Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Кузьмин, В. Т. Марков, А. А. Нечаев, А. Б. Шишков,
Приближение булевых функций мономиальными, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 1, 9–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm29>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:29:55

Приближение булевых функций мономиальными

© 2006 г. А. С. Кузьмин, В. Т. Марков,
А. А. Нечаев, А. Б. Шишков

Каждая булева функция от n переменных отождествляется с функцией $F: Q \rightarrow P$, где $Q = GF(2^n)$, $P = GF(2)$. Ранее Йоссером и Гонгом для $n = 2\lambda$ было установлено существование функций F , которые одинаково плохо приближаются не только линейными функциями (функциями $\text{tr}(\mu x)$, где $\mu \in Q^*$ и $\text{tr}: Q \rightarrow P$ есть функция след), но и собственными мономиальными функциями (функциями $\text{tr}(\mu x^\delta)$, где $(\delta, 2^n - 1) = 1$). Такие функции F названы гипер-бент-функциями (ГБ-функциями, ГБФ), и описан класс ГБФ со свойством $F(0) = 0$, непустой при любом $n = 2\lambda$. Это функции вида $F(x) = G(x^{2^\lambda - 1})$ такие, что уравнение $F(x) = 1$ имеет ровно $(2^\lambda - 1)2^{\lambda - 1}$ решений в Q . В данной работе указаны существенные ограничения на параметры произвольной ГБФ, показывающие, что класс ГБ-функций существенно меньше класса бент-функций. В частности, показано, что любая ГБ-функция есть бент-функция степени нелинейности λ и при некоторых n (например, в случае, когда $\lambda > 2$, $2^\lambda - 1$ — простое число или $\lambda \in \{4, 9, 25, 27\}$) класс ГБ-функций исчерпывается функциями вида $F(x) = G(x^{2^\lambda - 1})$, описанными Йоссером и Гонгом. Для $n = 4$, кроме 10 ГБ-функций указанного вида, существует еще 18 других ГБ-функций со свойством $F(0) = 0$. Вопрос о существовании других гипер-бент-функций при $n > 4$ остается открытым.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 05-01-01048 и 05-01-01018, и программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, гранты НШ 1910.2003.1 и НШ 2358.2003.9.

1. Введение

В различных теоретических и прикладных задачах возникает необходимость найти приближение некоторой функции на конечном множестве функцией из заданного класса функций. Под приближением понимается функция из этого класса, значения которой совпадают со значениями исходной функции на максимальном числе наборов аргументов. Наиболее глубоко изучены с этой точки зрения булевы функции и их линейные приближения [1, 3, 4].

Всюду далее используются следующие обозначения: $P = GF(2)$ — поле из двух элементов, $Q = GF(2^n)$ — расширение поля P степени n . Булевы функции от n переменных рассматриваются как функции $F: Q \rightarrow P$ (детали см. в следующем разделе). В качестве основного параметра, характеризующего степень близости функции F и приближающей

ее функции (статистического аналога) $A: Q \rightarrow P$ используется наиболее удобная для изучения арифметическая сумма

$$\Delta(F, A) = \sum_{x \in Q} (-1)^{F(x)+A(x)}, \quad (1.1)$$

где $(-1)^0 = 1$, $(-1)^1 = -1$. Через этот параметр хорошо выражаются расстояние Хемминга между функциями F и A :

$$d(F, A) = \frac{2^n - \Delta(F, A)}{2},$$

и вероятность совпадения значений функций при случайном равновероятном выборе аргумента:

$$\mathbf{P}(F = A) = \frac{2^n - d(F, A)}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{\Delta(F, A)}{2^{n+1}}.$$

Условие $\Delta(F, A) < 0$ означает, что вместо функции A нужно выбрать в качестве приближения F функцию $A + 1$, так как $\Delta(F, A + 1) = -\Delta(F, A)$.

В качестве показателя эффективности приближения функции F функциями из некоторого класса функций $\mathcal{A}$ выбирается величина

$$\Delta(F, \mathcal{A}) = \max\{|\Delta(F, A)|: A \in \mathcal{A}\}. \quad (1.2)$$

При этом величина

$$\frac{1}{2} + \frac{\Delta(F, \mathcal{A})}{2^{n+1}}$$

есть вероятность совпадения значений функции F и ее наилучшего приближения в классе $\mathcal{A} \cup \mathcal{A} + 1$ при случайном равновероятном выборе значений аргумента.

Параметр

$$\Delta \mathcal{A} = \min\{\Delta(F, \mathcal{A}): F: Q \rightarrow P\} \quad (1.3)$$

характеризует возможность класса $\mathcal{A}$ аппроксимировать произвольную булеву функцию, через него выражается радиус покрытия $\text{rs}(\mathcal{A})$ пространства Хемминга P^Q всех булевых функций от n переменных системой функций $\mathcal{A} \cup \mathcal{A} + 1$:

$$\text{rs}(\mathcal{A}) = \frac{2^n - \Delta \mathcal{A}}{2}.$$

Наиболее полно с этой точки зрения исследован класс линейных функций $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Q \rightarrow P)$, то есть функций $L_a: Q \rightarrow P$ вида

$$L_a(x) = \text{tr}(ax), \quad a \in Q.$$

Здесь

$$\text{tr}(x) = \text{tr}_P^Q(x) = \sum_{l=0}^{n-1} x^{2^l}$$

— след из поля Q в поле P . Известно (см., например, [3]), что $\Delta \mathcal{L} \geq 2^{n/2}$. Очевидно, что если последнее неравенство является равенством, то $n = 2\lambda$ — четное число. В последнем случае, действительно,

$$\Delta \mathcal{L} = 2^\lambda, \quad (1.4)$$

то есть для любой булевой функции от n переменных существует линейный статистический аналог, для которого вероятность совпадения значений с исходной функцией не меньше величины $1/2 + (1/2)^{\lambda+1}$. Класс функций F , для которых эта оценка достигается, то есть функций, удовлетворяющих равенству

$$\Delta(F, \mathcal{L}) = 2^\lambda, \quad (1.5)$$

исследовался различными авторами. В настоящее время для таких функций используется термин бент-функции [3, 4]. Из указанных работ известны, в частности, следующие свойства бент-функций.

Предложение 1. Для булевой функции f от $n = 2\lambda$ переменных, следующие утверждения равносильны:

- (а) f — бент-функция;
- (б) $|\Delta(F, L_a)| \leq 2^\lambda$ для любой линейной функции L_a ;
- (в) $|\Delta(F, L_a)| = 2^\lambda$ для любой линейной функции L_a .

Если f — бент-функция, то ее степень нелинейности удовлетворяет неравенству

$$\deg f \leq \lambda.$$

В [12] изучалась возможность приближения булевых функций в классе функций $L_a^{(\delta)}: Q \rightarrow P$ вида

$$L_a^{(\delta)}(x) = \text{tr}(ax^\delta), \quad a \in Q, \quad \delta \in \{1, \dots, 2^n - 1\}, \quad (\delta, 2^n - 1) = 1,$$

которые мы называем собственными мономияльными функциями. Этот класс включает в себя составной частью класс линейных функций. Было показано, что существуют булевы функции F , названные гипер-бент-функциями, которые одинаково плохо приближаются всеми собственными мономияльными функциями, и построен довольно большой класс гипер-бент-функций для каждого $n = 2\lambda$ (см. здесь разд. 4).

В данной работе (разд. 3) показано, что гипер-бент-функции удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, существенно ограничивающим их совокупность, например, все они — бент-функции степени нелинейности λ . Отсюда следует, что для ряда бент-функций в классе мономияльных функций существуют статистические аналоги, имеющие вероятность совпадения со значениями исходной функции большую, чем $1/2 + (1/2)^{\lambda+1}$. Кроме того, показано (разд. 4), что в некоторых случаях (например, если $2^\lambda - 1$ — простое число) не существует гипер-бент-функций, отличных от тех, которые описаны в [12].

2. Представление булевых функций от n переменных многочленами над полем $Q = GF(2^n)$

Пусть $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ — базис поля $Q = GF(2^n)$, рассматриваемого как пространство над полем $P = GF(2)$, и $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ — базис Q_P , двойственный к базису $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ (см. [8]), то есть базис, удовлетворяющий условию

$$\text{tr}(\varepsilon_j \omega_l) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = l, \\ 0, & \text{если } j \neq l. \end{cases}$$

Тогда для любого набора булевых величин $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ однозначно определен элемент x поля $GF(2^n)$

$$x = \sum_{l=0}^{n-1} x_l \varepsilon_l. \quad (2.1)$$

При этом в силу двойственности базисов справедливы соотношения

$$x_l = \text{tr}(\omega_l x), \quad l \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

При справедливости (2.1) для произвольной булевой функции $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ получаем равенство

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(\text{tr}(\omega_0 x), \text{tr}(\omega_1 x), \dots, \text{tr}(\omega_{n-1} x)),$$

ставящее ей в соответствие функцию $F: Q \rightarrow P$, определяемую равенством

$$F(x) = f(\text{tr}(\omega_0 x), \text{tr}(\omega_1 x), \dots, \text{tr}(\omega_{n-1} x)). \quad (2.2)$$

Любая такая функция однозначно представляется многочленом над Q степени не выше $2^n - 1$, причем, так как все значения функции $F(x)$ на Q принадлежат подполю P , это представление может быть записано в виде

$$F(x) = \text{tr}(\Phi(x)), \quad (2.3)$$

где $\Phi(x)$ — некоторый полином над полем Q , который, вообще говоря, выбирается неоднозначно.

Потребуем, чтобы многочлен $\Phi(x)$ удовлетворял ряду дополнительных условий. Всюду далее для любого целого числа c параметр $\rho_{2^n-1}(c) = \rho(c)$ определяется условиями

$$\rho(c) \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}, \quad \rho(c) \equiv c \pmod{2^n - 1}.$$

Заметим, что если $2^n - 1 \mid c$, то $\rho(c) = 2^n - 1$, в противном случае $\rho(c)$ есть остаток от деления c на $2^n - 1$.

Для любого $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ обозначим через $\mu_n(k) = \mu(k)$ наименьшее число из циклотомического класса (см. [9]), которому принадлежит k :

$$\mu(k) = \min\{k, \rho(k2), \dots, \rho(k2^{n-1})\}.$$

Пусть $M_n = M$ — набор минимальных представителей всех различных циклотомических классов, на которые разбивается множество $\{1, \dots, 2^n - 1\}$, то есть

$$M = \{\mu(k): k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}\}.$$

Подмножество $M \subset \{1, \dots, 2^n - 1\}$ можно охарактеризовать также следующими условиями:

(а) для любого $s \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ существуют $t \in M$ и $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ такие, что

$$s = \rho(t2^k);$$

(б) для любых различных $s, t \in M$ и любого $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$

$$s \neq \rho(t2^k);$$

(в) если числа $s, t \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ при некотором значении $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ удовлетворяют условию $s = \rho(t2^k)$ и $t \in M$, то $s > t$.

Тогда, с учетом свойства $\text{tr}(x) = \text{tr}(x^2)$, можно утверждать, что в представлении (2.3) многочлен $\Phi(x)$ может быть выбран в виде

$$\Phi(x) = \sum_{k \in M} a_k x^k, \quad a_k \in Q, \quad k \in M,$$

однако, если n не является простым числом, и такое представление функции F не однозначно.

Зафиксируем примитивный элемент θ поля Q . Каждому числу $k \in M$ поставим в соответствие подполе $Q_k = P(\theta^k)$ поля Q . Заметим, что $Q_k = GF(2^r)$, где

$$r = r(k) = \min\{t \in \mathbb{N}: (2^n - 1)/(2^n - 1, k) \mid (2^t - 1)\}.$$

Пусть

$$\text{tr}_{Q_k}^Q(x) = \sum_{j=0}^{n/r-1} x^{2^{rj}}$$

— след из поля Q в подполе Q_k . Для дальнейшего изложения результатов выберем и зафиксируем систему элементов

$$\xi_k \in Q, \quad \text{tr}_{Q_k}^Q(\xi_k) = e, \quad k \in M. \quad (2.4)$$

Тогда (см. [10]) существует представление (2.3) функции F , в котором многочлен $\Phi(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \sum_{k \in M} c_k \xi_k x^k, \quad c_k \in Q_k, \quad k \in M. \quad (2.5)$$

В дальнейшем многочлен $\Phi(x)$ вида (2.5) будем называть редуцированным многочленом, а представление $F(x) = \text{tr}(\Phi(x))$, где многочлен $\Phi(x)$ имеет вид (2.5), — приведенным представлением для $F(x)$.

Для редуцированного многочлена $\Phi(x)$ определим индекс нелинейности $\text{ind } \Phi(x)$ равенством

$$\text{ind } \Phi(x) = \max\{\|k\|: k \in M, c_k \neq 0\},$$

где $\|k\|$ — двоичный вес числа k , то есть число ненулевых цифр в записи числа k в двоичной системе счисления.

Степень нелинейности булевой функции $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ обозначим через $\deg f$.

Теперь результат из [10] о существовании приведенного представления можно дополнить следующим образом.

Теорема 1. Для любой булевой функции $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = F(x)$ от n переменных существует единственное приведенное представление (2.3)–(2.5) над полем $Q = GF(2^n)$. При этом $\deg f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \text{ind } \Phi(x)$.

Доказательство. Рассмотрим двоичную последовательность u элементов

$$u(i) = F(\theta^i).$$

Это реверсивная (периодическая без подхода) последовательность, период которой делит $2^n - 1 = \text{ord } \theta$. Следовательно, u однозначно раскладывается в сумму линейных рекуррент с неприводимыми характеристическими многочленами, степени которых делят n . Для каждой рекурренты v из последней суммы существуют единственные $k \in M$ и $c_k \in Q_k$ такие, что

$$v(i) = \text{tr}_P^{Q_k}(c_k(\theta^k)^i) = \text{tr}_P^{Q_k}(c_k \xi_k(\theta^i)^k).$$

Таким образом, последовательность u однозначно представляется в виде

$$u(i) = F(\theta^i) = \sum_{k \in M} \text{tr}_P^{Q_k}(c_k \xi_k(\theta^i)^k). \quad (2.6)$$

Так как θ — примитивный элемент поля Q , последнее равенство означает, что многочлен (2.5) удовлетворяет равенству (2.3) для всех ненулевых $x \in Q$. Справедливость (2.3) для $x = 0$ очевидна.

Заметим теперь, что ввиду (2.2) справедливо равенство

$$u(i) = f(\text{tr}(\omega_0 \theta^i), \dots, \text{tr}(\omega_{n-1} \theta^i)), \quad (2.7)$$

причем каждый из аргументов $\text{tr}(\omega_s \theta^i)$ в правой части (2.7) есть i -й знак линейной рекурренты максимального периода над полем P с характеристическим многочленом, равным минимальному многочлену элемента θ над полем P (см., например, теорему 10 гл. XXV в т. 2 в [6]). Из результатов [2] следует, что совокупность последовательностей вида (2.7), соответствующих множеству функций f , удовлетворяющих условию $\deg f \leq t$, совпадает с совокупностью последовательностей вида (2.6), удовлетворяющих условию $\|k\| \leq t$, если $c_k \neq 0$. Ввиду сказанного выше последнее означает, что $\text{ind } \Phi(x) = \deg f$.

3. Мономиальные аналоги и гипер-бент функции

Функцию $L_a^{(\delta)}: Q \rightarrow P$ вида

$$L_a^{(\delta)}(x) = \text{tr}(ax^\delta), \quad a \in Q, \quad \delta \in M, \quad (3.1)$$

следуя [5], назовем мономиальной (это функция, у которой в приведенном представлении (2.3) многочлен Φ является мономом). Представляется интересным оценить возможности приближения произвольной функции F функциями из класса M всех мономиальных функций на Q . В данной работе мы ограничимся изучением с этой точки зрения лишь класса M^* всех собственных мономиальных функций, так мы называем функции (3.1), удовлетворяющие дополнительному условию $(\delta, 2^n - 1) = 1$.

Заметим, что любая линейная функция есть собственная мономиальная функция, так как для каждого $a \in Q$ справедливо равенство $L_a(x) = L_a^{(1)}(x)$. Таким образом,

$$\mathcal{L} \subset M^* \quad (3.2)$$

и известные оценки вероятности приближения произвольной булевой функции линейными статистическими аналогами являются оценками снизу для вероятности приближения булевой функции мономиальными аналогами.

В обозначениях (1.1), (1.2), (1.3) представляется интересным

- оценить (вычислить) $\Delta \mathcal{M}^*$;
- описать функции F , удовлетворяющие как условию

$$\Delta(F, \mathcal{M}^*) = \Delta(\mathcal{M}^*),$$

так и условию

$$\Delta(F, \mathcal{M}^*) > \Delta(\mathcal{M}^*);$$

- найти для данной функции F наилучший собственный мономияльный аналог, то есть функцию $L_a^{(\delta)} \in \mathcal{M}^*$, удовлетворяющую условию

$$\Delta(F, L_a^{(\delta)}) = \Delta(F, \mathcal{M}^*).$$

Мы по-прежнему считаем, что $n = 2\lambda$ — четное число. Следовательно, верно (1.4). Отсюда и из (3.2) следует неравенство

$$\Delta \mathcal{M}^* \geq 2^\lambda.$$

В [12] доказано, что, в действительности,

$$\Delta \mathcal{M}^* = \Delta \mathcal{L} = 2^\lambda, \quad (3.3)$$

и построен пример функции F , удовлетворяющей равенству

$$\Delta(F, \mathcal{M}^*) = 2^\lambda. \quad (3.4)$$

Следуя [12], мы будем называть функции, удовлетворяющие последнему равенству, гипер-бент-функциями. Из определения и предложения 1 видно, что любая гипер-бент-функция есть бент-функция.

Цель этой работы — описать ряд ограничений на редуцированный многочлен $\Phi(x)$ в представлении (2.3) гипер-бент-функции F и показать, что класс гипер-бент-функций существенно меньше класса бент-функций. Следовательно, существуют бент-функции F , для которых

$$\Delta(F, \mathcal{M}^*) > \Delta(F, \mathcal{L}) = 2^\lambda.$$

Для формулировки основного результата обозначим через $M(\lambda)$ подмножество всех чисел $k \in M$, удовлетворяющих условию

$$\forall \sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\} : \|\rho(k\sigma)\| = \lambda. \quad (3.5)$$

Нашим основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. Если при введенных выше обозначениях $F: Q \rightarrow P$ есть гипер-бент-функция, то в ее приведенном представлении (2.3)–(2.5) редуцированный многочлен (2.5) имеет вид

$$\Phi(x) = \sum_{k \in M(\lambda)} c_k \xi_k x^k, \quad c_k \in Q_k, \quad k \in M(\lambda). \quad (3.6)$$

В частности, любая гипер-бент-функция есть бент-функция степени нелинейности λ . Для любого $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$ функция $F_\sigma(x) = F(x^\sigma)$ есть также гипер-бент-функция.

Доказательство разобьем на ряд этапов.

Лемма 1. Пусть $a \in Q$, $\sigma, \delta \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$ и $\tau = \rho(\sigma\delta)$. Тогда

$$\Delta(F, L_a^{(\delta)}) = \Delta(F_\sigma, L_a^{(\tau)}),$$

где $F_\sigma(x) = F(x^\sigma)$. В частности, если $\tau = 1$, то

$$\Delta(F, L_a^{(\delta)}) = \Delta(F_\sigma, L_a).$$

Доказательство. Из определений следует, что

$$\Delta(F, L_a^{(\delta)}) = \sum_{x \in Q} (-1)^{F(x) + \text{tr}(ax^\delta)}.$$

Проведя в этом равенстве замену переменных $x = y^\sigma$ и пользуясь равенством функций $\text{tr}(y^{\sigma\delta}) = \text{tr}(y^\tau)$ на Q , получаем, что

$$\Delta(F, L_a^{(\delta)}) = \sum_{y \in Q} (-1)^{F(y^\sigma) + \text{tr}(ay^\tau)} = \Delta(F_\sigma, L_a^{(\tau)}).$$

В частности, отсюда следует, что при фиксированном значении δ набор характеристик $\Delta(F, L_a^{(\delta)})$, $a \in Q$, для функции $F(x)$ совпадает с набором характеристик $\Delta(F_\sigma, L_a)$, $a \in Q$, для функции F_σ , где $\rho(\sigma\delta) = 1$, и изучение собственных мономиальных аналогов для функции $F(x)$ можно свести к изучению линейных аналогов для семейства функций $F_\sigma(x)$, $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$.

Следующее предложение аналогично предложению 1.

Предложение 2. Для функции F следующие условия эквивалентны:

- (а) F — гипер-бент-функция;
- (б) $|\Delta(F, L_a^{(\delta)})| \leq 2^\lambda$ для всех $a \in Q$, $\delta \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$;
- (в) $|\Delta(F, L_a^{(\delta)})| = 2^\lambda$ для всех $a \in Q$, $\delta \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$;
- (г) F_σ — бент-функция для каждого $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$;
- (д) F_σ — гипер-бент-функция для каждого $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) есть следствие определений (1.2) и (3.4).

Импликация (б) $\Rightarrow$ (г) следует из леммы 1 и пунктов (б) и (в) предложения 1.

Импликация (г) $\Rightarrow$ (в) следует из леммы 1 и пунктов (в) и (а) предложения 1.

Импликация (в) $\Rightarrow$ (а) очевидна.

Наконец, согласно лемме 1, совокупность параметров $\Delta(F, L_a^{(\delta)})$, $a \in Q$, $\delta \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$, совпадает с совокупностью параметров $\Delta(F_\sigma, L_a^{(\tau)})$, $a \in Q$, $\tau \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$. Отсюда следует эквивалентность (в) и (д).

Предложение 3. Если F — гипер-бент-функция, то многочлен (2.5) из (2.3) имеет вид

$$\Phi(x) = \sum_{k \in M, \|k\|=\lambda} c_k \xi_k x^k.$$

Доказательство. Так как по предположению 2 F есть бент-функция, по теореме 1 и предположению 1 справедливо неравенство $\text{ind } \Phi \leq \lambda$. Следовательно, в (2.5) могут быть отличны от нуля лишь коэффициенты a_k с номерами k , удовлетворяющими условию $\|k\| \leq \lambda$.

Покажем теперь, что если существует $k \in M$ такое, что

$$\|k\| = t < \lambda, \quad c_k \neq 0, \quad (3.7)$$

то для некоторого $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$ приведенный многочлен $\Phi_\sigma(x)$ из представления

$$F_\sigma(x) = F(x^\sigma) = \text{tr}(\Phi_\sigma(x)) \quad (3.8)$$

удовлетворяет условию

$$\text{ind } \Phi_\sigma > \lambda, \quad (3.9)$$

что противоречит пунктам (а) и (г) предложения 2.

Из (2.3) следует, что функции F_σ удовлетворяет равенству

$$F_\sigma(x) = \text{tr} \left(\sum_{k \in M} c_k \xi_k x^{k'} \right), \quad (3.10)$$

где $k' = \rho(k\sigma)$. Однако полином, стоящий в правой части этого равенства, в общем случае не является приведенным. Для получения приведенного многочлена, представляющего F_σ необходимо в (3.10) каждую из степеней k' заменить числом $k'' = \mu(k')$. При этом $k'' = \rho(k'2^{l_k})$ для некоторого $l_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ и справедливо равенство

$$F_\sigma(x) = \text{tr} \left(\sum_{k \in M} \bar{c}_{k''} \bar{\xi}_{k''} x^{k''} \right),$$

где $\bar{c}_{k''} = c_k^{2^{l_k}}$, $\bar{\xi}_{k''} = \xi_k^{2^{l_k}}$. Отсюда, пользуясь определением элемента $\xi_{k''}$, получаем также равенство

$$F_\sigma(x) = \text{tr} \left(\sum_{k \in M} \bar{c}_{k''} \xi_{k''} x^{k''} \right). \quad (3.11)$$

Нетрудно проверить, что по определению множества M для различных $k_1, k_2 \in M$ и любых $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ числа $\rho(k_1\sigma 2^{l_1})$ и $\rho(k_2\sigma 2^{l_2})$ принадлежат различным циклотомическим классам, и следовательно, соответствующие числа k_1'', k_2'' суть различные числа из M . Другими словами, отображение $g_\sigma: M \rightarrow M$ по правилу $g_\sigma(k) = k'' = \mu(\rho(k\sigma))$ есть подстановка на M . Теперь, полагая $h_\sigma = g_\sigma^{-1}$, из последнего равенства получаем, что приведенный многочлен, представляющий F_σ , есть

$$\Phi_\sigma(x) = \sum_{k'' \in M} \bar{c}_{k''} \xi_{k''} x^{k''} = \sum_{k \in M} c_k^{(\sigma)} \xi_k x^k, \quad (3.12)$$

где $c_k^{(\sigma)} = c_{h_\sigma(k)}^{2^{l_{h_\sigma(k)}}}$. При этом

$$\forall k \in M: (\bar{c}_{k''} \neq 0 \iff c_k \neq 0) \ \& \ \|k''\| = \|\rho(k\sigma)\|.$$

Следовательно, число ненулевых слагаемых в многочлене $\Phi_\sigma(x)$ останется таким же, как в многочлене $\Phi(x)$, и справедливо равенство

$$\text{ind } \Phi_\sigma(x) = \max\{\|\rho(k\sigma)\| : k \in M, c_k \neq 0\}. \quad (3.13)$$

Теперь при условии (3.7) положим $\sigma = 2^n - 2$. Очевидно, что $(\sigma, 2^n - 1) = 1$ и $k\sigma \equiv -k \equiv 2^n - 1 - k \pmod{2^n - 1}$. Следовательно,

$$\rho(k\sigma) = 2^n - 1 - k, \quad \|\rho(k\sigma)\| = n - t > \lambda.$$

Таким образом, ввиду (3.13) для выбранного σ выполняется условие (3.9).

Доказательство теоремы 2. Для завершения доказательства теоремы 2 рассмотрим носитель $S(\Phi)$ многочлена $\Phi(x)$, определяемый при условии (2.5) равенством

$$S(\Phi) = \{k \in M : c_k \neq 0\}. \quad (3.14)$$

Согласно (3.12) для каждого $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$ в обозначениях из доказательства предложения 3 справедливо равенство

$$S(\Phi_\sigma) = \{k'' \in M : k \in S(\Phi)\}.$$

Согласно пунктам (а) и (д) предложения 2 каждая из функций F_σ есть гипер-бент-функция, и следовательно, по предложению 3 каждое $k'' \in S(\Phi_\sigma)$ удовлетворяет условию $\|k''\| = \lambda$. Последнее условие равносильно условию $\|\rho(k\sigma)\| = \lambda$, так как $k'' = \rho(k\sigma 2^{l_k})$

Итак, если $k \in S(\Phi)$, то $\|\rho(k\sigma)\| = \lambda$ для $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$, то есть $S(\Phi) \subseteq M(\lambda)$.

Теорема 2 доказана.

В связи с полученным результатом представляет интерес чисто арифметическая задача описания множества $M(\lambda)$ или оценки его мощности. В этом направлении можно предложить следующие результаты.

Предложение 4. Для любого $n = 2\lambda > 2$ и любого натурального делителя s числа λ справедливо включение

$$\frac{2^n - 1}{2^s + 1} \in M(\lambda), \quad (3.15)$$

в частности,

$$\frac{2^n - 1}{3} \in M(\lambda), \quad 2^\lambda - 1 \in M(\lambda).$$

Для любого $a \in \{1, \dots, 2^\lambda\}$ выполняется включение

$$\mu((2^\lambda - 1)a) \in M(\lambda).$$

Пусть $t \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $m = 1 + 2^n + \dots + 2^{(t-1)n}$. Тогда

$$mM(\lambda) \subseteq M(t\lambda). \quad (3.16)$$

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть $a \in \{1, \dots, 2^s\}$. Тогда число $a(2^s - 1)$ имеет двоичный вес

$$\|a(2^s - 1)\| = s.$$

Доказательство. Для случая, когда a нечетно, это утверждение есть в точности лемма 4 из [12]. Если же $a = 2^t a_1$, где a_1 нечетно, то достаточно заметить, что по упомянутой лемме справедливо равенство $\|a_1(2^s - 1)\| = 2^s$, а двоичное представление числа $a(2^s - 1)$ получается сдвигом на t разрядов двоичного представления числа $a_1(2^s - 1)$.

Доказательство предложения 4. Докажем первое утверждение. Пусть $\lambda = st$, тогда $2^n - 1 = (2^{2s} - 1)(1 + 2^{2s} + \dots + 2^{2s(t-1)})$ и число $k = (2^n - 1)/(2^s + 1)$ имеет вид

$$k = (2^s - 1) + 2^{2s}(2^s - 1) + \dots + 2^{2s(t-1)}(2^s - 1). \quad (3.17)$$

Очевидно, что двоичное разложение этого числа содержит ровно $st = \lambda$ разрядов, равных единице, то есть $\|k\| = \lambda$. Пусть $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$ и a — остаток от деления σ на $2^s + 1$. Тогда $\sigma = d(2^s + 1) + a$, $k\sigma = d(2^n - 1) + ka$, откуда $k\sigma \equiv ka \pmod{2^n - 1}$, и так как $1 \leq ka \leq 2^n - 2$, то $\rho(k\sigma) = ka$.

Из (3.17) следует, что

$$ka = (2^s - 1)a + 2^{2s}(2^s - 1)a + \dots + 2^{2s(t-1)}(2^s - 1)a. \quad (3.18)$$

Так как $1 \leq (2^s - 1)a \leq 2^{2s} - 2$, из (3.18) следует, что n -разрядное двоичное представление числа ka получается t -кратным повторением $2s$ -разрядного двоичного представления числа $(2^s - 1)a$. Теперь, используя лемму 2, получаем, что

$$\|\rho(k\sigma)\| = \|ka\| = t\|(2^s - 1)a\| = ts = \lambda.$$

Докажем второе утверждение. С учетом леммы 2 достаточно доказать, что для любого $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$ справедливо равенство

$$\|\rho((2^\lambda - 1)a\sigma)\| = \lambda. \quad (3.19)$$

Так как $2^\lambda - 1 \mid 2^n - 1$, то $\rho((2^\lambda - 1)a\sigma) = (2^\lambda - 1)b$, где b — остаток от деления $a\sigma$ на $2^\lambda + 1$. Теперь (3.19) следует из леммы 2.

Докажем третье утверждение. По определению включение $k \in M(\lambda)$ равносильно выполнению условия (3.5). Для доказательства (3.16) покажем сначала, что

$$\forall \tau \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\} : \|\rho_{2^t n - 1}(mk\tau)\| = t\lambda. \quad (3.20)$$

Так как $2^{tn} - 1 = m(2^n - 1)$, то

$$\rho_{2^t n - 1}(mk\tau) = m\rho_{2^n - 1}(k\tau) = m\rho_{2^n - 1}(k\rho_{2^n - 1}(\tau)).$$

Так как $\rho_{2^n - 1}(\tau) \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$, ввиду (3.5) число $a = \rho_{2^n - 1}(k\rho_{2^n - 1}(\tau))$ имеет норму $\|a\| = \lambda$, и так как $a < 2^n$, то

$$\|\rho_{2^t n - 1}(mk\tau)\| = \|ma\| = \|a + 2^n a + \dots + 2^{(t-1)n} a\| = t\|a\| = t\lambda,$$

то есть верно (3.20).

Теперь остается доказать, что mk — наименьшее число в циклотомическом классе $\{mk, \rho_{2^{t'n-1}}(mk2), \dots, \rho_{2^{t'n-1}}(mk2^{n-1})\}$. Каждое из чисел $K = \rho_{2^{t'n-1}}(mk2^s)$ имеет вид

$$K = m\rho_{2^{t'n-1}}(k\rho_{2^{t'n-1}}(2^s)) = m\rho_{2^{t'n-1}}(k2^r),$$

где r — остаток от деления s на n . По определению множества M справедливо неравенство $k < \rho_{2^{t'n-1}}(k2^r)$, поэтому $mk < K$.

Все три утверждения предложения 4 доказаны.

Будем называть элементы $k, l \in M(\lambda)$ ассоциированными и писать $k \sim l$, если $l = \rho(k\sigma)$ для некоторого $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$. Очевидно, что $\sim$ есть отношение эквивалентности на $M(\lambda)$. Обозначим через $[k]$ класс чисел из $M(\lambda)$, ассоциированных с k .

Предложение 5. Пусть $k \in M(\lambda)$ и $d = (k, 2^n - 1)$. Тогда $d \in [k]$ и d — единственный делитель числа $2^n - 1$, принадлежащий классу $[k]$.

Доказательство. Рассмотрим кольцо $R = \mathbb{Z}_{2^n-1}$ с операцией умножения, обозначаемой точкой. По условию имеет место равенство идеалов

$$R \cdot k = R \cdot d.$$

По теореме 20.9 в [7] существует обратимый элемент $\sigma \in R^*$ такой, что $d = k \cdot \sigma$. Так как $d \neq 0$, последнее равенство дает равенство $d = \rho(k\sigma)$. Следовательно, $d \in [k]$. Если $d' \in [k]$ и $d' \mid_{\mathbb{Z}} 2^n - 1$, то $R \cdot k = R \cdot d'$ и $d = d'$, так как идеал $R \cdot k$ содержит единственный образующий, делящий $2^n - 1$, именно, наименьший ненулевой элемент из $R \cdot k$.

Следствие 1. Пусть $D(\lambda)$ — множество чисел $d \in M(\lambda)$, делящих $2^n - 1$. Тогда

$$M(\lambda) = \bigcup_{d \in D(\lambda)} [d],$$

где $[d]$ — класс чисел из множества $M(\lambda)$, ассоциированных с d .

Таким образом, для перечисления всех элементов множества $M(\lambda)$ достаточно перечислить лишь те из них, которые делят $2^n - 1$, то есть составляют множество $D(\lambda)$. Затем для каждого $d \in D(\lambda)$, следует вычислить все числа $\rho(d\sigma)$, $\sigma \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$. Множество этих чисел есть, очевидно, объединение циклотомических классов, и каждое из этих чисел по определению $M(\lambda)$ имеет норму λ . Множество минимальных элементов из указанных циклотомических классов и составляет множество $[d]$ из формулировки следствия 1.

Компьютерные вычисления для $\lambda \in \{2, 3, \dots, 30\}$ дали результаты, приведенные ниже в табл. 1, где символом * помечены те элементы множества $M(\lambda)$, существование которых не вытекает из предложения 4.

4. Один класс гипер-бент-функций

Прежде всего приведем результат из [12], описывающий единственный известный до сих пор класс гипер-бент-функций. Наши формулировка и доказательство этого результата представляются более короткими.

Заметим, что мультипликативная группа поля $Q = GF(2^n)$ с единицей e есть прямое произведение $Q^* = A \times B$, где A есть мультипликативная группа поля $K = GF(2^\lambda)$, B — группа порядка $2^\lambda + 1$.

Теорема 3. Пусть $G: B \cup \{0\} \rightarrow P$ — функция, принимающая значение e ровно t раз и $G(0) = 0$. Тогда функция

$$F(x) = G(x^{2^\lambda - 1})$$

на Q есть гипер-бент-функция, если и только если $t = 2^{\lambda-1}$.

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 3. В обозначениях (1.1) справедливы соотношения

$$\Delta(F, \text{tr}) = \begin{cases} 2t, & \text{если } G(e) = 0, \\ -2^{\lambda+1} + 2t, & \text{если } G(e) = 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Доказательство. Пользуясь определением и разложением $Q^* = A \dot{\times} B$ получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta(F, \text{tr}) &= \sum_{x \in Q} (-1)^{F(x) + \text{tr}(x)} = 1 + \sum_{x \in Q^*} (-1)^{F(x) + \text{tr}(x)} = 1 + \sum_{y \in A} \sum_{z \in B} (-1)^{F(yz) + \text{tr}(yz)} \\ &= 1 + \sum_{y \in A} \sum_{z \in B} (-1)^{G(z^{2^\lambda - 1}) + \text{tr}_P^Q(yz)} = 1 + \sum_{z \in B} (-1)^{G(z^{-2})} \sum_{y \in A} (-1)^{\text{tr}_P^K(\text{tr}_K^Q(z)y)}, \\ K &= GF(2^\lambda). \end{aligned}$$

Заметим, что для любого $z \in B$ справедливо равенство

$$\text{tr}_K^Q(z) = z + z^{2^\lambda} = z + z^{-1},$$

так как $z^{2^\lambda + 1} = 1$. В частности, $\text{tr}_K^Q(1) = 0$, и если $z \in B \setminus \{1\}$, то $\text{tr}_K^Q(z) \neq 0$, так как иначе $z^{-1} = z$ и $z^2 = 1$, что невозможно.

Таким образом, сумма $\sum_{y \in A} (-1)^{\text{tr}_P^K(\text{tr}_K^Q(z)y)}$ равна $2^\lambda - 1$, если $z = e$, и, ввиду условия $A = K^*$, равна -1 , если $z \in K \setminus \{e\}$. Отсюда

$$\Delta(F, \text{tr}) = 1 + (-1)^{G(e)}(2^\lambda - 1) - \sum_{z \in B \setminus \{e\}} (-1)^{G(z)}.$$

Из последнего равенства следует, что если $G(e) = 0$, то

$$\begin{aligned} \sum_{z \in B \setminus \{e\}} (-1)^{G(z)} &= |B| - 1 - 2t = 2^\lambda - 2t, \\ \Delta(F, \text{tr}) &= 1 + (2^\lambda - 1) - (2^\lambda - 2t) = 2t, \end{aligned}$$

если же $G(e) = 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{z \in B \setminus \{e\}} (-1)^{G(z)} &= |B| - 1 - 2(t - 1) = 2^\lambda - 2t + 1, \\ \Delta(F, \text{tr}) &= 1 - (2^\lambda - 1) - (2^\lambda - 2t + 1) = -2^{\lambda+1} + 2t. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3. Заметим теперь, что равенство

$$\Delta(F(x), \text{tr}(\xi x^\delta)) = \Delta(F'(x), \text{tr}(x)) \quad (4.2)$$

справедливо для любых $\xi \in Q^*$, $\delta \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$ где $F'(x) = F(\sigma x^\mu)$, $\sigma = \xi^{-1}$, $\mu \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$, $\rho(\mu\delta) = 1$. При этом $F'(x) = G'(x^{2^\lambda-1})$, где $G'(x) = G(\sigma^{2^\lambda-1}x^\mu)$. Ясно, что соответствие $x \rightarrow \sigma^{2^\lambda-1}x^\mu$ задает подстановку на $B \cup \{0\}$ и функция $G': B \cup \{0\} \rightarrow P$, так же, как и G , принимает значение e ровно t раз. Таким образом, ввиду равенства (4.2) и леммы 3 функция F из условия теоремы удовлетворяет следующему условию: для любых $\xi \in Q^*$, $\delta \in \{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} : (k, 2^n - 1) = 1\}$ справедливо включение $\Delta(F(x), \text{tr}(\xi x^\delta)) \in \{2t, -2^{\lambda+1} + 2t\}$ и F есть гипер-бент-функция в точности если $t = 2^{\lambda-1}$.

Для некоторых значений n гипер-бент-функции, описанные в последней теореме, исчерпывают весь класс гипер-бент-функций.

Теорема 4. Пусть все числа множества $M(\lambda)$ делятся на $2^\lambda - 1$. Тогда в обозначениях теоремы 3 произвольная функция $F: Q \rightarrow P$ со свойством $F(0) = 0$ есть гипер-бент-функция в точности если она имеет вид

$$F(x) = G(x^{2^\lambda-1}), \quad (4.3)$$

где

$$G: B \cup \{0\} \rightarrow P, \quad G(0) = 0, \quad (4.4)$$

и G принимает на B значение e ровно $2^{\lambda-1}$ раз.

Доказательство. По условию каждый элемент $k \in M(\lambda)$ имеет вид $k = k_1(2^\lambda - 1)$. Тогда по формуле (3.6) многочлен $\Phi(x)$ из (2.3) имеет вид

$$\Phi(x) = \sum_{k \in M(\lambda)} c_k \xi_k (x^{2^\lambda-1})^{k_1}.$$

Отсюда для F получается нужное выражение (4.3). Остается заметить, что по теореме 3 сформулированные условия на функцию (4.4) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы функция F была гипер-бент-функцией.

Следующий результат описывает некоторое множество значений параметра n , удовлетворяющих условию теоремы 4.

Предложение 6. Пусть $n = 2\lambda > 4$ и $p = 2^\lambda - 1$ — простое число, тогда все элементы множества $M(\lambda)$ делятся на p и все гипер-бент-функции от n аргументов описываются теоремой 4.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $d \in M(\lambda)$ и $d \mid 2^n - 1$, то $p \mid d$, так как любое число $k \in M(\lambda)$, имея по предложению 5 вид $k = \rho(d\sigma)$, делится на p .

Если $\|d\| = \lambda > 2$ и $d \neq 2^\lambda - 1$, то $d > 2^\lambda + 1$, поскольку $d \geq 2^\lambda - 1$, $\|2^\lambda\| = 1$, $\|2^\lambda + 1\| = 2$. Следовательно, $(d, 2^\lambda - 1) = (d, p) > 1$ и $p \mid d$, так как p — простое число.

В дополнение к предложению 6 следует отметить, что если $n = 4$, то, несмотря на то, что $\lambda = 2$ и $2^\lambda - 1 = 3$ — простое число, множество $M(\lambda) = M(2)$ содержит число 5, не делящееся на $2^\lambda - 1$. Более того, компьютерные вычисления показывают, что среди функций со свойством $F(0) = 0$, помимо десяти функций, описываемых теоремой 4, существуют еще 18 гипер-бент-функций. Все гипер-бент-функции для $n = 4$ описаны в табл. 2.

Таблица 1. Множества $D(\lambda)$ для $\lambda = 2, \dots, 30$

λ	Делители d числа $2^n - 1$, принадлежащие $M(\lambda)$, $n = 2\lambda$	Двоичная запись d
2	Варианты $d \in D(\lambda)$	
3	3	0011
	5	0101
3	7	000111
	21=3·7	010101
4	15	00001111
	51	00110011
	85=5·17	01010101
5	31	0000011111
	93=31·3	0001011101
	341=31·11	0101010101
6	63	000000111111
	315=63·5	000100111011
	455	000111000111
	819=63·13	001100110011
	1365=21·65	010101010101
7	127	00000001111111
	381=127·3	00000101111101
	5461=127·43	01010101010101
8	255	0000000011111111
	3855=15·257	0000111100001111
	13107=51·257	0011001100110011
	21845=85·257	0101010101010101
9	511	000000000111111111
	1533=511·3	000000010111111101
	4599=511·9	000001000111110111
	9709=511·19	000010010111101101
	13797=511·27	000011010111100101
	29127=511·57	000111000111000111
	87381=511·171	010101010101010101
10	1023	00000000001111111111
	5115=1023·5	00000001001111111011
	25575=1023·25	00000110001111100111
	31775=31·1023	00000111110000011111
	41943=1023·41	00001010001111010111
	95325	00010111010001011101
	209715=1023·205	00110011001100110011
	349525=341·1023	01010101010101010101
11	2047	0000000000001111111111
	6141=2047·3	0000000001011111111101
	60787 *	0000001110110101110011
	1398101=2047·683	0101010101010101010101
12	4095	000000000000111111111111
	69615=4095·17	000000010000111111101111
	258111	000000111111000000111111
	986895=4095·241	000011110000111100001111
	1290555	000100111011000100111011
	1864135	000111000111000111000111
	3355443	001100110011001100110011
	5592405=1365·4097	010101010101010101010101
13	8191	00000000000000111111111111
	24573=8191·3	00000000000101111111111101
	22369621=8191·2731	01010101010101010101010101
14	16383	0000000000000001111111111111
	81915=16383·5	0000000000010011111111111101
	475107=16383·29	00000000011100111111111100011

Делители d числа $2^n - 1$, принадлежащие $M(\lambda)$, $n = 2\lambda$ (продолжение)		
λ	Варианты $d \in D(\lambda)$	Двоичная запись d
14	1851279=16383·113	000000011100001111110001111
	2080895	000000011111100000001111111
	2375535=16383·145	000000100100001111101101111
	6242685	0000010111110100000101111101
	9256395=16383·565	000010001010011110111001011
	53687091=16383·3277	0011001100110011001100110011
	89478485=5461·16385	0101010101010101010101010101
15	32767	00000000000000011111111111111
	98301=32767·3	000000000000010111111111111101
	294903=32767·9	000000000001000111111111111011
	360437=32767·11	0000000000010101111111111110101
	1081311=32767·33	000000000100000111111111101111
	3243933=32767·99	0000000011000101111111110011101
	10845877=32767·331	000000101001010111111010110101
	13944699 *	000000110101001100011101111011
	32537631=32767·993	00000111100000111110000011111
	97612893=32767·2979	000101110100010111010001011101
	119304647	000111000111000111000111000111
	357913941=32767·10923	010101010101010101010101010101
16	65535	000000000000000011111111111111
	16711935=255·65537	000000001111111000000001111111
	252645135=3855·65537	00001111000011110000111100001111
	858993459=13107·65537	00110011001100110011001100110011
	1431655765=21845·65537	010101010101010101010101010101
17	131071	000000000000000001111111111111
	393213=131071·3	0000000000000001011111111111101
	5726623061=131071·43691	010101010101010101010101010101
18	262143	000000000000000001111111111111
	1310715=262143·5	000000000000000100111111111111011
	3407859=262143·13	000000000000000110011111111110011
	9699291=262143·37	0000000000010010011111111111011011
	17039295=262143·65	0000000000010000001111111111011111
	28573587=262143·109	00000000000110110011111111110010011
	48496455=262143·185	0000000000101110001111111110100011
	126090783=262143·481	00000000011110000011111111100001111
	133956095=511·262145	0000000001111111100000000011111111
	142867935=262143·545	00000000100010000011111110111011111
	241120971=4599·52429 *	000000001110010111110011011011001011
	371456631=262143·1417	00000001011000100011111101001110111
	401868285=1533·262145	00000001011111110100000001011111101
	630453915=262143·2405	000000100101100100111111011010011011
	1057222719=262143·4033	000000111111000000111111000000111111
	1205604855=4599·262145	000001000111110111000001000111110111
	1857283155=262143·7085	000001101110101100111110010001010011
	2545165805=9709·262145	0000100101111101101000010010111101101
	3616814565=13797·262145	00001101011110010100001010111100101
	5286113595=262143·20165	000100111011000100111011000100111011
	7635497415=29127·262145	000111000111000111000111000111000111
	13743895347=262143·52429	001100110011001100110011001100110011
	22906492245=87381·262145	010101010101010101010101010101010101
19	524287	0000000000000000000111111111111111
	1572861=524287·3	00000000000000000101111111111111101
	91625968981=524287·174763	010101010101010101010101010101010101
20	1048575	0000000000000000000111111111111111
	17825775=1048575·17	000000000000000010000111111111111111
	1072694271=1023·1048577	000000000011111111100000000011111111
	5363471355=5115·1048577	00000001001111111011000000100111111011
	26817356775=25575·1048577	0000011000111110011100000110001111100111

Делители d числа $2^n - 1$, принадлежащие $M(\lambda)$, $n = 2\lambda$ (продолжение)		
λ	Варианты $d \in D(\lambda)$	Двоичная запись d
20	33318534175=31775·1048577	00000111110000011110000011110000011111
	43980465111=41943·1048577	00001010001111010110000101000111101011
	64677154575=1048575·61681	000011100001111000011110000111100001111
	99955602525=95325·1048577	0001011101000101110100010111010001011101
	219902325555=209715·1048577	0011001100110011001100110011001100110011
	366503875925=349525·1048577	01010101010101010101010101010101010101
21	2097151	0000000000000000000011111111111111111111
	6291453=2097151·3	00000000000000000000101111111111111111101
	18874359=2097151·9	00000000000000000001000111111111111111011
	90177493=2097151·43	000000000000000101010111111111111111010101
	270532479=2097151·129	000000000000010000000111111111111101111111
	811597437=2097151·387	000000000000110000010111111111111100111101
	11364461269=2097151·5419	000000001010100101010111111110101011010101
	34093383807=2097151·16257	0000000111111000000011111100000001111111
	102280151421=2097151·48771	00000101111101000001011111010000010111101
	488671834567=2097151·233017	000111000111000111000111000111000111000111
	1466015503701=2097151·699051	01
22	4194303	0000000000000000000011111111111111111111
	20971515=4194303·5	00000000000000000001001111111111111111011
	1665138291=4194303·397	000000000000010001100111111111111100110011
	8325691455=4194303·1985	000000000001111000000111111111100000111111
	8585742335=2047·4194305	00000000000111111111000000000001111111111
	8862562239=4194303·2113	00000000001000010000000000011111110111101111
	25757227005=6141·4194305	00000000010111111101000000000101111111101
	44312811195=4194303·10565	000000001010010100010011111111010101011011
	50991843607=60787·838861 *	0000000010111011111010110011100100100010111
	254959218035=60787·4194305	0000001101010111001100000011010101110011
	3518437208883=4194303·838861	00110011001100110011001100110011001100110011
	5864062014805=1398101·4194305	01
23	8388607	00000000000000000000000011111111111111111111
	25165821=8388607·3	00000000000000000000000101111111111111111101
	499069107643=178481·2796203	0000000110100001100101101011000111010111011
	23456248059221=8388607·2796203	01
24	16777215	00000000000000000000000011111111111111111111
	1627389855=16777215·97	0000000000000000001100000111111111111110011111
	4311744255=16777215·257	0000000000000000100000000111111111111101111111
	11291065695=16777215·673	0000000000000010101000011111111111110101011111
	68702703615=4095·16777217	0000000000001111111111100000000000011111111111
	418239192735=16777215·24929	00000000011000010110000011111111001111010011111
	1095233372415=16777215·65281	0000000011111110000000011111110000000011111111
	1167945961455=69615·16777217	00000001000011111110111100000001000011111101111
	2901803883615=16777215·172961	0000001010100011101000001111101010110001011111
	4330384257087=258111·16777217	000000111111000000111111000000011111000000111111
	16557351571215=986895·16777217	00001111000011110000111100001110000111100001111
	21651921285435=1290555·16777217	000100111011000100111011000100111011000100111011
	31274997412295=1864135·16777217	000111000111000111000111000111000111000111000111
	56294995342131=3355443·16777217	00110011001100110001100011001100110011001100110011
	93824992236885=5592405·16777217	01
25	33554431	00000000000000000000000011111111111111111111
	100663293=33554431·3	0000000000000000000000001011111111111111111101
	369098741=33554431·11	00000000000000000000000101011111111111111110101
	1107296223=33554431·33	00000000000000000000100000111111111111111101111
	8422162181=33554431·251	000000000000000000001011010111111111111100000101
	25266486543=33554431·753	00000000000000010111000011111111111110100001111
	92643783991=33554431·2761	0000000000000101011001000111111111111010100110111
	135928999981=33554431·4051	000000000000011111010010111111111111000000101101
	277931351973=33554431·8283	0000000000010000001011010111111111110111110100101
	407786999943=33554431·12153	0000000000010111101110001111111111101000010000111

[illegible]

Делители d числа $2^n - 1$, принадлежащие $M(\lambda)$, $n = 2\lambda$ (продолжение)	
λ Варианты $d \in D(\lambda)$	Двоичная запись d
303547450783405683	
=1073741823-3303821	000000001100100110100110001100111111110011011001011001110011
3780070506907695	
=1073741823-3520465	000000001101011011011111010000111111110010100100100000101111
5624007339545595	
=1073741823-5237765	0000000010011111110110000000100111111101100000001001111111011
11645671763705525	
=10845877-1073741825	0000000101001010111111010110101000000101001010111111010110101
14973006553335675	
=13944699-1073741825	0000000110101001100011101111011000000110101001100011101111011
17737253917028415	
=1073741823-16519105	000000011111000000111111000000111111000000111111000000111111
18900352534538475	
=1073741823-17602325	000001000011001001011100010100111110111100110110100011101011
28120036697727975	
=1073741823-26188825	000001100011111001110000011000111110011100000110001111100111
34937015291116575	
=32537631-1073741825	000001111100000111110000011111000001111100000111110000011111
46116860184273879	
=1073741823-42949673	000010100011110101110000101000111101011100001010001111010111
88686269585142075	
=1073741823-82595525	0001001110110001001110110001001110110001001110110001001110111
104811045873349725	
=97612893-1073741825	000101110100010111010001011101000101110100010111010001011101
128102389400760775	
=119304647-1073741825000111000111000111000111000111000111000111000111	
230584300921369395	
=1073741823-214748365001100110011001100110011001100110011001100110011	
384307168202282325	
=357913941-107374182501	

5. Заключение

Помимо значений $n = 2\lambda$, удовлетворяющих условию предложения 6, существуют также и другие значения n , для которых все числа из $M(\lambda)$ делятся на $2^\lambda - 1$, и следовательно, все гипер-бент-функции от n переменных описываются теоремой 3. Так, из приведенной выше табл. 1 видно, что, помимо чисел $n = 2\lambda \in \{6, 10, 14, 26, 34, 38, 58\}$, для которых $2^\lambda - 1$ — простое число, это условие выполняется также для чисел $n \in \{18, 50, 54\}$.

Компьютерные вычисления показали, что существует точно 18 гипер-бент-функций от $n = 4$ переменных, сохраняющих 0 и не удовлетворяющих условию теоремы 3.

Более того, компьютерные вычисления показали также, что, хотя множество $M(4)$ и содержит числа, не делящиеся на $2^\lambda - 1 = 15$, тем не менее, все гипер-бент-функции от 8 переменных суть в точности гипер-бент-функции, описанные теоремой 3.

Вопрос, существуют ли гипер-бент-функции от $n > 4$ переменных, не удовлетворяющие условию теоремы 3, остается открытым.

Таблица 2. ГБ-функции от $n = 4$ переменных, сохраняющие 0

Согласно табл. 1, справедливо равенство $D(2) = \{3, 5\}$. Несложные вычисления с помощью следствия 1 показывают, что $M(2) = D(2)$. Пусть $\theta \in Q = GF(4)$ – примитивный элемент, являющийся корнем многочлена $x^4 + x + 1$. Тогда согласно теореме 2 любая ГБ-функция $F: Q \rightarrow P$, $F(0) = 0$, однозначно представляется в виде

$$F(x) = \text{tr}_P^Q(c_3\xi_3x^3 + c_5\xi_5x^5), \quad (4.5)$$

где $\xi_3 = 1$, $c_3 \in Q_3 = Q$, $\xi_5 = \theta$, $c_5 \in Q_5 = GF(2)$. Ниже приводятся пары значений c_3 , c_5 и соответствующие наборы значений $(F(0), F(1), F(\theta), \dots, F(\theta^{14}))$, при которых функция (4.5) есть ГБ-функция. При этом значение c_r задается числом $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3$, которое соответствует представлению

$$c_r = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in GF(2).$$

Ситуации, когда $c_5 = 0$, соответствуют ГБ-функциям, которые описаны теоремой 3.

c_3	c_5	Значения ГБФ	c_3	c_5	Значения ГБФ
0	1	00011011011011011	12	6	00001101000001011
0	6	00110110110110110	12	7	00010110011010000
0	7	00101101101101101	11	0	00101001010010100
1	1	00000101100110100	5	0	00011000110001100
1	6	00101000001011001	10	1	00101100110100000
1	7	00110011010000010	10	6	00000001011001101
2	0	00001010010100101	10	7	00011010000010110
4	0	00000110001100011	7	0	00010010100101001
8	1	00100110100000101	14	0	00110001100011000
8	6	00001011001101000	15	1	00110100000101100
8	7	00010000010110011	15	6	00011001101000001
3	0	00010100101001010	15	7	00000010110011010
6	0	00001100011000110	13	0	00100101001010010
12	1	00100000101100110	9	0	00100011000110001

Список литературы

1. Golomb S. W., On the classification of Boolean functions. *Trans. JRE* CT-6, 1959.
2. Zierler N., Mills W. H., Products of linear recurring sequences. *J. Algebra* (1973) **27**, №1, 147–157.
3. Rothaus O. S., On “bent” functions. *J. Comb. Theory, Ser. A* (1976) **20**, №3, 300–305.
4. Dillon J. F., A survey of bent functions. *NSA Technical J.* (1972) 191–215.
5. Gong G., Golomb S. W., *Transform domain analysis of DES*. Techn. Rep., Univ. Waterloo, Canada, 1998.
6. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А., *Алгебра*, ч. 2. Гелиос, Москва, 2003.
7. Lam T. Y., *A first course in noncommutative rings*. Springer, Berlin, 1991.
8. Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*, т. 1, 2. Мир, Москва, 1988.
9. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж., *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Связь, Москва, 1979.
10. Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В., О свойствах сумм Вейля на конечных полях и конечных абелевых группах. *Дискретная математика* (1999) **11**, №2, 66–85.
11. Постников М. М., *Введение в теорию алгебраических чисел*. Наука, Москва, 1982.
12. Youssef A. M., Gong G., Hyper-bent functions. *Lect. Notes Comput. Sci.* (2001) **2045**, 406–419.

Статья поступила 25.01.2006.