, k)| = \sum_{n,k} c_{n,k}(r, s) \prod_{i=1}^{n-k+1} s_i! i^{r_i+s_i}, \end{aligned}$$

где $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$.

Список литературы

1. Bell E. F., Exponential polynomials. *Ann. Math.* (1934) **35**, 258–277.
2. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*. ИЛ, Москва, 1963.
3. Кузьмин О. В., Рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации некоторых комбинаторных чисел и полиномов. *Дискретная математика* (1994) **6**, №3, 39–49.
4. Жуков В. Д., Рекуррентные формулы для обобщенных A - и B -полиномов. В кн.: *Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца*. Наука, Москва, 1983, с. 192–197.
5. Comtet L., *Advanced Combinatorics*. Reidel, Dordrecht, 1974.
6. Howard F. T., Bell polynomials and degenerate Stirling numbers. *Rend. Sem. Math. Univ. Padova*. (1980) **61**, 203–219.
7. Селиванов Б. И., Комбинаторный подход к формуле обращения Бюрмана–Лагранжа. *Комбинаторный и асимптотический анализ*. Изд-во Красноярского ун-ва, Красноярск, 1977, 153–169.
8. Кузьмин О. В., Построение обобщенных A - и B -полиномов в пространстве отображений. *Методы дискретного анализа в теории графов и сложности*. Институт Матем. СО РАН, Новосибирск, 1992, вып. 52, 66–76.
9. Touchard J., Sur les cycles des substitutions. *Acta Math.* (1939) **70**, 243–279.
10. Chrysaphinou O., On Touchard polynomials. *Discrete Math.* (1985) **54**, 143–152.
11. Charalambides Ch. A., Chrysaphinou O., Partition polynomials in fluctuation theory. *Math. Nachr.* (1982) **106**, 89–100.
12. Кузьмин О. В., Леонова О. В., О полиномах Тушара. *Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа*. Изд-во Иркутского ун-ва, Иркутск, 1997, 101–109.
13. Кузьмин О. В., Леонова О. В., Полиномы Тушара и их приложения. *Дискретная математика* (2000) **12**, №3, 60–71.
14. Кузьмин О. В., Леонова О. В., Полиномы Тушара и им квазиортогональные. *Оптимизация, управление, интеллект*. ИДСТУ СО РАН, Иркутск, 1999, вып. 3, 218–227.
15. Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В., Платонов М. Л., *Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений*. Изд-во Иркутского ун-ва, Иркутск, 1990.
16. Платонов М. Л., Комбинаторные числа класса отображений. *Комбинаторный и асимптотический анализ*. Изд-во Красноярского ун-ва, Красноярск, 1975, 81–85.
17. Платонов М. Л., *Комбинаторные числа класса отображений и их приложения*. Наука, Москва, 1979.
18. Кузьмин О. В., *Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения*. Наука, Новосибирск, 2000.

Статья поступила 30.01.2001.