Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Алехина, О надежности схем в базисе $\{\vee, \&, \bar{}\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 3, 75–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:28:52

О надежности схем в базисе $\{\vee, \&, \bar{}\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов

© 2001 г. М. А. Алехина

Рассматривается реализация булевых функций в базисе $\{\vee, \&, \bar{}\}$ схемами из ненадежных функциональных элементов, подверженных однотипным константным неисправностям на входах элементов. Предполагается, что элементы схемы переходят в неисправные состояния с вероятностью γ независимо друг от друга. Ненадежность схемы определяется как наибольшая по всем входам вероятность ошибки на выходе схемы.

В работе предложен метод построения надежных схем из ненадежных элементов, получены верхние и нижние оценки ненадежности, установлена возможность максимально надежной реализации всех функций, отличных от констант, а именно, с ненадежностью γ^2 при $\gamma \rightarrow 0$. Константы реализуются абсолютно надежно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00053.

В статье рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе $\{\vee, \&, \bar{}\}$ (см. [1]). Схема реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе системы появляется значение $f(\tilde{a})$. Все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью γ , $\gamma < 1/2$, подвержены однотипным константным неисправностям на входах элементов. Неисправности типа 0 на входах элементов характеризуются тем, что поступающая на вход 1 с вероятностью γ может превратиться в 0, а поступающий на вход нуль остается нулем. Аналогично определяются неисправности типа 1 на входах функциональных элементов. Далее будем предполагать, что элементы подвержены неисправностям типа 0 на входах.

Вероятности правильного P_r и неправильного P_e (ошибочного) функционирования базисных элементов приведены в таблицах 1–3.

Пусть $P_{\tilde{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ — вероятность появления значения $\tilde{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S , реализующей $f(x)$, при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы определяется как максимальное из чисел $P_{\tilde{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы, следовательно, равна $1 - P(S)$.

Из приведенных таблиц видно, что невозможно реализовать произвольную функцию схемой, работающей сколь угодно надежно, то есть так, что $P(S) \rightarrow 0$ сколь угодно быстро (см. [2]). Покажем, что для любой функции, не равной константе,

Таблица 1.

x	y	$x \& y$	P_r	P_e
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	$(1 - \gamma)^2$	$2\gamma - \gamma^2$

Таблица 2.

x	y	$x \vee y$	P_r	P_e
0	0	0	1	0
0	1	1	$1 - \gamma$	γ
1	0	1	$1 - \gamma$	γ
1	1	1	$1 - \gamma^2$	γ^2

можно построить схему, реализующую ее с ненадежностью, асимптотически равной γ^2 при $\gamma \rightarrow 0$. Эти схемы с точки зрения надежности функционирования являются асимптотически наилучшими.

Определение 1. Схема, реализующая функцию, отличную от константы, является a -схемой, если из равенства $f(\tilde{a}) = f(\tilde{b})$ для любых наборов $\tilde{a}, \tilde{b}$ следует равенство

$$P_{\tilde{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a}) = P_{\tilde{f}(\tilde{b})}(S, \tilde{b}).$$

Из определения следует, что вероятность ошибки на выходе a -схемы зависит не столько от самого набора, сколько от значений функции на входном наборе.

В [3] доказана следующая лемма.

Лемма 1. Если подсхема A , содержащая выход схемы S , реализующей функцию, отличную от константы, является a -схемой и для ее вероятностей P_0, P_1 ошибок выполнено условие $P_0 + P_1 \leq 1$, то верно неравенство $P(S) \geq P(A)$.

Теорема 1. Для любой функции f , не равной константе, и любой схемы S , реализующей f , при $\gamma < 1/2$ верно неравенство $P(S) \geq \gamma^2$.

Доказательство. Пусть S — произвольная схема, реализующая f . Выделим в ней функциональный элемент, выход которого является выходом схемы. Обозначим через S подсхему, получаемую из S удалением выходного элемента (см. рис. 1). Выделенный функциональный элемент реализует одну из базисных функций, поэтому возможны три случая.

Таблица 3.

x	$\bar{x}$	P_r	P_e
0	1	1	0
1	0	$1 - \gamma$	γ

Рис. 1.

Пусть выходной элемент реализует $\&$. Поскольку конъюнктор является α -схемой, применима лемма 1 и поэтому $P(S) \geq 2\gamma - \gamma^2 \geq \gamma^2$.

Пусть выходной элемент реализует $\vee$. Вероятность ошибки P_0 на выходе схемы S при единичных входных наборах равна $P_0 = (1-p)x + p$, где $x = \gamma$ или $x = \gamma^2$, p — вероятность появления набора $(0\ 0)$ на выходах схемы S . Ясно, что $P_0 = x + p(1-x) \geq x \geq \gamma^2$. Поэтому ненадежность $P(S)$ схемы S не меньше γ^2 .

Наконец, пусть функциональный элемент, содержащий выход схемы, есть инвертор. Он является α -схемой (см. таблицу), поэтому применима лемма 1 и $P(S) \geq \gamma \geq \gamma^2$. Теорема доказана.

Лемма 2. Функцию $x \& y$ можно реализовать α -схемой с вероятностями ошибок $P_1 = 0$, $P_0 \leq (\gamma + (3\gamma - \gamma^2)^2)^2$.

Доказательство. Возьмем два конъюнктора, соединим их выходы с входами дизъюнктора. Вычислим вероятности ошибок на выходе полученной схемы S . Ясно, что $P_1 = 0$ на наборах $(0\ 0)$, $(0\ 1)$, $(1\ 0)$ и

$$P_0 = (1-\gamma)^4\gamma^2 + 2(1-\gamma)^2(2\gamma - \gamma^2)\gamma + (2\gamma - \gamma^2)^2 \leq \gamma^2 + 2\gamma(2\gamma - \gamma^2) + (2\gamma - \gamma^2)^2$$

на наборе $(1\ 1)$.

Возьмем 2 экземпляра схемы S , соединим их выходы с входами дизъюнктора и вычислим вероятности ошибок на выходе новой схемы $S_{\&}$. Получим, что $P_1 = 0$, $P_0 = (\gamma + (3\gamma - \gamma^2)^2)^2$.

Лемма доказана.

Итак, построена схема $S_{\&}$, реализующая конъюнкцию с ненадежностью, не превосходящей $(\gamma + (3\gamma - \gamma^2)^2)^2 = \gamma^2 + 18\gamma^3 + 69\gamma^4 + O(\gamma^4)$.

Введем обозначение

$$\lambda = (\gamma + (3\gamma - \gamma^2)^2)^2.$$

Рис. 2.

Пусть $\gamma \leq 1/16$, тогда $\gamma + \lambda \leq 1/8$. Положим

$$P^* = (1 - 4(\gamma + \lambda) - \sqrt{1 - 8(\gamma + \lambda)})/8, \quad P^{**} = (1 - 4(\gamma + \lambda) + \sqrt{1 - 8(\gamma + \lambda)})/8.$$

Заметим, что $P^* = \gamma^2 + 6\gamma^3 + 57\gamma^4 + O(\gamma^5)$ при $\gamma \rightarrow 0$.

Пусть f — некоторая функция, отличная от константы, S — схема реализующая f с ненадежностью, не большей P^* . В этом случае схема S является асимптотически наилучшей с точки зрения надежности функционирования.

Рассмотрим другой случай, когда $P(S) > P^*$.

Теорема 2. Пусть $\gamma < 1/16$, f — произвольная функция, S — схема, реализующая f с ненадежностью $P(S)$, и

$$P^* < P(S) < P^{**}. \quad (1)$$

Тогда можно построить схему S_2 , реализующую f , которая работает надежнее схемы S , то есть $P(S_2) < P(S)$.

Доказательство. Схема S_2 построена на рис. 2. Вычислим вероятности ошибок на выходе подсхемы A схемы S_2 . Ясно, что при нулевых входных наборах $\tilde{a}$

$$P_1(A, \tilde{a}) \leq (P_1(S, \tilde{a}))^2(1 - \lambda) \leq (P_1(S, \tilde{a}))^2,$$

при единичных входных наборах $\bar{a}$

$$P_0(A, \bar{a}) \leq (1 - P_0(S, \bar{a}))^2 \lambda + 2P_0(S, \bar{a})(1 - P_0(S, \bar{a}) + P_0(S, \bar{a}))^2 \leq \lambda + 2P_0(S, \bar{a}).$$

Вычисляя вероятности ошибок на выходе схемы S_2 , находим, что

$$\begin{aligned} P_1(S_2, \bar{a}) &= 2P_1(A, \bar{a})(1 - P_1(A, \bar{a}))(1 - \gamma) + (P_1(A, \bar{a}))^2(1 - \gamma^2) \\ &\leq 2P_1(A, \bar{a}) \leq 2(P_1(S, \bar{a}))^2 \leq 2(P(S))^2, \\ P_0(S_2, \bar{a}) &= (1 - P_0(A, \bar{a}))^2 \gamma^2 + 2P_0(A, \bar{a})(1 - P_0(A, \bar{a}))\gamma + (P_0(A, \bar{a}))^2 \\ &\leq (\gamma + P_0(A, \bar{a}))^2 \leq (\gamma + \lambda + 2P(S))^2. \end{aligned}$$

Ясно, что $P(S_2) \leq (\gamma + \lambda + 2P(S))^2 = P(S)$.

Так как числа P^* и P^{**} — корни уравнения $(\gamma + \lambda + 2P(S))^2 = P(S)$, а ненадежность $P(S)$ удовлетворяет условию (1), неравенство $(\gamma + \lambda + 2P(S))^2 < P(S)$ выполняется, то есть схема S_2 работает надежнее схемы S .

Теорема доказана.

Замечание 1. При $\gamma < 1/16$ нетрудно доказать индукцией по числу существенных переменных функции, что любую функцию можно реализовать схемой с ненадежностью, не большей γ . Ясно, что $(1 - 4(\gamma + \lambda) + \sqrt{1 - 8(\gamma + \lambda)})/8 \geq \gamma$, поэтому схемы, удовлетворяющие (1), существуют.

Следствие 1. При $\gamma < 1/16$ любую функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не более

$$P^* = (1 - 4(\gamma + \lambda) - \sqrt{1 - 8(\gamma + \lambda)})/8.$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция, а S — схема, реализующая f с ненадежностью $P(S) \leq \gamma$. Проведем $n + 1$ шаг итерации по схеме на рис. 2, построим схемы S_n и S_{n+1} , ненадежность которых $P(S_n)$ и $P(S_{n+1})$ удовлетворяет неравенству

$$P(S_{n+1}) \leq (\gamma + \lambda + 2P(S_n))^2.$$

Рассмотрим действительную функцию $g(x) = (2x + \gamma + \lambda)^2$, отображающую $[0, \gamma]$ в себя. Эта функция удовлетворяет условию Липшица

$$|g(x) - g(y)| = 4|x + y + \lambda + \gamma||x - y| \leq K|x - y|$$

с константой $K < 1$ и, следовательно, является сжатым отображением. Поэтому последовательность $x_1 = P(S), x_2 = g(x_1), \dots$ сходится к единственному корню уравнения $x = g(x)$. В нашем случае это корень равен $P^* = (1 - 4(\gamma + \lambda) - \sqrt{1 - 8(\gamma + \lambda)})/8$. Таким образом, любую функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не больше P^* .

Следствие доказано.

Схема S_3 (см. рис. 3) реализует константу 0 с вероятностями ошибок $P_1 = 0$ при $x = 0$ и $P_1 \leq (\lambda\gamma)^2$ при $x = 1$.

Возьмем два экземпляра схемы S_3 и соединим их выходы с входами схемы $S_{\&}$. Вероятности ошибок на выходе построенной схемы равны $P_1 = 0$ при $x = 0$ и $P_1 \leq (\lambda\gamma)^2$ при $x = 1$.

Рис. 3.

Продолав n шагов итерации, получим схему S_0 , реализующую константу 0 с надежностью $(\lambda\gamma)^{2n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, константу 0 можно реализовать со сколь угодно малой вероятностью ошибки.

Чтобы абсолютно надежно реализовать константу 1, возьмем схему S_0 и соединим ее выход со входом инвертора. Полученная схема работает с вероятностями ошибок $P_0 = 0$ при $x = 0$ и $P_0 \leq (\lambda\gamma)^{2n}(1 - \gamma)$ при $x = 1$.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на входах элементов показано, что произвольную функцию, не равную константе, можно реализовать схемой, надежность которой асимптотически равна γ^2 при $\gamma \rightarrow 0$. Эти схемы с точки зрения надежности функционирования являются асимптотически наилучшими.

Приведенные утверждения справедливы при неисправностях типа 1 на входах функциональных элементов [4].

В заключение автор благодарит Н. П. Редькина за постановку задачи.

Список литературы

1. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. Изд-во МГУ, Москва, 1984.
2. Тарасов В. В., К синтезу надежных систем из ненадежных элементов. *Матем. заметки* (1996) 20, №3, 391–400.
3. Алехина М. А., О надежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов. *Дискретная математика* (1993) 5, №2, 59–74.
4. Алехина М. А., О надежности двойственных схем. В кн.: *Материалы 11 Межгосударственной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем"*. Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, Москва, 2001, с. 6–8.

Статья поступила 25.11.1998.

Переработанный вариант поступил 22.05.2000.