Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Монахов, О. А. Шпырко, О нильпотентной π -длине конечной π -разрешимой группы, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 3, 145–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:50:13

УДК 512.542

О нильпотентной π -длине конечной π -разрешимой группы

© 2001 г. В. С. Монахов, О. А. Шпырко

Получены новые оценки нильпотентной π -длины конечной π -разрешимой группы, у которой коммутант π -холловой подгруппы нильпотентен. Установлена связь между нильпотентной π -длиной конечной π -разрешимой группы и производной длиной ее холловой π -подгруппы нечетного порядка.

Для непустой формации $\mathfrak{F}$ в [1] определена $\mathfrak{F}$ -длина конечной группы, которая при конкретных значениях $\mathfrak{F}$ приводит, в частности, к понятиям π -длины и нильпотентной π -длины π -разрешимой группы. Напомним эти определения. Рассматриваются только конечные группы. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначают множество всех простых чисел, не содержащихся в π , а через $\pi(G)$ — множество простых чисел, делящих порядок группы G . Возрастающим (π', π) -рядом группы G называют ряд

$$1 = P_0 \leq N_0 \leq P_1 \leq N_1 \leq \dots,$$

где $N_i/P_i = O_{\pi'}(G/P_i)$, $P_{i+1}/N_i = O_{\pi}(G/N_i)$, $i = 0, 1, \dots$. Здесь $O_{\pi'}(X)$ и $O_{\pi}(X)$ — наибольшие нормальные π' - и π -подгруппы группы X соответственно. Если группа G π -разрешима, то $N_k = G$ для некоторого натурального k . Наименьшее натуральное k с этим свойством называют π -длиной π -разрешимой группы G и обозначают через $l_{\pi}(G)$.

Нильпотентная π -длина π -разрешимой группы G определяется следующим образом. Пусть

$$P_0^n = 1, \quad N_i^n/P_i^n = O_{\pi'}(G/P_i^n), \quad P_{i+1}^n/N_i^n = F(G/N_i^n), \quad i = 0, 1, \dots$$

Здесь $F(X)$ — подгруппа Фиттинга группы X . Наименьшее k , для которого в ряде

$$1 = P_0^n \leq N_0^n \leq P_1^n \leq N_1^n \leq \dots \quad (1)$$

выполняется равенство $N_k^n = G$, называется нильпотентной π -длиной группы G и обозначается через $l_{\pi}^n(G)$. Поскольку P_{i+1}^n/N_i^n — нильпотентная π -группа, а N_i^n/P_i^n — π' -группа, то $l_{\pi}(G) \leq l_{\pi}^n(G)$, а если $\pi = \{p\}$, то $l_{\pi}^n(G) = l_{\pi}(G) = l_p(G)$. Ясно также, что равенство $l_{\pi}(G) = l_{\pi}^n(G)$ сохраняется для π -разрешимой группы с нильпотентной π -холловой подгруппой.

С понятием π -длины связана следующая проблема Л. А. Шеметкова (см. [2], вопрос 11.119): верно ли, что для любого непустого множества π простых чисел

π -длина π -разрешимой группы ограничена сверху степенью разрешимости ее π -холловой подгруппы? Эта проблема рассматривалась в работах [3,4,5], где получен положительный ответ, в случае, когда $2 \notin \pi$, (см. [5], теорема 1). Заметим, что этот результат легко переносится на нильпотентную π -длину (см. теорему 1 настоящей работы). Кроме того, в настоящей работе получены новые оценки π -длины и нильпотентной π -длины π -разрешимой группы в зависимости от строения ее силовских p -подгрупп для $p \in \pi$.

Для индуктивных рассуждений нам потребуются следующие леммы. Как и в [4], под $l_\pi^*(G)$ понимается либо всюду $l_\pi(G)$, либо всюду $l_\pi^n(G)$.

Лемма 1 ([3], леммы 1,2; [4], лемма 1). Пусть π — некоторое множество простых чисел и G — π -разрешимая группа. Тогда

- (1) если H — подгруппа группы G , то $l_\pi^*(H) \leq l_\pi^*(G)$,
- (2) если N — нормальная подгруппа группы G , то $l_\pi^*(G/N) \leq l_\pi^*(G)$, если N — нормальная π' -подгруппа группы G , то $l_\pi^*(G) = l_\pi^*(G/N)$,
- (3) в любом ряде нормальных подгрупп группы G с π' -факторами и π -факторами (нильпотентными π -факторами) число неединичных π -факторов не меньше, чем $l_\pi(G)$ (не меньше, чем $l_\pi^n(G)$),
- (4) если $H_i \triangleleft G$, $i = 1, \dots, n$ и $G = H_1 H_2 \dots H_n$, то $l_\pi^*(G) = \max_{i=1, \dots, n} l_\pi^*(H_i)$.

Лемма 2. Пусть π — некоторое множество простых чисел и G — π -разрешимая группа. Если $l_\pi^*(G/N) < l_\pi^*(G)$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G , то

- (1) $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$,
- (2) в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа K ,
- (3) K — элементарная абелева p -группа, $p \in \pi$, и $K = O_{p',p}(G) = P_1^n$,
- (4) $C_G(K) = K$ и подгруппа K дополняема в группе G .

Доказательство. Отметим, что для $\pi = \{p\}$ лемма 2 совпадает с леммой VI.6.9 в [6]. Для $l_\pi(G)$ аналогичное утверждение содержится в лемме 4 из [3]. Поэтому остается доказать утверждения для $l_\pi^n(G)$.

Из второго утверждения леммы 1 следует, что $O_{\pi'}(G) = 1$. Так как подгруппа Фраттини $\Phi = \Phi(G)$ нильпотентна, то Φ — π -подгруппа и $\Phi \leq P_1^n = F(G)$ в обозначениях ряда (1) для группы G . Если Φ — собственная подгруппа в P_1^n , то из определения нильпотентной π -длины следует, что $l_\pi^n(G) = l_\pi^n(G/\Phi)$ и $\Phi = 1$ по условию леммы. Пусть $\Phi = P_1^n$. Тогда по теореме Шура–Цассенхауза $N_1 = H\Phi$, где H — неединичная π' -подгруппа. По лемме Фраттини $G = N_G(H)\Phi$, а по свойствам подгруппы Фраттини $G = N_G(H)$. Теперь $1 \neq H \leq O_{\pi'}(G) = 1$. Поэтому допущение $\Phi = P_1^n$ неверно и первое утверждение доказано.

Допустим, что в группе G две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 . Тогда $N_1 \cap N_2 = 1$ и по лемме Ремака группа G изоморфна подгруппе прямого произведения $G/N_1 \times G/N_2$. Теперь

$$l_\pi^n(G) \leq \max_{i=1,2} l_\pi^n(G/N_i)$$

согласно первому и четвертому утверждениям леммы. Получили противоречие с условием доказываемой леммы. Поэтому допущение неверно и второе утверждение леммы справедливо.

Так как $O_{\pi'}(G) = 1$ и группа G π -разрешима, то K — элементарная абелева p -подгруппа, $p \in \pi$. Из второго утверждения следует, что $O_{p'}(G) = 1$, поэтому $K = O_{p',p}(G) = P_1^n$ по свойству подгруппы Фиттинга (см. теорему III.4.5 в [6]).

Докажем четвертое утверждение. Так как $\Phi(G) = 1$, существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = MK$. Из абелевости K следует, что $M \cap K = 1$, то есть M — дополнение к подгруппе K в группе G . Теперь $C_G(K) \cap M \triangleleft G$ и в силу второго утверждения $C_G(K) \cap M = 1$ и $K = C_G(K)$. Лемма доказана.

Для группы G можно построить нормальный ряд

$$1 = F_0(G) \leq F_1(G) \leq \dots \leq F_k(G) \leq \dots,$$

где $F_k(G)/F_{k-1}(G) = F(G/F_{k-1}(G))$ — подгруппа Фиттинга группы $G/F_{k-1}(G)$, $k = 1, 2, \dots$. Если группа G разрешима, то $F_t(G) = G$ для некоторого t . Наименьшее t , для которого $F_t(G) = G$, называется нильпотентной длиной разрешимой группы G и обозначается через $n(G)$. Ясно, что любой нормальный ряд группы G с нильпотентными факторами имеет длину не менее, чем $n(G)$.

Лемма 3. Если G — π -разрешимая группа и H — ее π -холлова подгруппа, то $n(H) \leq l_\pi^n(G)$.

Доказательство. Рассмотрим (π', π) -ряд группы G

$$1 = P_0^n \leq N_0^n \leq P_1^n \leq N_1^n \leq \dots \leq N_t^n = G.$$

Здесь t — наименьшее число, для которого $N_t^n = G$, то есть $t = l_\pi^n(G)$. Факторы P_{i+1}/P_i этого ряда обладают нормальной π' -холловой подгруппой и нильпотентной π -холловой подгруппой. Пересекая члены этого ряда с подгруппой H , получим нормальный ряд подгруппы H

$$\begin{aligned} 1 &= P_0^n \cap H = N_0^n \cap H \leq P_1^n \cap H = N_1^n \cap H \leq \dots \leq P_i^n \cap H \\ &= N_i^n \cap H \leq \dots \leq P_t^n \cap H = N_t^n \cap H = G \cap H = H. \end{aligned}$$

Группа $P_i^n(P_{i+1}^n \cap H)/P_i^n$ является π -подгруппой группы P_{i+1}^n/P_i^n , поэтому она нильпотентна. Кроме того,

$$P_i^n(P_{i+1}^n \cap H)/P_i^n \simeq (P_{i+1}^n \cap H)/(P_i^n \cap H),$$

значит, построенный для H ряд нормальный и его факторы нильпотентны. Так как любой нормальный ряд группы H с нильпотентными факторами имеет длину не менее, чем $n(H)$, то $n(H) \leq t$. Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что для π -разрешимых групп с абелевыми силовскими p -подгруппами для всех $p \in \pi$ указанное в лемме 3 неравенство является точным.

Лемма 4. Нильпотентная π -длина π -разрешимой группы с абелевыми силовскими p -подгруппами для всех $p \in \pi$ совпадает с нильпотентной длиной своей π -холловой подгруппы.

Доказательство. Пусть G — π -разрешимая группа с абелевыми силовскими p -подгруппами для всех $p \in \pi$. Зафиксируем π -холлову подгруппу H группы G . Пусть $n(H)$ — нильпотентная длина подгруппы H . Из леммы 3 следует, что $n(H) \leq l_\pi^n(G)$. Докажем индукцией по порядку группы G , что $l_\pi^n(G) \leq n(H)$. В силу лемм 1, 2 можно считать, что $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$ и $F = F(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , причем $F = C_G(F)$ и F дополняема в группе G . Ясно, что F является p -группой для $p \in \pi$ и $F = O_p(G)$. Из того, что $F = C_G(F)$, следует равенство $O_{p'}(G) = 1$.

Так как $F \leq H$ и силовская p -подгруппа абелева, то F является силовской p -подгруппой группы G . Поэтому F — подгруппа Фиттинга группы H . Теперь по индукции

$$l_\pi^n(G) = l_\pi^n(G/F) + 1 \leq n(H/F) + 1 = n(H) - 1 + 1 = n(H).$$

Лемма доказана.

Через X' обозначается коммутант группы X , а $X^{(i)} = (X^{(i-1)})'$ — ее i -й коммутант. Наименьшее натуральное число t , для которого $X^{(t)} = 1$, называется ступенью разрешимости группы X и обозначается через $d(X)$.

Лемма 5 ([5], лемма 9). Пусть H — π -холлова подгруппа разрешимой группы G и пусть $O_{\pi'}(G) = 1$. Если $2 \notin \pi$, то $H^{(t-1)} \leq F(G)$, где $t = d(H)$.

Лемма 6. Пусть G — π -разрешимая группа, $q \in \pi'$ и $\omega = \pi \cup \{q\}$. Тогда в группе G существуют ω -холловы подгруппы и любые две ω -холловы подгруппы сопряжены между собой.

Доказательство. Утверждение леммы является частным случаем теоремы D5 из [7].

Доказательство следующей теоремы во многом повторяет доказательство теоремы 1 из [5].

Теорема 1. Если H — π -холлова подгруппа π -разрешимой группы G и $2 \notin \pi$, то $l_\pi^n(G) \leq d(H)$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по порядку группы. В силу лемм 1, 2 можно считать, что $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$ и $F = F(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , причем $F = C_G(F)$ и F дополняема в группе G . Ясно, что F является p -группой для $p \in \pi$ и $F = O_p(G)$. Из того, что $F = C_G(F)$, следует равенство $O_{p'}(G) = 1$. Зафиксируем π -холлову подгруппу H группы G .

Пусть $\pi(G) \setminus \pi = \{r_1, \dots, r_n\}$ и $\omega_i = \pi \cup \{r_i\}$. По лемме 6 в группе G существует ω_i -холлова подгруппа и все ω_i -холловы подгруппы сопряжены между собой. Поэтому можно выбрать ω_i -холлову подгруппу H_i группы G так, что $H \leq H_i$. Ясно, что $H_i = HP_i$, где P_i — некоторая силовская r_i -подгруппа группы G и H_i — разрешимая подгруппа. Так как $F \leq H_i$ и $F = C_G(F)$, то $O_{\pi'}(H_i) = 1$ и $F(H_i)$ — p -группа, поэтому $F(H_i) \leq F(H)$.

Пусть $t = d(H)$ и $K = H^{(t-1)}$. Тогда $K \leq F(H_i)$ по лемме 5. Теперь

$$K^y \leq F(H_i)^y = F(H_i) \leq F(H)$$

для всех $y \in P_i$. Отсюда следует, что $K^x \leq F(H)$ для всех $x \in \langle H, P_1, \dots, P_n \rangle = G$. Поэтому $K^G = \langle K^x \mid x \in G \rangle$ является p -группой и $K \leq F$. По индукции

$$l_\pi^n(G) = l_\pi^n(G/F) + 1 \leq d(H/F) + 1 = d(H) - 1 + 1 = d(H).$$

Теорема доказана.

Лемма 7. Пусть G — π -разрешимая группа и H — ее π -холлова подгруппа. Если $N \triangleleft G$, то $(HN/N)' \simeq H'/(H' \cap N)$.

Доказательство. Так как $HN/N \simeq H/(N \cap H)$, то их коммутанты изоморфны. По свойствам коммутантов

$$(H/(H \cap N))' = H'(H \cap N)/(H \cap N) \simeq H'/(H' \cap N)$$

(см. лемму I.8.4 в [6]), поэтому $(HN/N)' \simeq H'/(H' \cap N)$.

Теорема 2. Если G — π -разрешимая группа, у которой коммутант π -холловой подгруппы нильпотентен, то

$$l_\pi^n(G) \leq 1 + \max_{p \in \pi} l_p(G).$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . В силу лемм 1, 7 условия доказываемой леммы переносятся на факторгруппы, поэтому по лемме 2 подгруппы $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа $F = P_1^n = O_{q',q}(G)$ для некоторого $q \in \pi$. Ясно, что $F \leq G_\pi$.

Пусть K — коммутант π -холловой подгруппы G_π . По условию теоремы подгруппа K нильпотентна. Поскольку q' -холлова подгруппа $K_{q'}$ из K нормальна в G_π , то $K_{q'} \leq C_G(F) = F$ и $K_{q'} = 1$. Таким образом, K является q -группой и все силовские p -подгруппы в группе G абелевы для $p \in \pi \setminus \{q\}$. Поэтому $l_p(G) = 1$ для всех p из $\pi \setminus \{q\}$ (см. теорему VI.6.6 в [6]) и $\max_{p \in \pi} l_p(G) = l_q(G)$.

Если F — силовская подгруппа группы G , то в факторгруппе G/F π -холлова подгруппа G_π/F абелева и $l_\pi^n(G/F) = 1$ по лемме 4. Поэтому

$$l_\pi^n(G) \leq 2 \leq 1 + \max_{p \in \pi} l_p(G).$$

В этом случае теорема доказана.

Пусть F не является силовской подгруппой группы G . Тогда $l_q(G) = l_q(G/F) + 1$. Теперь, применяя индукцию, получаем, что

$$\begin{aligned} l_\pi^n(G) &= l_\pi^n(G/F) + 1 \leq 1 + \max_{p \in \pi} l_p(G/F) + 1 \\ &= 1 + l_q(G/F) + 1 = 1 + l_q(G) = 1 + \max_{p \in \pi} l_p(G). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство $l_\pi^n(G) \leq 1 + \max_{p \in \pi} l_p(G)$ доказано.

Следствие 1. Если G — π -разрешимая группа со сверхразрешимой π -холловой подгруппой, то $l_\pi^n(G) \leq 1 + \max_{p \in \pi} l_p(G)$.

Доказательство. Достаточно вспомнить, что у сверхразрешимой группы коммутант нильпотентен (см. теорему VI.9.1 в [6]), а затем применить теорему.

Следствие 2. Если в π -разрешимой группе G силовские p -подгруппы циклические для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^n(G) \leq 2$.

Доказательство. Так как π -холлова подгруппа группы G сверхразрешима по теореме VI.2.11 из [6], а по теореме VI.6.6 из [6] p -длина $l_p(G) = 1$ для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^n(G) \leq 2$.

Лемма 8. Если G — p -разрешимая группа с метациклической силовской p -подгруппой и $p > 2$, то $l_p(G) \leq 1$.

Доказательство. Поскольку $l_p^n(G) = l_p(G)$, то применимы леммы 1 и 2. По индукции подгруппа Фраттини единична и в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа. Кроме того, в группе G нет неединичных нормальных p' -подгрупп. Поэтому $P = O_p(G)$ — элементарная абелева p -подгруппа, совпадающая со своим централизатором и имеющая в G дополнение. Поскольку P метациклическая, порядок P равен p или p^2 . Если $|P| = p$, то G/P — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$, и P силовская в G . Если $|P| = p^2$, то G/P изоморфна подгруппе $GL(2, p)$ и силовская p -подгруппа G_p имеет порядок p^3 . Если G_p абелева, то $G_p = P$ по теореме VI.6.6 из [6]. Если G_p неабелева, то по теоремам 5.4.5 и 5.4.4 из [8] подгруппа P недополняема в G_p , получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 9. Группа нечетного порядка с метациклическими силовскими p -подгруппами для всех p имеет нильпотентный коммутант.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть G — группа наименьшего нечетного порядка с метациклическими силовскими p -подгруппами для всех p , у которой коммутант ненильпотентен. По следствию 4.2.1 из [1] подгруппа Фраттини группы G единична. Ясно, что в группе G минимальная нормальная подгруппа единственна. Поэтому подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ — минимальная нормальная подгруппа, совпадающая со своим централизатором и дополняемая в группе G . По лемме 8 подгруппа F силовская порядка p или p^2 . Если $|F| = p$, то G/F циклическая порядка делящего $p - 1$. Если $|F| = p^2$, то G/F — неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(2, p)$, и опять G/F циклическая. Следовательно, всегда $G' \leq F$, поэтому всегда коммутант G' нильпотентен. Лемма доказана.

Лемма 10. Если G — сверхразрешимая группа, то $l_\pi(G) \leq 1$ и $l_\pi^n(G) \leq 2$ для любого множества π простых чисел.

Доказательство. Пусть $H = G'$ — коммутант группы G . Так как H — нильпотентная подгруппа, то $H = H_\pi \times H_{\pi'} \triangleleft G$. Из того, что $H/H_{\pi'} \triangleleft G/H_{\pi'}$ и G/H абелева, следует, что группа G обладает следующим нормальным (π', π) -рядом:

$$1 \triangleleft H_{\pi'} \triangleleft H \triangleleft G_\pi H_{\pi'} \triangleleft G.$$

Так как факторы $H_{\pi'}$ и $G/G_\pi H_{\pi'}$ этого ряда являются π' -группами, а факторы $H/H_{\pi'}$ и $G_\pi H_{\pi'}/H$ — нильпотентными π -группами, то $l_\pi^n(G) \leq 2$ и $l_\pi(G) \leq 1$. Лемма доказана.

Сверхразрешимым корадикалом группы называется наименьшая нормальная подгруппа, факторгруппа по которой сверхразрешима.

Лемма 11. Если H — неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$, то сверхразрешимый корадикал подгруппы H является расширением циклической 2-группы порядка, делящего $p - 1$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4.

Доказательство. Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $GL(2, p)$ и докажем утверждение леммы для M . Ясно, что тогда утверждение леммы будет справедливо и для H . Очевидно, M — неприводимая подгруппа.

Если M импримитивна, то M изоморфна сплетению циклической группы A порядка $p - 1$ и группы B порядка 2 (см. [9], теорему 18.5). Диагональ S базы $D = A \times A$ этого сплетения будет нормальной подгруппой в M , изоморфной A , поэтому M обладает нормальным рядом $1 \triangleleft S \triangleleft D \triangleleft M$, где S и D/S циклические порядка $p - 1$ и M/D порядка 2. Поэтому M сверхразрешима.

Если M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^2)$, то по теореме 21.1 из [9] факторгруппа M/F имеет порядок 2 и M опять сверхразрешима.

Пусть M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа $F = GF(p)^{\#} E_2$. Подгруппа F состоит из скалярных матриц ([9], с. 234, формула (13)), поэтому F содержится в центре M . В M существует нормальная подгруппа A такая, что A содержит F и A/F изоморфна элементарной абелевой группе порядка 4, а M/A изоморфна симметрической группе степени 3 (см. [9], с. 234, формулы (13) и (14)). Так как A нильпотентна, силовская 2-подгруппа T из A нормальна в M . Теперь факторгруппа M/T обладает нормальным рядом $1 \triangleleft A/T \triangleleft M/T$, который уплотняется до главного ряда с факторами простых порядков. Значит, M/T сверхразрешима и сверхразрешимый корадикал содержится в T . Но $A = TF$, поэтому $A/F \simeq T/T \cap F$ и T является расширением циклической группы $T \cap F$ порядка, делящего $p - 1$, с помощью элементарной абелевой группы A/F порядка 4. По [9] (см. гл. V, § 21) других ситуаций для M нет. Лемма доказана.

Напомним, что бициклической называют конечную группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Метациклическая группа — это группа, которая содержит циклическую нормальную подгруппу с циклической факторгруппой. Метациклическая группа всегда является бициклической. Обратное утверждение верно для примарных групп нечетного порядка и не всегда выполняется для бициклических 2-групп ([6], теорема III.11.5).

Лемма 12 ([12], лемма). Любая нормальная подгруппа бициклической 2-группы, имеющая дополнение, порождается одним или двумя элементами.

Теорема 3. Пусть G — π -разрешимая группа с бициклическими силовскими p -подгруппами для всех $p \in \pi$. Тогда $l_{\pi}^n(G) \leq 4$, а $l_{\pi}(G) \leq 2$, и если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^n(G) \leq 2$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводим индукцией по порядку группы G . В силу леммы 1 условия теоремы переносятся на факторгруппы, поэтому по лемме 2 подгруппы $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная элементарная абелева p -подгруппа $F = P_1^n = O_{p', p}(G)$ для некоторого $p \in \pi$, совпадающая со своим централизатором и дополняемая в группе G . Ясно, что $F \leq G_p$.

Если $2 \notin \pi$, то лемма 9 позволяет применить теорему 2, поэтому с учетом леммы 8 получаем, что $l_{\pi}^n(G) \leq 2$.

Пусть $2 \in \pi$. Тогда G — разрешимая группа. Предположим, что $p > 2$. По лемме 8 подгруппа F силовская в группе G . Так как F метациклическая ([6], теорема III.11.5), то $|F| = p$ или p^2 .

Если $|F| = p$, то факторгруппа G/F изоморфна подгруппе циклической группы $\text{Aut } F$, порядок которой равен $p - 1$. Теперь группа G сверхразрешима, $l_\pi(G) \leq 1$ и $l_\pi^n(G) \leq 2$ по лемме 11.

Пусть $|F| = p^2$. Тогда факторгруппа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$. Если G/F — сверхразрешимая группа, то по лемме 10 $l_\pi(G/F) \leq 1$ и $l_\pi^n(G/F) \leq 2$, отсюда $l_\pi(G) \leq 2$ и $l_\pi^n(G) \leq 3$. Если G/F — несверхразрешимая группа, то по лемме 11 сверхразрешимый корадикал H/F факторгруппы G/F является 2-группой. Учитывая, что $2 \in \pi$, заключаем с учетом леммы 10, что $l_\pi(G) \leq 2$ и $l_\pi^n(G) \leq 4$.

Пусть теперь F — 2-группа. По лемме 12 подгруппа F имеет порядок 2 или 4. Если $|F| = 2$, то $|G| = 2$. Пусть $|F| = 4$. Тогда факторгруппа G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2, 2) \simeq S_3$ и G/F сверхразрешима. Ввиду леммы 10 заключаем, что $l_\pi(G) \leq 2$, а $l_\pi^n(G) \leq 3$. Теорема доказана полностью.

С учетом леммы 3 при $\pi = \pi(G)$ из теоремы 3 получаем два следствия.

Следствие 3. Разрешимая группа с бициклическими силовскими p -подгруппами для всех p имеет нильпотентную длину не выше 4.

Следствие 4. Группа нечетного порядка с метациклическими силовскими p -подгруппами для всех p имеет нильпотентную длину не выше 2.

Список литературы

1. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп*. Наука, Москва, 1978.
2. *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь*. ИМ СО РАН, Новосибирск, 1999.
3. Черников Н. С., Петравчук А. П., Характеризация периодических локально разрешимых групп с разрешимыми и с конечноэкспонентными силовскими π -подгруппами. *Украинский матем. ж.* (1987) **39**, №6, 761–767.
4. Черников Н. С., Петравчук А. П., О π -длине конечных π -разрешимых групп. *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры*. Институт математики, Киев, 1993, 393–405.
5. Kazarin L. S., Soluble products of groups. In: *Infinite groups 94*, Newell, Berlin, 1995, pp. 111–123.
6. Huppert B., *Endliche Gruppen. I*. Springer, Berlin, 1967.
7. Hall P., Theorems like Sylow's. *Proc. London Math. Soc.* (1956) **6**, 286–304.
8. Gorenstein D., *Finite groups*. Harper and Row, New York, 1968.
9. Супруненко Д. А., *Группы матриц*. Наука, Москва, 1972.
10. Maier R., Über die 2-nilpotenz faktorisierbarer endlicher Gruppen. *Arch. Math.* (1976) **27**, №5, 480–483.

Статья поступила 25.05.2000.