Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, Д. В. Падучих, Расширения $GQ(4, 2)$,
вполне регулярный случай, *Дискрет. матем.*, 2001,
том 13, выпуск 3, 91–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:16:34

Расширения $GQ(4, 2)$, вполне регулярный случай

© 2001 г. А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Известно описание расширений обобщенных четырехугольников $GQ(s, t)$ с флаг-транзитивной группой автоморфизмов. Для $s = 3$ в ряде работ получено описание расширений без каких-либо предположений о действии группы автоморфизмов. При изучении расширений $GQ(4, 2)$ ранее первым автором было исследовано строение гиперовалов из $GQ(4, 2)$ и доказано, что вполне регулярные локально $GQ(4, 2)$ графы с $\mu = 10$ не существуют. В работе завершена классификация вполне регулярных локально $GQ(4, 2)$ графов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99-01-00462.

1. Введение

Геометрия G ранга 2 — это система инцидентности с множеством точек $\mathcal{P}$ и множеством блоков $\mathcal{B}$ (без кратных блоков). При этом каждый блок можно отождествить с множеством инцидентных ему точек, и инцидентность становится обычным включением. Две различные точки из $\mathcal{P}$ называются коллинеарными, если они лежат в общем блоке.

Пусть $a \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{B}$ и $a \notin B$ (пара (a, B) называется антифлагом). Число точек из B , коллинеарных a , обозначим через $f(a, B)$. Геометрия G называется φ -однородной, если $f(a, B) = 0$ или $f(a, B) = \varphi$ для любого антифлага (a, B) , G называется сильно φ -однородной, если $f(a, B) = \varphi$ для любого антифлага (a, B) . Если любые два блока из $\mathcal{B}$ пересекаются не более чем в одной точке, то множество блоков называют множеством прямых.

Геометрия G называется обобщенным четырехугольником порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой и геометрия является сильно 1-однородной (в этом случае используется обозначение $GQ(s, t)$). Геометрия $GQ(s, t)$ однозначно восстанавливается по своему точечному графу. Мы будем обозначать точечный граф обобщенного четырехугольника порядка (s, t) также через $GQ(s, t)$.

Для вершины a графа Γ через $[a]$ обозначим окрестность вершины a , то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех смежных с a вершин. Положим $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Для подграфа Δ из Γ через $K_i(\Delta)$ обозначим множество вершин вне Δ , смежных с i вершинами из Δ . Полный двудольный граф с долями порядков m , n обозначим через $K_{m,n}$.

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем локально $\mathcal{F}$ -графом, если $[a]$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ . Если при этом класс $\mathcal{F}$ состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ , то граф Γ назовем локально Δ -графом.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число точек в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ ($\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом). Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ ($c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $[w]$ с $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$). Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ . Заметим, что для любого дистанционно регулярного графа b_0 — это валентность графа, $c_1 = 1$. Дистанционно регулярный граф Γ диаметра d называется антиподальным, если отношение для двух вершин совпадает или находится на расстоянии d является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Если r — число вершин в классе эквивалентности, а $\bar{\Gamma}$ — фактор-граф по этому отношению эквивалентности, то Γ называется r -накрытием $\bar{\Gamma}$.

Подграф точечного графа $GQ(s, t)$ называется гипервалом, если он является регулярным графом без треугольников валентности $t + 1$ с четным числом вершин. Коклика из $st + 1$ точек в $GQ(s, t)$ называется овоидом. Заметим, что в локально $GQ(s, t)$ -графах в качестве μ -подграфов могут выступать лишь гипервалы. В [1] были описаны локально полярные пространства с $s = 2$ (в частности, локально $GQ(2, t)$ -графы). В работе [2] классифицированы сильно регулярные локально $GQ(3, t)$ -графы. В [3] получено описание гипервалов в $GQ(4, 2)$, а в теореме 2 из [4] описаны вполне регулярные локально $GQ(4, 2)$ -графы с $\mu = 10$.

Цель данной работы — классификация вполне регулярных локально $GQ(4, 2)$ -графов.

Теорема 1. *Вполне регулярный локально $GQ(4, 2)$ -граф является одним из следующих графов:*

- (1) *единственный сильно регулярный локально $GQ(4, 2)$ -граф с параметрами $(126, 45, 12, 18)$;*
- (2) *единственный дистанционно регулярный локально $GQ(4, 2)$ -граф на 378 вершинах с массивом пересечений $(45, 32, 12, 1; 1, 6, 32, 45)$ (это 3-накрытие графа из пункта 1).*

Хорошо известно [5], что существует единственный $GQ(4, 2)$, обозначаемый через $H_3(4)$. Пусть Γ — точечный граф для $H_3(4)$. Тогда Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(45, 12, 3, 3)$, в котором каждая пара точек регулярна, то есть, если a, b — несмежные точки, то Γ содержит единственную, отличную от a, b , точку c , смежную со всеми тремя точками из $[a] \cap [b]$.

Существование и единственность локально $GQ(4, 2)$ -графа с параметрами $(126, 46, 12, 8)$ доказаны в [6]. Это граф на множестве векторов нормы 1 в 6-мерном ортогональном пространстве над $GF(3)$ типа минус с отношением смежности, задаваемым ортогональностью, имеющей группу автоморфизмов $O_6^-(3)$. Там же сформулировано утверждение о существовании и единственности вполне регулярного локально $GQ(4, 2)$ -графа с $\mu = 6$ и приведена конструкция этого графа. Доказательство нашей теоремы существенно опирается на следующее утверждение о гипервалах в $H_3(4)$.

Рис. 1. 3-накрытие клики

Предложение 1. Пусть Γ — точечный граф для $H_3(4)$ и Λ является 3-валентным подграфом из Γ без треугольников с четным числом вершин μ . Положим $K_i = K_i(\Lambda)$, $x_i = |K_i|$. Если $\mu \neq 6, 10, 14, 18$, то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $\mu = 8$, Λ — кубический подграф, $x_0 = 7$, $x_2 = 24$, $x_4 = 6$, $x_6 = 0$, причем $z^\perp = K_0 \cap K_4$ для некоторой точки $z \in K_0$;
- (2) $\mu = 12$ и либо
 - (a) $x_0 = 6$, $x_2 = x_6 = 0$, $x_4 = 27$, K_0 является $K_{3,3}$ -подграфом, а Λ — объединение двух $K_{3,3}$ -подграфов; либо
 - (b) $x_0 = x_6 = 3$, $x_2 = 9$, $x_4 = 18$, $K_0 \cap K_6 \cap \Lambda$ — овоид для некоторой 3-кликки $\Delta \subset \Lambda$, подграф Λ является 3-накрытием 4-кликки и изображен на рис. 1 (вершины из Δ будем называть концевыми); либо
 - (c) $x_0 = 4$, $x_2 = 6$, $x_4 = 21$, $x_6 = 2$, K_2 является шестиугольником, окрестности точек из K_6 расщепляют Λ , $z^\perp$ содержит K_0 для некоторой точки $z \in K_0$ и Λ является 6-призмой, изображенной на рис. 2; либо
 - (d) $x_0 = 2$, $x_2 = 12$, $x_4 = 15$, $x_6 = 4$, вершины из K_0 смежны и подграф Λ изображен на рис. 3;
- (3) $\mu = 16$, $x_0 = 1$, $x_2 = 0$, $x_4 = 12$, $x_6 = 16$ и $z^\perp = K_4$ для $z \in K_0$.

Доказательство. Утверждение предложения 1 является частью теоремы из [3]. В случае $\mu = 12$ мы уточняем теорему. Формулировка леммы 3.6 из [3] должна быть изменена следующим образом: если $\mu = 12$ и Γ содержит внешнюю прямую с 4 точками из K_2 , то $x_0 = 2$, $x_6 = 4$ и K_0 состоит из двух смежных вершин.

Рис. 2. 6-призма (6-призма Мебиуса)

Доказательство леммы 3.6 проведено корректно, за исключением случая, когда $x_0 = 2$ и K_0 состоит из двух смежных вершин.

Пусть $a \in K_6$. Если подграф $\Lambda - [a]$ не содержит изолированных вершин, то Λ изоморфен одному из графов представленных на рис. 10 [3]. Легко понять, что Λ в этом случае является 6-призмой, или 6-призмой Мебиуса. Покажем, что 6-призма Мебиуса не возникает. Предположим, что Λ является 6-призмой Мебиуса (на рис. 2 вместо ребер 16, 1'6' надо вставить ребра 16', 61'). Выберем произвольное ребро с нижней грани, для определенности будем рассматривать ребро 12. По определению Γ оно лежит на единственной прямой L , и каждая вершина i , $i = 3, \dots, 6$, и j' , $j = 1, \dots, 6$, смежна с единственной вершиной из L . Таким образом, для остальных вершин v_1, v_2, v_3 из $L - \{1, 2\}$, справедливо включение

$$\Lambda - (1^\perp \cup 2^\perp) \subset v_1^\perp \cup v_2^\perp \cup v_3^\perp.$$

Заметим, что прямая L может иметь только один из двух типов: она содержит либо по одной вершине из K_2, K_4, K_6 , либо три вершины из K_4 .

Это значит, что подграф $\Lambda - (a_1^\perp \cup a_2^\perp)$ должен расщепляться тремя ребрами, что, как легко видеть из рис. 2, невозможно.

Пусть теперь подграф $\Lambda - [a]$ содержит изолированную вершину x . В силу регулярности пары a, x найдется третья вершина y , смежная с тремя вершинами из

Рис. 3. Гипервал типа (d)

$\Lambda \cap [a]$. Как и в лемме 3.7 из [3] доказывается, что $y \in K_6$ (см. рис. 4). Пусть

$$\{u, w\} = \Lambda - ([a] \cup x^\perp \cup [y]).$$

Если uw — не ребро, то при доказательстве леммы 3.7 в [3] установлено, что Λ является 3-накрытием 4-клики. Пусть теперь uw — ребро. Между $\{u, w\}$ и $\Lambda \cap ([a] \cup [y])$ имеется 4 ребра, поэтому $\Lambda - x^\perp$ содержит две вершины, не смежные с u и w . Как и в доказательстве леммы 3.7 из [3], устанавливается, что $\Lambda - [a]$ состоит из 3-лапы и двух изолированных вершин, поэтому мы можем восстановить подграф из Λ с рис. 4, где, без ограничения общности, вершина d_2 смежна с b_3 .

Так как прямая, проходящая через ребро b_3c_3 , содержит a и вершину из K_4 , две вершины из Λ , не смежные с вершинами из $\Lambda \cap [a]$, смежны, поэтому d_3w — ребро.

Теперь либо d_2w, a_1d_3 — ребра и Λ является графом из заключения предложения, либо d_3w, a_1d_2 — ребра. Но в последнем случае мы имеем два 4-угольника $ub_1d_2b_3$ и $wd_1b_2d_3$, причем $c_2 \in [b_2] \cap [d_2]$. Тогда $[u] \cap [d_2]$ содержит b_1, b_3 и вершину, смежную с ребрами uw, c_2d_2 . Аналогично, $[w] \cap [b_2]$ содержит d_1, d_3 и вершину, смежную с ребрами uw, c_2b_2 , получаем противоречие. Предложение доказано.

Замечание 1. По кубическому подграфу можно восстановить $H_3(4)$.

Пусть множество точек состоит из вершин $1, \dots, 8$ куба Λ (см. рис. 5), двадцати четырех реберных точек (с каждым ребром ij мы сопоставим две точки $ij, (ij)'$), шести пар противоположных ребер (типа 1278), центра куба $z = z(\Lambda)$ и шести центров граней (типа 1234).

Рис. 4.

Прямые из $z^\perp$ состоят из z , двух центров противоположных граней и двух пар противоположных ребер, соединяющих эти грани (например z , 1234, 5678, 1537 и 2648).

Прямая из $1234^\perp$, содержащая реберные точки, содержит пару параллельных нештрихованных реберных точек со своей грани и пару штрихованных точек, отвечающих ребрам с противоположной грани, непараллельным своим ребрам (например 1234, 12, 34, $(67)'$, $(58)'$).

Наконец, прямая из $1^\perp$ имеет вид 1, 2, $(12)'$, 12, 1278.

Замечание 2. По 6-призме можно восстановить $H_3(4)$.

Пусть множество точек состоит из вершин $1, \dots, 6; 1', \dots, 6'$ призмы Λ (см. рис. 2), шести точек, каждая из которых смежна только с вертикальным ребром призмы (типа $11'$), трех точек, каждая из которых смежна с парами противоположных вертикальных ребер призмы (типа $11'33'$), шести точек, смежных с парами противоположных ребер на основании призмы (типа 1245), двенадцати точек, смежных с парами ребер, инцидентных противоположным вершинам грани (типа $162'3'$), двух точек, смежных с тройками вертикальных ребер призмы (типа $11'33'55'$), центра призмы $z = z(\Lambda)$, имеющего валентность 3 в K_0 , и трех точек из K_0 , отвечающих парам противоположных граней (типа $122'1'455'4'$).

Прямая из $z^\perp$, проходящая через точку $122'1'455'4'$, содержит $33'66'$, 1245, $1'2'4'5'$. Две прямые из $(122'1'455'4')^\perp$, не проходящие через z , содержат $162'3'$, $1'6'23$, $44'$, $55'$ и $435'6'$, $4'3'56$, $11'$, $22'$ соответственно. Секущая, содержащая точку из K_6 , проходит через вертикальное ребро и содержит точку из K_2 , смежную с этим ребром, и точку из K_4 , смежную с парой противоположных вертикальных ребер призмы (например 1, $1'$, $11'$, $11'44'$, $11'33'55'$). Секущая, содержащая ребро с основания призмы, прохо-

Рис. 5. Куб Λ

дит через три точки из K_4 , одна из которых смежна с противоположным ребром на этом основании призмы, а две других смежны с ребрами на противоположном основании, инцидентным вершинам, лежащим на гранях, соединенных данным ребром (например 1, 2, 1245, 123'4', 125'6').

2. Случай $\mu = 8$

Пусть до конца статьи граф Γ является вполне регулярным локально $GQ(4, 2)$ -графом. Тогда по лемме 3.11 из [7] μ четно, а по лемме 3.9 из [7] $6 \leq \mu \leq 18$. Если $\mu = 6$ или 18, то Γ — граф из заключения теоремы. Из прямоугольного соотношения

$$k(k - \lambda - 1) = \mu|\Gamma_2(a)|$$

следует, что $\mu \neq 14$. Наконец, ввиду [4] $\mu \neq 10$. Итак, можно считать, что $\mu = 8, 12$ или 16. Если диаметр Γ равен 2, то граф сильно регулярен и имеет параметры $(226, 45, 12, 8)$, $(166, 45, 12, 12)$ или $(136, 45, 12, 16)$. В любом из этих случаев $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$ не является квадратом, получаем противоречие. С другой стороны, если $abcde$ — геодезический 4-путь из Γ , то μ -подграф $[c] \cap [e]$ содержится в $K_0([a] \cap [c])$ и по теореме из [3] по крайней мере один из этих μ -подграфов изоморфен $K_{3,3}$. Поэтому $\mu = 6$. Значит, можно считать, что Γ — граф диаметра 3.

Зафиксируем вершину $a \in \Gamma$. Пусть

$$b \in \Gamma_2(a), \quad \Lambda = [a] \cap [b], \quad K_i = K_i(\Lambda) \cap [a], \quad x_i = |K_i|.$$

В этом параграфе предполагается, что $\mu = 8$. В этом случае гиперовал Λ является кубом (см. рис. 3), и мы пишем, например, $(1234)_x$ для вершины из $[x]$, являющейся

Рис. 6. Куб Σ

центром грани $\{1, 2, 3, 4\}$, где $x \in \{a, b\}$. Далее, индексы вершин из $[a]$ мы будем иногда опускать (например, вместо $(15)'_a$ будем писать $(15)'$). Пусть

$$c \in [b] \cap \Gamma_2(a), \quad \Sigma = [a] \cap [c].$$

Лемма 1. Пусть c — вершина из $[b] \cap K_4(\Lambda)$, смежная с вертикальными ребрами 15, 37 ($c = (1537)_b$). Тогда подграф Σ изображен на рис. 4 и выполняются утверждения

- (1) центр $z \in [a]$ куба Λ смежен в Σ с парой вертикальных ребер $\{1278, 3456\}$, $\{2358, 1467\}$;
- (2) центрами куба Σ являются точки 2648 из K_4 и $z(\Lambda)_b$;
- (3) центры граней 1458 и 2367 куба Λ лежат в $K_2(\Sigma)$ и смежны с общим ребром $\{1278, 3456\}$ из Σ ;
- (4) точки 1234, 5678 из K_0 лежат на основаниях куба Σ .

Доказательство. Заметим, что $[1] \cap [3]$ содержит две вершины 2, 4 из Λ , поэтому 1 и 3 не могут лежать на общей грани из Σ . Теперь $[1] \cap [7]$ содержит две точки из Σ , лежащие в K_4 , поэтому Σ восстанавливается до графа с рис. 6. Далее, $K_4(\Sigma)$ содержит в $[a]$ точки 2, 4, 6, 8, смежные с парами горизонтальных ребер, точку 1537 и центр z куба Λ , смежные с парами вертикальных ребер. Утверждение (1) доказано.

Так как центр куба Σ смежен с соответствующими вершинами из $K_4(\Sigma)$, то $z(\Sigma)_a$ совпадает с точкой 2648 из $K_4(\Lambda)$, а точка $z(\Sigma)_b$ смежна с точками b $(2648)_b$, поэтому $z(\Sigma)_c = z(\Lambda)_b$, что дает (2).

Аналогично получаются утверждения (3) и (4). Лемма доказана.

Рис. 7. $\Lambda \cup \Sigma$

Лемма 2. Если $c = (37)_b$, то $1537 \in K_4(\Sigma)$ и для графа с рис. 7 выполняется одна из возможностей

- (1) $x = 23, y = 34, u = 67, w = 78, p = 1234, q = 5678$;
- (2) $x = (23)', y = (34)', u = (67)', w = (78)', p = 5678, q = 1234$.

Доказательство. Подграф $\Lambda \cup \Sigma$ изображен на рис. 7. Пусть $r \in K_4(\Sigma) \cap [a]$ и $[r]$ содержит 37 и параллельное 37 ребро из Σ . Мы покажем, что $r = 1537$.

Напомним, что λ -подграф $[a] \cap [3]$ состоит из трех изолированных 4-клик, поэтому можно считать, что $2x, 4y$ — ребра в $[a]$. Тогда $x = 23, (23)'$ или 2358 , аналогично $y = 34, (34)'$ или 3456 . Но ввиду леммы 1 $2358, 3456 \notin \Sigma$. Если $x = 23, y = (34)'$, то $[23] \cap [(34)'] \cap [a] = \{3, 67, (78)'\}$. В этом случае точка r не может быть смежной с $67, (78)'$, получаем противоречие. Если $x = 23, y = 34$, то $[23] \cap [34] \cap [a] = \{3, 1234, (15)'\}$. Далее, на нижнем основании Σ лежат либо точки $u = 67, w = 78$, либо $w = (67)', u = (78)'$. В первом случае точка $r = 1537$ смежна с вертикальным ребром $\{1234, 5678\}$ из Σ и выполняется утверждение (1) леммы. А во втором случае $\{p, q\} = \{15, (15)'\}$ и снова $r = 1537$.

Покажем, что последний случай невозможен. В этом случае центр грани 1234 лежит в $K_4(\Sigma)$. Далее, точки $1537, (23)', (34)', 67, 78$ лежат в $K_4(\Sigma)$, поэтому $5678 = z(\Sigma)_a$, а на центрах оснований куба Σ лежат $z = z(\Lambda)_a$ и 2648 . С другой стороны, $[(67)'] \cap [15]$ содержит в $[a]$ точки $48, (23)', 1458$. Но точка 1458 не смежна ни с z , ни с 2648 , получаем противоречие.

Аналогичные рассуждения проводятся в случае $x = (23)', y = (34)'$. Лемма доказана.

Выберем вершины $z, b \in \Gamma$, находящиеся на расстоянии 3. Пусть $zadb$ — путь от z до b .

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) точка z совпадает с $z(\Lambda)_a$;
- (2) точка $e = z(\Lambda)_b$ лежит в $\Gamma_3(a) \cap \Gamma_2(z)$.

Доказательство. Очевидно, что $z \in K_0(\Lambda)$. Но если z не является центром куба Λ , то z является центром некоторой грани, и ввиду леммы 2 $z \in [a] \cap [c]$ для некоторой вершины $c \in K_2^b(\Lambda)$. Получаем противоречие с тем, что $z \in \Gamma_3(b)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\Omega = [a] \cap [e]$ — куб. Тогда некоторая вершина $f \in \Omega$ не лежит в $K_0(\Lambda)$. В силу лемм 1, 2 (с заменой a, b, c на b, a, f), точка e не принадлежит $[b] \cap [f]$. Полученное противоречие показывает, что $e \in \Gamma_3(a)$.

Предположим, что $e \in \Gamma_3(z)$. Тогда $\Gamma_2(z)$ не пересекает $[b] \cap [e]$, иначе для $u \in \Gamma_2(z) \cap [b] \cap [e]$ по первому утверждению леммы $[u]$ содержит два разных центра куба $[z] \cap [u]$, получаем противоречие. С другой стороны, если $w \in K_4(\Lambda) \cap [a]$, то по лемме 1 куб $[w] \cap [b]$ содержит вершину g из $K_4^b(\Lambda)$. Но тогда $g \in \Gamma_2(z) \cap [b] \cap [e]$, и куб $[z] \cap [g]$ содержит два центра b, e из $[g]$, получаем противоречие.

Лемма 4. *Граф Γ — антиподальный граф диаметра 3 на 230 вершинах, являющийся 5-накрытием клики.*

Доказательство. Покажем сначала, что любая вершина из $\Gamma_3(z)$ изолирована в $\Gamma_3(z)$. Пусть bu — ребро из $\Gamma_3(z)$. Как и выше, $\Gamma_2(z)$ не пересекает $[b] \cap [u]$, поэтому u не смежна с вершинами из $[b] \cap [x]$ для $x \in [z]$. Из лемм 1, 2 следует, что u является центром куба Λ . Получаем противоречие с утверждением (2) леммы 3.

Предположим теперь, что $w \in \Gamma_3(z) \cap \Gamma_2(b)$. Пусть $u \in [b] \cap [w]$. Из предыдущего абзаца следует, что $u \in \Gamma_2(z)$. Снова куб $[z] \cap [u]$ содержит в $[u]$ два разных центра, получаем противоречие.

Таким образом, любые две вершины из $\Gamma_3(z)$ находятся на расстоянии 3 в Γ . Далее, $|\Gamma_2(z)| = 180$, поэтому $|\Gamma_3(z)| = 4$, Γ содержит точно 230 вершин и является 5-накрытием клики.

3. Случай $\mu = 16$

В этом параграфе предполагается, что $\mu = 16$. Выберем вершины $z, b \in \Gamma$, находящиеся на расстоянии 3. Пусть $zadb$ — геодезический путь от z до b . Сохраним введенные ранее обозначения. В этом случае для $x \in \{a, b\}$ подграф $[x]$ имеет единственную точку в $K_0(\Lambda) \cap [x]$, которую мы будем называть полюсом гиперовала Λ и обозначать через $z(\Lambda)_x$. Ввиду предложения 1 вершина z совпадает с полюсом $z(\Lambda)_a$.

Лемма 5. *Вершина $z^* = z(\Lambda)_b$ лежит в $\Gamma_3(a)$.*

Доказательство. Предположим, что $z^* \in \Gamma_2(a)$ и положим $\Omega = [a] \cap [z^*]$. Тогда $[a]$ расщепляется тремя подграфами Λ , Ω и $(z^*)^\perp$. Если теперь $c \in [b] \cap [z^*]$, то $c \in K_4(\Lambda) \cap K_4(\Omega)$, поэтому $[c]$ содержит 8 вершин из $[a] \cap [z]$. Получаем противоречие с тем, что тогда $[c]$ содержит не менее трех точек с некоторой прямой из $[a] \cap (z^*)^\perp$.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *если e — отличная от b вершина из $\Gamma_3(z)$, то $[b] \cap [e]$ не пересекает $\Gamma_2(z)$;*
- (2) *вершина b изолирована в $\Gamma_3(z)$.*

Доказательство. Если $\Gamma_2(z)$ содержит вершину f из $[b] \cap [e]$, то b, e — два различных полюса из $[f]$ для гиперова $[f] \cap [z]$, получаем противоречие. Утверждение (1) доказано.

Допустим, что be — ребро из $\Gamma_3(z)$. Единственная вершина из $[b]$, не смежная с точками из $\Lambda = [a] \cap [b]$, это полюс $z(\Lambda)_b$, поэтому $e = z(\Lambda)_b$. По лемме 5 $z, a \in \Gamma_3(e)$, поэтому $\Gamma_2(e)$ не пересекает $[a] \cap [z]$.

Для любой вершины c из $K_4(\Lambda) \cap [b]$ подграф $\Sigma = [a] \cap [c]$ должен лежать в $K_6(\Lambda) \cup \Lambda$, иначе вершины z, a смежны с общей вершиной из $\Gamma_2(e)$, что противоречит последнему утверждению из предыдущего абзаца. Пусть L — прямая из $[b] \cap e^\perp$. Тогда L содержит 4 точки $c_1, \dots, c_4$ из $K_4(\Lambda)$, причем $[c_i] \cap [a]$ содержит 12 вершин из $K_6(\Lambda)$. Получаем противоречие с тем, что в этом случае $[c_2]$ содержит не менее 8 вершин из $K_6(\Lambda) \cap [c_1] \cap [a]$.

Лемма 7. *Граф Γ — антиподальный граф диаметра 3 на 138 вершинах, являющийся 3-накрытием клики.*

Доказательство. Из леммы 6 следует, что $|\Gamma_2(z)| = 45|\Gamma_3(z)|$, поэтому $|\Gamma_3(z)| = 2$.

Предположим, что $w \in \Gamma_3(z) \cap \Gamma_2(b)$. Пусть $u \in [b] \cap [w]$. Тогда по лемме 6 $u \in \Gamma_2(z)$. Снова гиперова $[z] \cap [u]$ содержит в $[u]$ два разных центра, получаем противоречие.

Ввиду леммы 5 вместо z можно поставить произвольную вершину из Γ . Таким образом, Γ содержит точно 138 вершин и является 3-накрытием клики.

4. О вполне регулярных антиподальных накрытиях клик

В этом параграфе предполагается, что вполне регулярный граф Γ с параметрами (v, k, λ, μ) является r -накрытием n -клики. Тогда Γ дистанционно регулярен, $n = k + 1$ и имеет место равенство

$$n - 2 - \lambda = (r - 1)\mu.$$

Мы будем называть Γ накрытием с параметрами (n, r, μ) . Матрица смежности Γ согласно [7] имеет собственные значения $n - 1, 1, \theta, \tau$ кратностей $1, n - 1, m_\theta, m_\tau$, где

$$\begin{aligned} \tau + \theta &= \lambda - \mu, & \theta\tau &= 1 - n, \\ m_\theta &= \frac{n(r-1)\tau}{\tau - \theta}, & m_\tau &= \frac{n(r-1)\theta}{\theta - \tau}. \end{aligned}$$

Справедливы следующие соотношения (см. [7]) между параметрами накрытия:

- (1) $1 \leq (r - 1)\mu \leq n - 2$,
- (2) если n чётно, то и μ чётно,

(3) θ, τ — целые числа разных знаков, поэтому можно считать, что $\theta > 0$,

(4) если $r > 2$, то $\theta^3 \geq n - 1$.

Положим $\delta = \lambda - \mu$ и рассмотрим накрытия с $\delta = \pm 4$ и $r = 3$ или $r = 5$ (именно эти случаи возникли в леммах 4 и 7).

Лемма 8. Пусть Γ является 3-накрытием клики с $\delta = \pm 4$. Тогда

$$n = 33, \quad \mu = 9, \quad \delta = 4.$$

Доказательство. По условию целочисленности параметр $2\theta - \delta$ делит

$$(r - 1)(\theta - \delta)(\theta^2 - \delta\theta + 1),$$

причем $r\mu = \theta^2 - \delta\theta - 1 - \delta$. Пусть $r = 3$. Если $\delta = 4$, то $\theta - 2$ делит 6 и $3\mu = \theta^2 - 4\theta - 5$, поэтому $\theta = 8$ и заключение леммы выполняется.

Если же $\delta = -4$, то $\theta + 2$ делит 6 и $3\mu = \theta^2 + 4\theta + 3$. Но эти условия несовместны.

Лемма 9. Пусть Γ является 5-накрытием клики с $\delta = \pm 4$. Тогда

$$n = 141, \quad \mu = 27, \quad \delta = 4.$$

Доказательство. Пусть $\delta = 4$. Тогда $\theta - 2$ делит 12 и $5\mu = \theta^2 - 4\theta - 5$, поэтому $\theta = 14$ и заключение леммы выполняется.

Если $\delta = -4$, то $\theta + 2$ делит 12 и $5\mu = \theta^2 + 4\theta + 3$, поэтому θ сравнимо с 2 по модулю 5, $\theta = 14$, $\mu = 3$, $n = 13$. Получаем противоречие с тем, что $\delta = -4 = \lambda - \mu$. Лемма доказана.

Из лемм 8, 9 с учетом лемм 4, 7 следует, что вполне регулярные локально $GQ(4, 2)$ -графы с $\mu = 8$ или $\mu = 16$ не существуют.

5. Случай $\mu = 12$

В этом параграфе предполагается, что вполне регулярный граф Γ является локально $GQ(4, 2)$ -графом с $\mu = 12$. Скажем, что гиперова́л Σ из $GQ(4, 2)$ имеет тип (u) , если он является гиперова́лом из пункта (u) заключения предложения 1. Сформулируем два наблюдения, касающиеся структуры гиперова́лов, в виде следующих предложений.

Предложение 2. Пусть Σ — гиперова́л типа (d) , и вершины $a, b, c \in GQ(4, 2)$ лежат в $K_6(\Sigma)$. Тогда $[a] \cap [b]$ пересекает $[c] \cap \Sigma$.

Доказательство. Действительно, гиперова́л типа (d) содержит точно два 6-цикла γ_1 и γ_2 , пересекающиеся по паре противоположных ребер. Вершина $x \in K_6(\Sigma)$ имеет в своей окрестности 2 противоположных ребра одного из 6-циклов, например из γ_1 , не лежащие в γ_2 , а также вершину $t_x \in \gamma_2 - \gamma_1$. Без ограничения общности можно считать, что $[a]$ и $[b]$ пересекаются по двум ребрам с γ_1 , а $[c]$ с γ_2 . Таким образом, $t_c \in \gamma_1 - \gamma_2$, следовательно, $t_c \in [a] \cap [b]$ (см. рис. 8), что и требовалось доказать.

Рис. 8. γ_1

Предложение 3. Пусть Λ — гиперова́л из $GQ(4, 2)$ типа (b), a — вершина из $K_6(\Lambda)$. Тогда всякая вершина x такая, что $[x] \cap [a]$ не пересекает Λ , лежит в $K_0(\Lambda)$.

Доказательство. Действительно, пусть вершина x удовлетворяет этому условию, тогда

$$[x] \cap \Lambda \subset \Lambda - [a].$$

Гиперова́л типа (b) содержит три концевые вершины, не смежные с вершинами из $K_6(\Lambda)$. Далее, $\Lambda - [a]$ является объединением 3-лапы и двух изолированных вершин, причем центром 3-лапы является концевая вершина. Значит, вершина x смежна в Λ не более чем с двумя вершинами, одна из которых концевая. Однако вершины из $K_2(\Lambda)$ не смежны с концевыми вершинами из Λ . Следовательно, вершина x принадлежит $K_0(\Lambda)$.

Зафиксируем следующие обозначения: a, b — две вершины из графа Γ , находящиеся на расстоянии 2, $\Lambda = [a] \cap [b]$, $K_i = K_i(\Lambda) \cap [a]$.

Лемма 10. Пусть c — вершина из $[b] \cap K_6(\Lambda)$. Тогда подграф $\Sigma = [a] \cap [c]$ изоморфен Λ .

Доказательство. Подграфы Λ и Σ являются гиперова́лами из $[a] = GQ(4, 2)$.

Заметим, для начала, что гиперова́лы Λ и Σ не могут иметь тип (a), так как $[b] \cap K_6(\Lambda)$ не пусто. Далее, если Λ — 6-призма, то в $[a]$ имеется вершина e такая, что

Рис. 9.

$[e] \cap \Lambda = \Lambda \cap \Sigma$. Кроме того, K_6 содержит ровно две вершины, окрестности которых расщепляют Λ . Следовательно, $\Sigma - \Lambda$ не содержит изолированной вершины, иначе эта вершина лежала бы в $K_6(\Lambda)$, а ее окрестность пересекалась бы с $[e] \cap \Lambda$, что невозможно. Таким образом, гипервал Σ изоморфен 6-призме.

Предположим теперь, что гипервал Λ изоморфен 3-накрытию клики. В этом случае окрестности вершин из K_6 расщепляют множество ребер, лежащих на внутреннем 9-цикле. И наоборот, каждому набору изолированных ребер с этого 9-цикла отвечает единственная вершина из K_6 , то есть, найдется вершина $e \in [a]$, для которой выполнено равенство $[e] \cap \Lambda = \Lambda \cap \Sigma$. Тогда $e \in K_6(\Sigma)$, кроме того, вершины $d, f \in \Lambda - \Sigma$, изображенные на рис. 9, также лежат в $K_6(\Sigma)$. Заметим, что для вершин d, e, f не существует вершины из Σ , лежащей в $[d] \cap [e] \cap [f]$. Из предложения 2 теперь следует, что гипервал Σ не может быть гипервалом типа (d).

Ввиду симметрии между Λ и Σ гипервал Σ не может быть также 6-призмой. Отсюда следует, что Σ может быть только 3-накрытием клики.

Если гипервал Λ имеет тип (d), то по симметрии между Λ и Σ к гипервалу Σ применимо все доказанное выше, значит, он не может быть ни 6-призмой, ни 3-накрытием клики. Лемма доказана.

Лемма 11. Пусть подграф Λ является 3-накрытием клики. Тогда справедливо включение $[a] - \Lambda \subset \Gamma_2(b)$.

Доказательство. Рассмотрим вершины из $[a] - \Lambda$. Очевидно, вершины, окрестности которых пересекаются с Λ , содержатся в $\Gamma_2(b)$, то есть, достаточно доказать включение

$$[a] \cap K_0(\Lambda) \subset \Gamma_2(b).$$

Мы покажем, что каждая вершина $[a] \cap K_0(\Lambda)$ смежна с вершиной из $[b] \cap K_6(\Lambda)$.

Рис. 10. Λ

Пусть вершина x лежит в $[b] \cap K_6(\Lambda)$. Рассмотрим подграф $\Sigma = [x] \cap [a]$, который по лемме 10 является 3-накрытием клики. Две его концевые вершины d_1, f_1 содержатся в $K_6(\Lambda)$, а третья концевая вершина e_1 в $K_0(\Lambda)$. Действительно, вершина e_1 не смежна ни с одной вершиной из $\Lambda \cap \Sigma$ и, следовательно, по предложению 3 она должна лежать в $K_0(\Lambda)$. Таким образом, каждая вершина из $[b] \cap K_6(\Lambda)$ смежна с одной вершиной из $[a] \cap K_0(\Lambda)$. Допустим, что две вершины $x, y \in [b] \cap K_6(\Lambda)$ смежны с одной и той же вершиной $e_0 \in [a] \cap K_0(\Lambda)$, то есть e_0 лежит в $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, где Σ_1 и Σ_2 обозначают соответственно подграфы $[a] \cap [x]$ и $[a] \cap [y]$ (см. рис. 10).

Концевая вершина $d \in \Lambda$ лежит в $K_6(\Sigma_1) \cap K_6(\Sigma_2)$. Отсюда, очевидно, следует, что $[e_0] \cap [d] \cap \Sigma_1$ и $[e_0] \cap [d] \cap \Sigma_2$ содержат по три вершины. В силу μ -регулярности $[a]$ это дает включение

$$[d] \cap [e_0] \cap [a] \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2.$$

Далее, концевые вершины $f_1, f_2 \in \Lambda$ лежат соответственно в $K_6(\Sigma_1)$ и в $K_6(\Sigma_2)$. Однако отсюда следует, что

$$[d] \cap [e_0] \cap [a] \subset [f_1] \cap [f_2]$$

и для любой пары вершин из $[d] \cap [e_0] \cap [a]$ условие μ -регулярности нарушено. Получаем противоречие. Значит, отношение смежности задает взаимно однозначное соответствие между тремя вершинами из $[b] \cap K_6(\Lambda)$ и тремя вершинами из $[a] \cap K_0(\Lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 12. Подграф Λ не является 3-накрытием клики.

Доказательство. Допустим, что Λ является 3-накрытием клики с концевыми вершинами c_1, c_2, c_3 . Вершины d_1, d_2, d_3 из K_6 можно упорядочить так, что

$$[d_i] \cap \Lambda = \Lambda - (\{c_1, c_2, c_3\} \cup [c_i]).$$

Аналогично, вершины d_1^*, d_2^*, d_3^* из $K_6(\Lambda) \cap [b]$ можно упорядочить так, что

$$[d_i^*] \cap \Lambda = [d_i] \cap \Lambda.$$

Из доказательства леммы 11 следует, что $K_6([a] \cap [d_1^*])$ содержит d_2, d_3 и вершину $e_1 \in K_0$.

Пусть $u, w \in \Lambda \cap [c_3]$, $\Lambda' = [u] \cap [w]$. Тогда Λ' содержит 6-угольник $d_1 a d_2 d_1^* b d_2^*$ и три вершины, смежные с парами противоположных вершин этого 6-угольника. Получаем противоречие с тем, что оставшиеся три вершины из Λ' образуют треугольник.

Лемма 13. *Подграф Λ не является гипервалом типа (d).*

Доказательство. Допустим, что Λ является гипервалом типа (d). Любые две вершины d_1, d_2 , находящиеся на расстоянии, не меньшем 3, в Λ , содержатся в единственном $K_{3,3}$ -подграфе $\{c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3\}$ из $[b]$. Далее, каждая из вершин c_i смежна с 2-кокликой d_1, d_2 из Λ , поэтому $c_1, c_2, c_3 \in K_4 \cup K_6$. Если вершина d_3 смежна с a , то $c_1, c_2, c_3 \in K_6$ и $[c_1] \cap [c_2] \cap [c_3]$ содержит единственную вершину из Λ (см. доказательство предложения 2), получаем противоречие. Значит, вершина d_3 из $[b]$ — Λ смежна с c_1, c_2, c_3 , следовательно, $d_3 \in K_0 \cup K_2 \cup K_4$.

Если $d_3 \in K_4$, то две вершины в $\{c_1, c_2, c_3\}$, скажем c_1, c_2 , принадлежит K_6 , $c_3 \in K_4$. Далее, два ребра из $[c_1] \cap \Lambda$ являются противоположными ребрами 6-угольника Σ из Λ , а третье инцидентно вершине 4-угольника Δ из Λ . Аналогично, два ребра из $[c_2] \cap \Lambda$ являются противоположными ребрами того же 6-угольника Σ из Λ , а третье инцидентно противоположной вершине 4-угольника Δ из Λ . В частности, d_1, d_2 являются противоположными вершинами 6-угольника Σ .

Если $d_3 \in K_2$, то одна из вершин в $\{c_1, c_2, c_3\}$, скажем c_1 , принадлежит K_6 , $c_2, c_3 \in K_4$. Далее, два ребра из $[c_1] \cap \Lambda$ являются противоположными ребрами 6-угольника Σ , а третье инцидентно вершине 4-угольника Δ .

Если ребро $[c_1] \cap [d_3] \cap \Omega$ инцидентно вершине в Δ , то d_1, d_2 — противоположные вершины Σ (см. рис. 3). Если же ребро $[c_1] \cap [d_3] \cap \Omega$ лежит в Λ , то одна из вершин в $\{d_1, d_2\}$, скажем d_1 , лежит в Δ , а вторая в пересечении двух 6-угольников из Λ . Легко понять, что каждое ребро подграфа Δ лежит в окрестности вершины из K_4 , смежной с вершиной из K_6 . Получаем противоречие с тем, что одно из инцидентных d_2 ребер лежит в $[c_2] \cup [c_3]$ и попадает в оба 6-угольника из Λ .

Если $d_3 \in K_0$, то одна из вершин в $\{c_1, c_2, c_3\}$, скажем c_1 , лежит на прямой M из $[b]$, содержащей две вершины из K_0 . Тогда M содержит две точки из K_4 , смежные с парами противоположных вершин 4-угольника Δ из Λ , и точку из K_4 , смежную с ребрами, лежащими в пересечении двух 6-угольников из Λ .

Выберем d_1 в Δ , а вершину d_2 в пересечении двух 6-угольников из Λ . Тогда $d_3 \in K_0$. Получаем противоречие с тем, что $[c_1]$ содержит d_1 и d_2 .

Лемма 14. *Граф Γ не содержит μ -подграфов, изоморфных 6-призме.*

Доказательство. Предположим, что подграф $\Lambda = [a] \cap [b]$ является 6-призмой. Возьмем вершину $c \in K_6(\Lambda) \cap [b]$. По лемме 10 подграф $\Lambda' = [a] \cap [c]$ также является 6-призмой. Далее, $\Lambda \cap \Lambda'$ представляет собой объединение трех изолированных ребер, вертикальных как в Λ , так и в Λ' . Поэтому $\Lambda \cap \Lambda'$ содержит такую пару ребер uu', ww' , что вершины u, w принадлежат основанию призмы Λ и призмы Λ' . Тогда

$$[u] \cap [w] \cap \Lambda = \{b_1\}, \quad [u] \cap [w] \cap \Lambda' = \{c_1\}$$

для некоторых вершин $b_1 \in \Lambda$ и $c_1 \in \Lambda'$. Получаем пятиугольник $\{a, b_1, b, c, c_1\} \subset [u] \cap [v]$.

Так как 3-накрытия и гипервалы типа (d) уже исключены из рассмотрения, $[u] \cap [v]$ должен быть либо 6-призмой, либо объединением двух изолированных $K_{3,3}$ -подграфов. В обоих случаях $[u] \cap [v]$ является двудольным графом и, следовательно, не содержит пятиугольников. Получаем противоречие.

Таким образом, граф Γ не содержит μ -подграфов, изоморфных 6-призме.

Из лемм 12–14 следует, что любой μ -подграф из Γ является 2. $K_{3,3}$ -графом.

Лемма 15. Пусть a_1 и a_2 — две несмежные вершины из Γ такие, что их μ -подграф $[a_1] \cap [a_2]$ изоморфен 2. $K_{3,3}$. Тогда в Γ существуют и однозначно определены вершины a_3 и a_4 , удовлетворяющие следующим двум условиям:

- (1) вершины a_1, a_2, a_3, a_4 образуют клику;
- (2) для каждой пары индексов i, j справедлива формула

$$[a_i] \cap [a_j] = \Lambda_k \cup \Lambda_l,$$

где $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, подграфы Λ_s изоморфны $K_{3,3}$.

Доказательство. Обозначим для начала через Λ_3 и Λ_4 две компоненты связности подграфа $[a_1] \cap [a_2]$. Через Λ_2 обозначим подграф $[a_1] \cap K_0(\Lambda_3 \cup \Lambda_4)$. Пусть одна из долей в Λ_3 состоит из вершин c_1, c_2, c_3 , а вторая из d_1, d_2, d_3 . Подграф $[c_1] \cap [c_2]$, изоморфный 2. $K_{3,3}$, содержит единственную вершину a_4 , смежную с вершинами d_1, d_2, d_3 и не смежную с вершинами a_1, a_2 . В свою очередь, $[a_1] \cap [a_4]$ также является объединением двух $K_{3,3}$ -подграфов, и по свойству регулярности пар в $[a_1]$ одна из его компонент связности совпадает с Λ_3 , а вторая либо с Λ_2 , либо с Λ_4 . Следовательно, вершина a_4 не зависит от выбора 2-кликки из Λ_3 .

Покажем, что Λ_4 не содержится в $[a_1] \cap [a_4]$. Предположим противное. Тогда

$$[a_1] \cap [a_4] = \Lambda_3 \cup \Lambda_4.$$

Рассмотрим вершину $e \in \Lambda_4$. Очевидно, что

$$[a_2] \cap [a_4] = \Lambda_3 \cup \Lambda_4,$$

значит, вершины a_1, a_2, a_4 попарно находятся на расстоянии ≥ 3 в $[c_1] \cap [e]$, получаем противоречие. Окончательно получаем, что

$$[a_1] \cap [a_4] = \Lambda_2 \cup \Lambda_3.$$

По симметрии между Λ_3 и Λ_4 аналогичное рассуждение проходит и для a_3 . Поменяв ролями вершины a_1 и a_2 , мы можем провести все рассуждения заново. Таким образом,

$$[a_2] \cap [a_3] \cap [a_4] = [a_2] \cap K_0(\Lambda_3 \cup \Lambda_4).$$

Для того чтобы завершить доказательство, достаточно взять в качестве Λ_1 подграф $[a_2] \cap [a_3] \cap [a_4]$.

Лемма 16. Граф Γ не содержит μ -подграфов типа 2. $K_{3,3}$.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим для начала, что Γ содержит вершины a_1 и a_2 такие, что $[a_1] \cap [a_2]$ — гипервал типа $2.K_{3,3}$. В этом случае применима лемма 15, следовательно, существуют вершины a_3 и a_4 , удовлетворяющие заключению леммы 15. Докажем включение

$$\Lambda_i \subset \Gamma_3(a_i), \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Допустим, что для некоторого i включение не выполняется. Без потери общности можно считать, что $i = 1$. Обозначим вершину из $\Lambda_1 \cap \Gamma_2(a_1)$ через b . Заметим, что все вершины a_i , $i > 1$, лежат в $[b] \cap K_0([b] \cap [a_1])$.

Применим теперь лемму 15 к паре a_1, b . Для удобства обозначим вершины a_1 и b соответственно через b_1 и b_2 . Тогда лемма 15 сопоставляет им вершины b_3 и b_4 . Через Δ_i будем обозначать μ -подграфы вершин a_1, b_i . Очевидно, подграф Δ_2 состоит из вершин a_i , $i > 1$, и $\Lambda_1 \cap [b]$. Отсюда,

$$\{b_3, b_4\} \subset [a_2] \cap [a_3] \cap [a_4].$$

Таким образом, $\{b_2, b_3, b_4\} = \Lambda_1 - [b]$. Но тогда подграф $\Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4$ не пересекается с подграфом $\Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4$. В этом случае мы получим веер, содержащий овоид $\Gamma - (\Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4)$, и по два овоида из $\Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4$ и $\Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4$. Но два овоида из некоторого веера в $H_3(4)$ образуют $2.K_{3,3}$, только если один из них — плоский овоид, отвечающей несингулярной точке p , а второй — трипод с центром p (см. определения в [3]). Таким образом, по предложению из параграфа 3 в [8] внутри веера нельзя образовать два непересекающихся $2.K_{3,3}$, и включение доказано.

Докажем далее, что подграф Λ_1 изолирован в $\Gamma_3(a_1)$. Допустим, что это не верно. Пусть вершина $b \in \Lambda_1$ смежна с вершиной $c \in \Gamma_3(a_1) - \Lambda_1$. Обозначим подграф, содержащий a_i , $i > 1$, и $[b] \cap \Lambda_1$ через Δ . Очевидно, вершина c не смежна с вершинами из Δ , так как в противном случае c смежна с a_i для некоторого $i > 1$ и, следовательно, лежит в Λ_1 , что противоречит определению c . Заметим, что подграф $\{c\} \cup \Delta$ однозначно вкладывается в гипервал порядка 18 из $[b]$. Поэтому найдется вершина $d \in [b]$, смежная с вершиной c и с ребром из Δ . Таким образом, в $[d] \cap \Lambda_1$ содержится ребро, поэтому $d \notin \Lambda_1$ и $d \in [a_i]$ для некоторого $i = 2, 3, 4$. Кроме того, подграф $[d] \cap \Gamma_3(a_1)$ содержит три вершины, а именно, вершины b, c и вершину из Δ . Отсюда следует, что $[a_1] \cap [d]$ является 6-призмой. Получаем противоречие с леммой 14. Итак, подграф Λ_1 изолирован в $\Gamma_3(a_1)$.

Подграф Λ_1 — это $K_{3,3}$. Пусть одна его доля — $\{b_1, b_2, b_3\}$, а другая — $\{c_1, c_2, c_3\}$. В предыдущем абзаце доказано, что $[x] \subset \Lambda_1 \cup \Gamma_3(a_1)$. Обозначим через Δ_4 подграф $\{a_2, a_3, a_4; c_1, c_2, c_3\}$. Тогда

$$\Delta_4 \subset [b_1] \cap [b_2] \cap [b_3].$$

Следовательно, к вершинам b_i , $1 \leq i \leq 3$, применима лемма 15. Мы будем обозначать подграфы из заключения леммы 15 через Δ_j , $1 \leq j \leq 4$, а $\Gamma_3(a_1) - (a_2^{\perp} \cup a_3^{\perp} \cup a_4^{\perp})$ через Ω . Тогда $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \subset \Omega$, и мы будем писать Ω_b вместо $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$. Аналогичное рассуждение справедливо и для вершин c_1, c_2, c_3 . Соответствующие подграфы из заключения леммы 15 мы обозначаем через Δ'_j , $1 \leq j \leq 4$, а $\Delta'_1 \cup \Delta'_2 \cup \Delta'_3$ через Ω_c . Из определения подграфов Δ_j следует, что ни одна вершина из Ω_b не смежна ни с одной вершиной из Δ_4 , поэтому пересечение $\Omega_b \cap \Omega_c$ пусто.

Нетрудно подсчитать, что $|\Gamma_3(a_1) \cap a_i^{\perp}| = 28$, $2 \leq i \leq 4$, и $|\Gamma_3(a_1)| = 120$. Таким образом, порядок Ω равен $120 - 3 \cdot 28 = 36$. С другой стороны, $|\Omega_b| = |\Omega_c| = 18$,

следовательно, $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_c$. Далее, из леммы 15 следует, что существует вершина b_4 такая, что $\Omega_b \subset [b_4]$. Однако, по доказанному выше $\Delta_4 \subset \Gamma_3(b_4)$. Напомним, что

$$\Delta_4 = \{a_2, a_3, a_4; c_1, c_2, c_3\},$$

поэтому $b_4 \in \Gamma_3(a_1)$, и $[b_4] \cap \Gamma_3(a_1) = \Omega_b$. Рассмотрим вершину $x \in [b_4] - \Omega_b$. Из описания гипервалов порядка 18 (см. [3]) следует, что пересечение $[x] \cap \Omega_b$ не пусто. Пусть, например, y лежит в $[x] \cap \Omega_b$. Тогда $[y] \cap K_0([a_1] \cap [y])$ содержит ребро $\{b_4, y\}$ и вершину b_i для некоторого $i = 1, 2, 3$. Однако подграф Λ_1 изолирован в $\Gamma_3(a_1)$, значит, $[b_i]$ не пересекает $\{b_4, y\}$ и $K_0([a_1] \cap [y])$ содержит ребро и изолированную от него вершину. Получаем противоречие с тем, что для любого гипервала Λ порядка 12 из заключения предложения $K_0(\Lambda)$ не содержит ребро и изолированную от него вершину. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Список литературы

1. Buekenhout F., Hubaut X., Locally polar spaces and related rank 3 groups. *J. Algebra* (1997) **45**, №2, 391–434.
2. Махнев А. А., О сильно регулярных расширениях обобщенных четырехугольников с короткими прямыми. *Дискретная математика* (1996) **8**, №1, 31–39.
3. Махнев А. А., Расширения $GQ(4, 2)$, описание гипервалов. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 101–116.
4. Makhnev A. A., Some partial geometries with extremal parameters. In: *Abstr. Intern. Conf. Finite Geometry and Combinatorics*, 18–24 May, 1997, pp. 79–80.
5. Pain S., Thas J. A., *Finite generalized quadrangles*. Pitman, Boston, 1984.
6. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A., *Distance-regular graphs*. Springer, Berlin, 1989.
7. Godsil C. D., Covers of complete graphs. *Advanced Studies in Pure Math.* (1996) **24**, 137–163.
8. Brouwer A. E., Wilbrink H. A., Ovoids and fans in the generalized quadrangle $Q(4, 2)$. *Geom. Dedicata* (1990) **36**, №1, 121–124.

Статья поступила 15.02.2000.