Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Б. Никитин, О сложности сортировки декартовых произведений частично упорядоченных множеств, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 3, 57–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:17:19

УДК 519.7

О сложности сортировки декартовых произведений частично упорядоченных множеств

© 2001 г. Ю. Б. Никитин

В статье изучается сложность $L(M_n)$ алгоритмов сортировки для частично упорядоченного множества M_n , изоморфного декартову произведению

$$K_1 \times \dots \times K_n,$$

где все K_i берутся из некоторого конечного семейства, имеют единственный максимальный элемент и являются простыми относительно декартова произведения. Для семейства $\{M_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ установлены оценки

$$\begin{aligned} L(M_n) &\gtrsim |M_n| \log_2 |M_n|, \\ L(M_n) &\lesssim (|K_1| + \dots + |K_n|) |M_n|. \end{aligned}$$

Кроме того, для частично упорядоченных множеств с одним максимальным элементом установлен факт единственности декартова разложения на простые множители с точностью до порядка сомножителей.

1. Основные определения

Данная работа посвящена сортировке частично упорядоченных множеств. Множество $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ называется частично упорядоченным, если на его элементах задано отношение частичного порядка R . Далее мы будем использовать для частично упорядоченного множества M с отношением частичного порядка R обозначение (M, R) . Результатом применения отношения R к паре элементов x_i и x_j может быть одно из четырех значений: x_i больше x_j ($x_i > x_j$), x_i меньше x_j ($x_i < x_j$), x_i и x_j равны ($x_i = x_j$) или x_i и x_j несравнимы ($x_i ? x_j$). Отношение R естественным образом порождает четыре отношения $>$, $<$, $=$, $?$ со значениями истина или ложь.

Пусть $(x \geq y) \equiv (x > y) \vee (x = y)$. Диаграммой Хассе частично упорядоченного множества (M, R) называется ориентированный граф $G = (V, E)$, для которого существует такое взаимно однозначное отображение $f: M \rightarrow V$, что $(f(x), f(y)) \in E$ тогда и только тогда, когда

$$|\{z: (x \geq z) \wedge (z \geq y)\}| = 2.$$

Таким образом, выполнение отношения $x > y$ равносильно существованию в графе G невырожденной ориентированной цепи из вершины $f(x)$ в вершину $f(y)$.

Определим задачу сортировки частично упорядоченного множества следующим образом. Пусть задано множество $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ с отношением частичного порядка R и ориентированный граф $G = (V, E)$ диаграммы Хассе частично упорядоченного множества (M, R) . Задача сортировки состоит в построении отображения $\varphi: M \rightarrow V$, при котором для любых $i, j \in \{1, \dots, m\}$ соотношение $x_i > x_j$ справедливо тогда и только тогда, когда в графе G существует невырожденная ориентированная цепь из вершины $\varphi(x_i)$ в вершину $\varphi(x_j)$. Далее мы будем называть отображение φ сборкой.

Алгоритмом сортировки частично упорядоченного множества (M, R) назовем произвольный алгоритм решения задачи сортировки для данного частично упорядоченного множества, использующий результаты последовательного применения отношения R к парам различных элементов из множества M . При этом результатом сравнения двух элементов из M может быть одно из трех значений: больше, меньше или несравнимы. Время работы алгоритма сортировки при заданном входе равно количеству обращений к отношению R . Сложность алгоритма сортировки равна времени работы алгоритма в худшем случае (максимальному времени работы по всевозможным входам). Алгоритм, который в худшем случае делает минимальное число сравнений, мы назовем оптимальным. Сложность оптимального алгоритма сортировки множества M обозначим через $L(M)$.

Описанная задача сортировки частично упорядоченного множества является обобщением задачи сортировки линейно упорядоченных множеств по убыванию в постановке [1,2] (для данного линейно упорядоченного множества $L_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ с отношением порядка $>$ найти такую перестановку $\pi \in S(m)$, что $x_{\pi(i)} > x_{\pi(j)}$ тогда и только тогда, когда $i < j$). Особенностью задачи сортировки частично упорядоченного множества M в нашей постановке является неоднозначность получаемого отображения φ в случае существования нетривиальных автоморфизмов множества M . Таким образом, отображение φ из определения задачи сортировки не всегда совпадает с отображением f из определения диаграммы Хассе.

Для произвольного набора частично упорядоченных множеств $\{(M_i, R_{M_i})\}_{i=1}^n$ определим декартово множество наборов как частично упорядоченное множество

$$(M_1 \times \dots \times M_n, R_{M_1 \times \dots \times M_n}),$$

где

$$M_1 \times \dots \times M_n \equiv \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in M_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}\},$$

а

$$(x_1, \dots, x_n) \geq_{M_1 \times \dots \times M_n} (y_1, \dots, y_n)$$

тогда и только тогда, когда $x_i \geq_{M_i} y_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Остальные отношения определяются из тождеств

$$(x = y) \equiv (x \geq y) \wedge (y \geq x),$$

$$(x > y) \equiv (x \geq y) \wedge \neg(x = y),$$

$$(x < y) \equiv (y > x),$$

$$(x ? y) \equiv \neg((x < y) \vee (x > y) \vee (x = y)).$$

Пусть $M^1 \equiv M$, а $M^n \equiv M^{n-1} \times M$ при $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Для частично упорядоченного множества M запись

$$M \cong M_1 \times \dots \times M_n$$

означает, что частично упорядоченное множество M изоморфно декартовому множеству наборов $M_1 \times \dots \times M_n$ и называется их декартовым произведением. Если частично упорядоченное множество M является декартовым произведением $M_1 \times \dots \times M_n$, то существует изоморфизм

$$\psi: M \rightarrow M_1 \times \dots \times M_n,$$

который мы будем называть покомпонентным разложением. При этом изоморфизме элемент $x \in M$ переходит в набор $\psi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in M_i$ при $i \in \{1, \dots, n\}$.

Предложение 1. Пусть частично упорядоченное множество $M \cong M_1 \times \dots \times M_n$ и для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ задана сборка $\varphi_i: M_i \rightarrow V_i$, где V_i — множество вершин графа диаграммы Хассе частично упорядоченного множества M_i . Тогда задача сортировки частично упорядоченного множества M сводится к построению одного из покомпонентных разложений

$$\psi: M \rightarrow M_1 \times \dots \times M_n.$$

2. Автоморфизмы декартовых произведений

Определим функцию расстояния $\rho(x, y)$ для пар элементов x, y частично упорядоченного множества M , полагая

$$\rho_M(x, y) = \max(\{l: x = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_l = y\} \cup \{l: y = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_l = x\} \cup \{-1\}).$$

Для частично упорядоченного множества M положим

$$\max(M) = \{x \in M: \forall y \in M((y \leq x) \vee (y ? x))\}.$$

На элементах частично упорядоченного множества M введем функцию ранга

$$l_M(x) = \max\{\rho_M(x, y): y \in \max(M)\}.$$

Функцию

$$h(M) = \max\{l_M(x): x \in M\}$$

назовем высотой частично упорядоченного множества M , а множество

$$S_i(M) = \{x \in M: l_M(x) = i\}$$

назовем его i -м слоем. При этом $S_0(M) = \max(M)$. Положим $\min(M) = S_{h(M)}(M)$.

Предложение 2. Для пары элементов x и y из частично упорядоченного множества M справедливо утверждение: если $x < y$, то $l_M(x) > l_M(y)$.

Следствие 1. Если для некоторых элементов x и y из частично упорядоченного множества M справедливо равенство $l_M(x) = l_M(y)$, то либо $x = y$, либо $x ? y$.

Следствие 2. Пусть на частично упорядоченном множестве M определен автоморфизм $\psi: M \rightarrow M$. Тогда для любого $x \in M$ справедливо равенство $l_M(x) = l_M(\psi(x))$.

Предложение 3. Пусть для частично упорядоченного множества M существует покомпонентное разложение

$$\psi: M \rightarrow M_1 \times \dots \times M_n$$

и $\psi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ для некоторого $x \in M$. Тогда

$$l_M(x) = \sum_{i=1}^n l_{M_i}(x_i).$$

Следствие 3. Для произвольного частично упорядоченного множества $M \cong M_1 \times \dots \times M_n$ справедливо равенство

$$h(M) = \sum_{i=1}^n h(M_i).$$

Следствие 4. Если частично упорядоченное множество $M \cong M_1 \times \dots \times M_n$, то $|S_0(M)| = 1$ тогда и только тогда, когда $|S_0(M_i)| = 1$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Следствие 5. Если частично упорядоченное множество $M \cong M_1 \times \dots \times M_n$ и $|S_0(M)| = 1$, то

$$|S_1(M)| = \sum_{i=1}^n |S_1(M_i)|.$$

Предложение 4. Если для частично упорядоченного множества M имеет место равенство $|S_0(M)| = 1$, то граф диаграммы Хассе частично упорядоченного множества M является связным.

Пусть про декартово множество наборов $M_1 \times \dots \times M_n$ известно, что $|S_0(M_i)| = 1$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Каркасом декартова множества наборов $M_1 \times \dots \times M_n$ назовем набор его подмножеств $\{F_i\}_{i=1}^n$ такой, что

$$F_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \dots \times M_n: x_1 \in S_0(M_1), \dots, x_{i-1} \in S_0(M_{i-1}), \\ x_i \in M_i, x_{i+1} \in S_0(M_{i+1}), \dots, x_n \in S_0(M_n)\}$$

для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Предложение 5. Пусть частично упорядоченное множество $M = M_1 \times \dots \times M_n$, $|S_0(M)| = 1$, а набор множеств $\{F_i\}_{i=1}^n$ является каркасом декартова множества наборов $M_1 \times \dots \times M_n$. Тогда $F_i \cong M_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Предложение 6. Пусть частично упорядоченное множество $M = M_1 \times \dots \times M_n$, $|S_0(M)| = 1$, а набор множеств $\{F_i\}_{i=1}^n$ является каркасом декартова множества наборов $M_1 \times \dots \times M_n$. Тогда

$$S_1(M) = \bigcup_{i=1}^n S_1(F_i).$$

Для частично упорядоченного множества M и его подмножества $T \subseteq M$ определим множество

$$H_M(T) = \{x \in M : \exists t \in T (x \leq t)\}.$$

Если, кроме того, $|S_0(M)| = 1$ и $T \subseteq S_1(M)$, то положим

$$C_M(T) = M \setminus H_M(S_1(M) \setminus T).$$

Предложение 7. Для любого частично упорядоченного множества M и двух его подмножеств $A, B \subseteq M$ верно, что

$$H_M(A \cup B) = H_M(A) \cup H_M(B).$$

Лемма 1. Пусть частично упорядоченное множество $M = M_1 \times \dots \times M_n$, $|S_0(M)| = 1$, а набор множеств $\{F_i\}_{i=1}^n$ является каркасом декартова множества наборов $M_1 \times \dots \times M_n$. Тогда $C_M(S_1(F_i)) = F_i$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$. По определению

$$C_M(S_1(F_i)) = M \setminus H_M(S_1(M) \setminus S_1(F_i)).$$

Из предложения 6 следует, что

$$S_1(M) \setminus S_1(F_i) = \bigcup_{j=1, j \neq i}^n S_1(F_j).$$

Поэтому, применив предложение 7, получаем, что

$$H_M(S_1(M) \setminus S_1(F_i)) = H_M\left(\bigcup_{j=1, j \neq i}^n S_1(F_j)\right) = \bigcup_{j=1, j \neq i}^n H_M(S_1(F_j)).$$

Следовательно,

$$C_M(S_1(F_i)) = M \setminus \bigcup_{j=1, j \neq i}^n H_M(S_1(F_j)) = \bigcap_{j=1, j \neq i}^n (M \setminus H_M(S_1(F_j))).$$

По условию $|S_0(M)| = 1$. Поэтому согласно следствию 5 неравенство $|S_0(M_i)| = 1$ верно для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. При $i \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через m_i единственный элемент множества $S_0(M_i)$. Теперь

$$\begin{aligned} C_M(S_1(F_i)) &= \bigcap_{j=1, j \neq i}^n (M \setminus (M_1 \times \dots \times M_{j-1} \times (M_j \setminus \{m_j\}) \times M_{j+1} \times \dots \times M_n)) \\ &= \bigcap_{j=1, j \neq i}^n M_1 \times \dots \times M_{j-1} \times \{m_j\} \times M_{j+1} \times \dots \times M_n \\ &= \{m_1\} \times \dots \times \{m_{i-1}\} \times M_i \times \{m_{i+1}\} \times \dots \times \{m_n\} = F_i. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Будем называть частично упорядоченное множество M простым, если $|M| \geq 2$ и для любой пары частично упорядоченных множеств P и Q из существования изоморфизма $M \cong P \times Q$ следует, что либо $|P| = 1$, либо $|Q| = 1$.

Лемма 2. Пусть частично упорядоченное множество $M = M_1 \times \dots \times M_n$, $|S_0(M)| = 1$, а набор множеств $\{F_i\}_{i=1}^n$ является каркасом декартова множества наборов $M_1 \times \dots \times M_n$. Тогда для любого $T \subseteq S_1(M)$, для которого множество $C_M(T)$ является простым, существует такое $i \in \{1, \dots, n\}$, что $T \subseteq S_1(F_i)$.

Доказательство. Согласно предложению 6,

$$S_1(M) = \bigcup_{i=1}^n S_1(F_i),$$

и $T \subseteq S_1(M)$ по условию. Следовательно, если для $i \in \{1, \dots, n\}$ положить

$$T_i = (S_1(M) \setminus T) \cap S_1(F_i),$$

то

$$S_1(M) \setminus T = \bigcup_{i=1}^n T_i.$$

Воспользовавшись предложением 7, получаем, что

$$\begin{aligned} C_M(T) &= M \setminus H_M(S_1(M) \setminus T) \\ &= M \setminus H_M\left(\bigcup_{i=1}^n T_i\right) = M \setminus \bigcup_{i=1}^n H_M(T_i) = \bigcap_{i=1}^n (M \setminus H_M(T_i)). \end{aligned}$$

Так как по определению $T_i \subseteq S_1(F_i)$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует такое множество $P_i \subseteq S_1(M_i)$, что

$$T_i = \{m_1\} \times \dots \times \{m_{i-1}\} \times P_i \times \{m_{i+1}\} \times \dots \times \{m_n\}.$$

При $i \in \{1, \dots, n\}$ положим $Q_i = M_i \setminus H_{M_i}(P_i)$. В этом случае $Q_i \neq \emptyset$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, так как $m_i \in Q_i$. Таким образом,

$$\begin{aligned} C_M(T) &= \bigcap_{i=1}^n (M \setminus M_1 \times \dots \times M_{i-1} \times H_{M_i}(P_i) \times M_{i+1} \times \dots \times M_n) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (M_1 \times \dots \times M_{i-1} \times Q_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_n) = Q_1 \times \dots \times Q_n. \end{aligned}$$

По условию $C_M(T)$ простое. Поэтому существует такое $j \in \{1, \dots, n\}$, что $Q_i = \{m_i\}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$. Так как $Q_i = M_i \setminus H_{M_i}(P_i)$, то $H_{M_i}(P_i) = M_i \setminus \{m_i\}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$. Справедливо включение $P_i \subseteq S_1(M_i)$, следовательно, $P_i = S_1(M_i)$ при $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$, то есть $T_i = S_1(F_i)$ при $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$. А так как

$$\bigcup_{i=1}^n T_i = S_1(M) \setminus T,$$

то

$$\bigcup_{i=1, i \neq j}^n S_1(F_i) \subseteq S_1(M) \setminus T.$$

В итоге, воспользовавшись предложением 6, получаем, что

$$T \subseteq S_1(M) \setminus \bigcup_{i=1, i \neq j}^n S_1(F_i) = S_1(F_j).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть частично упорядоченное множество $M = M_1 \times \dots \times M_n$, $|S_0(M)| = 1$, множества M_i являются простыми при $i \in \{1, \dots, n\}$, а набор множеств $\{F_i\}_{i=1}^n$ является каркасом декартова множества наборов $M_1 \times \dots \times M_n$. Тогда, если набор множеств $T_1, \dots, T_k$ — все максимальные по включению подмножества $S_1(M)$ такие, что множества $C_M(T_1), \dots, C_M(T_k)$ простые, то $k = n$ и набор множеств $T_1, \dots, T_k$ с точностью до перестановки совпадает с набором множеств $S_1(F_1), \dots, S_1(F_n)$.

Доказательство. По лемме 1 равенство $C_M(S_1(F_i)) = F_i$ справедливо для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$. Кроме того, $F_i \cong M_i$ при $i \in \{1, \dots, n\}$ согласно предложению 5, и все множества M_i являются простыми по условию теоремы. Следовательно, множество $C_M(S_1(F_i))$ является простым для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Так как по условию теоремы множество $C_M(T_i)$ является простым для любого $i \in \{1, \dots, k\}$, по лемме 2 для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ существует такое $j \in \{1, \dots, n\}$, что $T_i \subseteq S_1(F_j)$. Из максимальной T_i и простоты $C_M(S_1(F_j))$ получаем, что $T_i = S_1(F_j)$. Таким образом, набор множеств $T_1, \dots, T_k$ является подмножеством набора множеств $S_1(F_1), \dots, S_1(F_n)$.

Согласно предложению 5, справедливо разложение

$$S_1(M) = \bigcup_{i=1}^n S_1(F_i),$$

из простоты F_i следует неравенство $S_1(F_i) \neq \emptyset$ при $i \in \{1, \dots, n\}$, по ранее доказанному $C_M(S_1(F_i))$ является простым для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, и по условию теоремы набор множеств $T_1, \dots, T_k$ является максимальным по включению набором подмножеств множества $S_1(M)$ таким, что множества $C_M(T_1), \dots, C_M(T_k)$ простые, поэтому набор множеств $T_1, \dots, T_k$ с точностью до перестановки совпадает с набором множеств $S_1(F_1), \dots, S_1(F_n)$. Теорема доказана.

Пусть для частично упорядоченного множества M верно равенство $|S_0(M)| = 1$ и существует покомпонентное разложение

$$\psi: M \rightarrow M_1 \times \dots \times M_n,$$

при котором множества M_i являются простыми для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим набор множеств $\{F_i\}_{i=1}^n$ — каркас декартова множества наборов $M_1 \times \dots \times M_n$. Тогда набор множеств $\{\psi^{-1}(F_i)\}_{i=1}^n$ мы будем называть простым каркасом частично упорядоченного множества M .

Теорема 2. Пусть для частично упорядоченного множества M справедливо неравенство $|M| \geq 2$ и $|S_0(M)| = 1$. Тогда в частично упорядоченном множестве M существует единственный с точностью до перестановки простой каркас.

Доказательство. Рассмотрим два покомпонентных разложения

$$\begin{aligned}\psi: M &\rightarrow M_1 \times \dots \times M_n, \\ \varphi: M &\rightarrow N_1 \times \dots \times N_l,\end{aligned}$$

в которых все множества M_i и N_j являются простыми. Пусть $\{G_i\}_{i=1}^n$ — простой каркас частично упорядоченного множества M при покомпонентном разложении ψ , а $\{H_i\}_{i=1}^l$ — простой каркас частично упорядоченного множества M при покомпонентном разложении φ . Так как

$$S_1(M) \cong S_1(M_1 \times \dots \times M_n) \cong S_1(N_1 \times \dots \times N_l)$$

и множество $C_M(T)$ определяется только отношением сравнимости, утверждение теоремы 1 справедливо и для простых каркасов в M . Поскольку для $T \subseteq S_1(M)$ множество $C_M(T)$ определяется независимо от ψ и φ , набор $T_1, \dots, T_k$ в теореме 1 однозначно определяется по множеству M . Следовательно, $k = n = l$ и существует такая перестановка $\pi \in S(n)$, что $S_1(G_i) = S_1(H_{\pi(i)})$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Тогда по лемме 1

$$G_i = C_M(S_1(G_i)) = C_M(S_1(H_{\pi(i)})) = H_{\pi(i)}$$

для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Теорема доказана.

Пусть $M \cong M_1^{k_1} \times \dots \times M_n^{k_n}$. Тогда декартово произведение $M_1^{k_1} \times \dots \times M_n^{k_n}$ называется разложением частично упорядоченного множества M на простые множители, если все $\{M_i\}_{i=1}^n$ — простые попарно неизоморфные множества.

Следствие 6. Пусть для частично упорядоченного множества M справедливо неравенство $|M| \geq 2$ и $|S_0(M)| = 1$. Тогда частично упорядоченное множество M раскладывается на простые множители единственным с точностью до порядка сомножителей образом.

Обозначим через $\text{Au}(M)$ число автоморфизмов частично упорядоченного множества M .

Следствие 7. Пусть для частично упорядоченного множества M справедливо неравенство $|M| \geq 2$, $|S_0(M)| = 1$ и декартово произведение $M_1^{k_1} \times \dots \times M_n^{k_n}$ является разложением частично упорядоченного множества M на простые множители. Тогда

$$\text{Au}(M) = \prod_{i=1}^n \text{Au}(M_i)^{k_i} k_i!.$$

3. Нижняя оценка сложности сортировки

При получении нижней оценки сложности сортировки декартовых произведений частично упорядоченного множества мы воспользуемся методом, предложенным в [3]. Вот те идеи из [3], которые были перенесены нами с булева куба на декартовы произведения частично упорядоченно множеств: оценивать снизу сложность более простой задачи сортировки с априорной информацией о двух границах, воспользоваться особой функцией потенциала для вершин дерева сортировки и метками для его ребер, применять леммы 3 и 4 (без изменений).

Пусть $h_1, h_2 \in \mathbb{N}$ и $0 \leq h_1 < h_2 \leq h(M)$. Задачей сортировки частично упорядоченно множеств M с априорной информацией о двух границах h_1 и h_2 называется задача сортировки частично упорядоченно множеств $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ при наличии предварительной информации о том, что

$$\begin{cases} l_M(x_i) < h_1 & \text{при } 1 \leq i \leq k_1, \\ h_1 \leq l_M(x_i) \leq h_2 & \text{при } k_1 + 1 \leq i \leq k_2, \\ l_M(x_i) > h_2 & \text{при } k_2 + 1 \leq i \leq m, \end{cases}$$

где

$$k_1 = \sum_{i=0}^{h_1-1} |S_i(M)|, \quad k_2 = \sum_{i=0}^{h_2} |S_i(M)|.$$

Аналогично задаче сортировки частично упорядоченного множества M для задачи сортировки частично упорядоченного множества M с априорной информацией о двух границах h_1 и h_2 определяется алгоритм сортировки, его время работы, сложность, вводится понятие оптимального алгоритма. Сложность оптимального алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M с априорной информацией о двух границах h_1 и h_2 мы будем обозначать через $L_{h_1, h_2}(M)$.

Предложение 8. Пусть дано частично упорядоченное множество M и h_1, h_2 такие, что $h_1, h_2 \in \mathbb{N}$ и $0 \leq h_1 < h_2 \leq h(M)$. Тогда $L_{h_1, h_2}(M) \leq L(M)$.

Обозначим через V множество вершин графа диаграммы Хассе частично упорядоченного множества M . Будем называть отображение $\theta: M \rightarrow V$ согласованным с последовательностью сравнений $\{R(x_{p_i}, x_{q_i}) = r_i\}_{i=1}^k$, если для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ при $r_i = >$ существует невырожденная ориентированная цепь из вершины $\theta(x_{p_i})$ в вершину $\theta(x_{q_i})$, при $r_i = <$ существует невырожденная ориентированная цепь из вершины $\theta(x_{q_i})$ в вершину $\theta(x_{p_i})$, при $r_i = ?$ не существует ориентированных цепей из вершины $\theta(x_{p_i})$ в вершину $\theta(x_{q_i})$ и из вершины $\theta(x_{q_i})$ в вершину $\theta(x_{p_i})$. Отображение $\theta: M \rightarrow V$, согласованное с последовательностью сравнений

$$\{R(x_{p_i}, x_{q_i}) = r_i\}_{i=1}^k,$$

называется единственным с точностью до автоморфизма, если для любого отображения $\theta': M \rightarrow V$, согласованного с последовательностью сравнений

$$\{R(x_{p_i}, x_{q_i}) = r_i\}_{i=1}^k,$$

существует такой автоморфизм $\psi: V \rightarrow V$, что $\theta' = \psi\theta$.

Назовем деревом сортировки частично упорядоченного множества (M, R) произвольное помеченное корневое ориентированное дерево, каждой внутренней вершине

v которого приписана пара чисел (p_v, q_v) , каждому ребру (u, v) которого приписана метка $C(u, v) \in \{<, >, ?\}$ так, что метки на ребрах с общим началом различны, а каждой внешней вершине v приписана сборка φ_v . Деревом сортировки алгоритма сортировки частично упорядоченного множеств (M, R) назовем такое дерево сортировки частично упорядоченного множеств (M, R) , что для любой вершины v этого дерева путь $v_0, v_1, \dots, v_k$ из корня v_0 дерева сортировки в эту вершину $v = v_k$ удовлетворяет следующему условию: после того, как алгоритм сортировки проведет цепочку сравнений $\{R(x_{p_{v_i}}, x_{q_{v_i}}) = C(v_i, v_{i+1})\}_{i=0}^{k-1}$, он либо будет сравнивать x_{p_v} с x_{q_v} , если вершина v внутренняя (в этом случае предполагается наличие двух или трех исходов сравнимости и для любого из возможных исходов r должно существовать единственное ребро с началом в v и меткой r), либо получит единственную с точностью до автоморфизма сборку φ_v , согласованную с последовательностью сравнений $\{R(x_{p_{v_i}}, x_{q_{v_i}}) = C(v_i, v_{i+1})\}_{i=0}^{k-1}$, если вершина v внешняя.

Частично упорядоченное множество $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ с отношением частичного порядка R называется согласованным с вершиной v дерева сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M , если на пути $v_0, v_1, \dots, v_k$ из корня v_0 дерева T в эту вершину $v = v_k$ для любого $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ верно равенство $C(v_i, v_{i+1}) = R(x_{p_{v_i}}, x_{q_{v_i}})$. На вершинах дерева сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ определим две функции

$$\alpha_i(v) = \max\{l_X(y) : y = g(x_i), g: M \rightarrow X, X \text{ согласовано с } v, g - \text{изоморфизм}\}$$

и

$$\beta_i(v) = \min\{l_X(y) : y = g(x_i), g: M \rightarrow X, X \text{ согласовано с } v, g - \text{изоморфизм}\}.$$

Назовем функцию

$$p(v) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i(v) - \beta_i(v))$$

потенциалом вершины v . Обозначим через r потенциал корня дерева T , через h высоту дерева T , а через t число его внешних узлов.

Предложение 9. Пусть v — внешняя вершина дерева сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M . Тогда $p(v) = 0$.

Предложение 10. Для дерева сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M с априорной информацией о двух границах h_1 и h_2 при $h_1, h_2 \in \mathbb{N}$ и $0 < h_1 < h_2 < h(M)$ справедливо равенство

$$r = (h_1 - 1)k_1 + (h_2 - h_1)(k_2 - k_1) + (h(M) - h_2 - 1)(|M| - k_2).$$

Предложение 11. Пусть в дереве сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ вершина v является сыном вершины u . Тогда при $i \in \{1, \dots, m\}$ верно, что $\alpha_i(v) \leq \alpha_i(u)$ и $\beta_i(v) \geq \beta_i(u)$.

Следствие 8. Пусть в дереве сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M вершина v — сын вершины u . Тогда $p(v) \leq p(u)$.

Назовем ребро (u, v) дерева сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M проводящим, если $p(u) \neq p(v)$.

Лемма 3. Пусть вершина u дерева сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M имеет трех сыновей v_1, v_2, v_3 . Тогда хотя бы одно из ребер $(u, v_1), (u, v_2), (u, v_3)$ является проводящим.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha_{p_u}(u) \leq \alpha_{q_u}(u)$ и $C(u, v_1) = <$. Так как $x_{p_u} < x_{q_u}$, то и $\alpha_{p_u}(v_1) > \alpha_{q_u}(v_1)$. Из предложения 11 получаем, что $\alpha_{p_u}(v_1) \leq \alpha_{p_u}(u)$. Таким образом, справедлива цепочка неравенств

$$\alpha_{q_u}(v_1) < \alpha_{p_u}(v_1) \leq \alpha_{p_u}(u) \leq \alpha_{q_u}(u).$$

Следовательно, $p(v_1) < p(u)$ и ребро (u, v_1) проводящее.

Лемма доказана.

Лемма 4. Для дерева сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M справедлива оценка

$$t \leq \binom{h+r}{r} 2^h.$$

Доказательство. Каждое ребро дерева T пометим буквами из алфавита $\{a, b, c\}$ согласно следующему правилу: если у вершины u есть только два сына v_1 и v_2 , то ребра (u, v_1) и (u, v_2) метим разными буквами из алфавита $\{a, b\}$, в противном случае у вершины u три сына v_1, v_2, v_3 и мы метим ребра $(u, v_1), (u, v_2), (u, v_3)$ разными буквами из алфавита $\{a, b, c\}$ так, чтобы буква c досталась проводящему ребру (возможность такой расстановки меток следует из леммы 3). Пусть $w_1, \dots, w_t$ — слова, полученные при прочтении реберных меток от корня дерева T к его внешним вершинам. Очевидно, что они различны и длина каждого из них не превосходит h . Кроме того, в каждом из этих слов буква c встречается не более r раз. Каждому слову w_i произвольным образом припишем справа последовательности букв из алфавита $\{a, b, c\}$ так, чтобы получившиеся слова имели длину $h+r$ и содержали ровно по r букв c . Получившиеся слова различны и их число не превосходит $\binom{h+r}{r} 2^h$. Лемма доказана.

Лемма 5. Для дерева сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M с априорной информацией о двух границах h_1 и h_2 справедлива оценка

$$t \geq \frac{k_1! (k_2 - k_1)! (|M| - k_2)!}{\text{Au}(M)}.$$

Доказательство. Число различных корректных входов для задачи сортировки частично упорядоченного множества M с априорной информацией о двух границах h_1 и h_2 равно $k_1! (k_2 - k_1)! (|M| - k_2)!$. Поэтому число неразличимых с точностью до автоморфизма сборок равно

$$\frac{k_1! (k_2 - k_1)! (|M| - k_2)!}{\text{Au}(M)}.$$

Лемма доказана.

Следствие 9. Для дерева сортировки T алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M с априорной информацией о двух границах h_1 и h_2 справедлива оценка

$$h \geq \log_3 \frac{k_1! (k_2 - k_1)! (|M| - k_2)!}{\text{Au}(M)}.$$

Теорема 3. Пусть $\{M_n\}$ – бесконечное семейство частично упорядоченных множеств такое, что $|M_n| = m_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть существуют две бесконечные последовательности $\{h_{1,n}\}$ и $\{h_{2,n}\}$ такие, что $h_{1,n}, h_{2,n} \in \mathbb{N}$ и

$$0 < h_{1,n} < h_{2,n} < h(M_n)$$

при $n \in \mathbb{N}$, $h_{2,n} - h_{1,n} = o(h(M_n))$ при $n \rightarrow \infty$, а для

$$k_{1,n} = \sum_{i=0}^{h_{1,n}-1} |S_i(M_n)|, \quad k_{2,n} = \sum_{i=0}^{h_{2,n}} |S_i(M_n)|$$

справедливо соотношение $k_{2,n} - k_{1,n} \sim m_n$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, пусть

$$\log \text{Au}(M_n) = o(m_n \log m_n), \quad h(M_n) = O(\log m_n)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Тогда

$$L_{h_{1,n}, h_{2,n}}(M_n) \gtrsim |M_n| \log_2 |M_n|.$$

Доказательство. Так как $1 \leq k_{1,n} < k_{2,n} \leq m_n$ и $k_{2,n} - k_{1,n} \sim m_n$, то $k_{1,n} = o(m_n)$ и $m_n - k_{2,n} = o(m_n)$. Из леммы 5 выводим, что

$$\begin{aligned} \log_2 t &\geq \log_2 k_{1,n}! + \log_2 (k_{2,n} - k_{1,n})! + \log_2 (m_n - k_{2,n})! - \log_2 \text{Au}(M_n) \\ &\gtrsim m_n \log_2 m_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогично, по следствию из леммы 5 получаем оценку

$$h \geq \log_3 \frac{k_{1,n}! (k_{2,n} - k_{1,n})! (m_n - k_{2,n})!}{\text{Au}(M_n)} \gtrsim m_n \log_3 m_n. \quad (2)$$

Согласно предложению 10,

$$\begin{aligned} r &= (h_{1,n} - 1)k_{1,n} + (h_{2,n} - h_{1,n})(k_{2,n} - k_{1,n}) + (h(M_n) - h_{2,n} - 1)(m_n - k_{2,n}) \\ &= O(\log m_n)o(m_n) + o(h(M_n))O(m_n) + O(\log m_n)o(m_n) = o(m_n \log m_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $r = o(h)$. В силу леммы 4 справедлива оценка

$$\begin{aligned} \log_2 t &\leq h + \log_2 \frac{(h+r)!}{h! r!} \\ &= h + \log_2 \frac{\sqrt{2\pi(h+r)}((h+r)/e)^{h+r} e^{\theta_1/(12(h+r))}}{\sqrt{2\pi h}(h/e)^h e^{\theta_2/(12h)} \sqrt{2\pi r}(r/e)^r e^{\theta_3/(12r)}}, \end{aligned}$$

где $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta_3 < 1$ — параметры из формулы Стирлинга. Следовательно,

$$\begin{aligned} \log_2 t &\leq h + h \log_2 \left(1 + \frac{r}{h}\right) + r \log_2 \left(1 + \frac{h}{r}\right) \\ &\quad + \log_2 \sqrt{\frac{h+r}{2\pi hr}} + \log_2 e^{\theta_1/(12(h+r)) - \theta_2/(12h) - \theta_3/(12r)} \\ &\leq h + hO(r/h) + rO(h/r) + o(1) \sim h. \end{aligned} \quad (4)$$

Для дерева сортировки оптимального алгоритма сортировки частично упорядоченного множества M_n с априорной информацией о двух границах $h_{1,n}$ и $h_{2,n}$ справедливо равенство $L_{h_{1,n}, h_{2,n}}(M_n) = h$. Воспользуемся (4) и (1) для получения итоговой оценки

$$L_{h_{1,n}, h_{2,n}}(M_n) = h \gtrsim \log_2 t \gtrsim m_n \log_2 m_n.$$

Теорема доказана.

Следствие 10. В условиях теоремы 3 справедлива оценка

$$L(M_n) \gtrsim |M_n| \log_2 |M_n|.$$

Теорема 4. Пусть для бесконечного семейства частично упорядоченных множеств $\{K_i\}$ существует такая постоянная k , что K_i является простым, $|S_0(K_i)| = 1$ и $|K_i| \leq k$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Пусть бесконечное семейство частично упорядоченных множеств $\{M_n\}$ образовано по правилу $M_n = K_1 \times \dots \times K_n$.

Тогда

$$L(M_n) \gtrsim |M_n| \log_2 |M_n|.$$

Доказательство. Воспользуемся следующей вероятностной моделью. Пусть i -е случайное событие состоит в выборе одного из элементов $x_i \in K_i$ с вероятностью $1/|K_i|$, а случайная величина $\xi_i = l_{K_i}(x_i)$. Полученный таким образом случайный набор $x = (x_1, \dots, x_n)$ является случайным элементом множества M_n , при этом вероятность появления любого элемента равна $1/|M_n|$. Согласно предложению 3, случайная величина $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ задает номер слоя множества M_n , в который попал элемент x . Воспользуемся неравенством Чебышева

$$\mathbf{P}\{|\eta_n - \mathbf{M}\eta_n| \geq \tau\} \leq \frac{\mathbf{D}\eta_n}{\tau^2}$$

(см., например, [4]). Подставив $\tau = n^{1/2+\varepsilon}$, получаем, что

$$\mathbf{P}\{|\eta_n - \mathbf{M}\eta_n| \geq n^{1/2+\varepsilon}\} \leq \frac{\mathbf{D}\eta_n}{n^{1+2\varepsilon}}.$$

Пусть $h_{1,n} = [\mathbf{M}\eta_n - n^{1/2+\varepsilon}]$, а $h_{2,n} = [\mathbf{M}\eta_n + n^{1/2+\varepsilon}]$. Тогда $h_{2,n} - h_{1,n} = o(n)$ при $\varepsilon < 1/2$. А так как $h(M_n) = \Omega(n) = \Omega(\log |M_n|)$ из-за ограниченности $\{|K_i|\}$, то $h_{2,n} - h_{1,n} = o(h(M_n))$. Аналогично $\mathbf{D}\eta_n = O(n)$. Следовательно, $\mathbf{D}\eta_n/n^{1+2\varepsilon} = o(1)$. Поэтому $\mathbf{P}\{|\eta_n - \mathbf{M}\eta_n| < n^{1/2+\varepsilon}\} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Но к этой вероятности сходится отношение $(k_{2,n} - k_{1,n})/|M_n|$. Поэтому $k_{2,n} - k_{1,n} \sim |M_n|$. По следствию 7 из теоремы 2 получаем оценку

$$\log_2 \text{Au}(M_n) \leq \log_2 \left(n! \prod_{i=1}^n \text{Au}(K_i) \right) \leq n \log_2 n + nk \log_2 k = o(|M_n| \log |M_n|).$$

Таким образом, для семейства частично упорядоченных множеств $\{M_n\}$ выполняются условия следствия 9 из теоремы 3.

Теорема доказана.

4. Верхняя оценка сложности сортировки

Рассмотрим частично упорядоченное множество M , у которого $|S_0(M)| = 1$. Обозначим $U_l(M)$ множество элементов из M , каждый из которых меньше не более l элементов из $S_1(M)$.

Предложение 12. Для частично упорядоченно множеств M с $|S_0(M)| = 1$ из неравенства $i \leq j$ следует вложение $U_i(M) \subseteq U_j(M)$.

Лемма 6. Пусть M — частично упорядоченное множество, для которого $|M| \geq 2$ и $|S_0(M)| = 1$. Пусть $M \cong M_1 \times \dots \times M_n$ и существует такая константа k , что $|M_i| \leq k$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда при $l \in \{1, \dots, n\}$ справедлива оценка

$$|U_l(M)| \leq \frac{k^l}{l!} n^l.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное покомпонентное разложение

$$\psi: M \rightarrow M_1 \times \dots \times M_n.$$

Множество $U_l(M)$ целиком содержится в множестве элементов $\{x\}$ частично упорядоченного множества M , среди компонент x_i образов $\psi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ которых имеется не более l элементов, отличных от максимального элемента соответствующего множества M_i . Поэтому

$$|U_l(M)| \leq \binom{n}{l} k^l \leq \frac{n^l}{l!} k^l.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. Для частично упорядоченного множества M со свойством $|S_0(M)| = 1$ и множества $T \subseteq S_1(M)$ справедливо равенство

$$C_M(T) = \{x \in M: \forall y \in S_1(M)((y \geq x) \Rightarrow (y \in T))\}.$$

Доказательство. По определению $C_M(T) = M \setminus H_M(S_1(M) \setminus T)$. Следовательно, утверждение леммы справедливо тогда и только тогда, когда

$$H_M(S_1(M) \setminus T) = M \setminus \{x \in M: \forall y \in S_1(M)((y \geq x) \Rightarrow (y \in T))\}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & M \setminus \{x \in M: \forall y \in S_1(M)((y \geq x) \Rightarrow (y \in T))\} \\ &= \{x \in M: \exists y \in S_1(M)((y \geq x) \wedge (y \in S_1(M) \setminus T))\} \\ &= \{x \in M: \exists y \in (S_1(M) \setminus T)(y \geq x)\} = H_M(S_1(M) \setminus T). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 11. Для частично упорядоченного множества M с $|S_0(M)| = 1$ и множества $T \subseteq S_1(M)$ справедливо включение $C_M(T) \subseteq U_{|T|}(M)$.

Теорема 5. Пусть для бесконечного семейства частично упорядоченных множеств $\{K_i\}$ существует такая постоянная k , что K_i является простым, $|S_0(K_i)| = 1$ и $|K_i| \leq k$ для всех $i \in \mathbb{N}$, и пусть $\{M_n\}$ — бесконечное семейство частично упорядоченных множеств, образованных по правилу

$$M_n = K_1 \times \dots \times K_n.$$

Тогда

$$L(M_n) \lesssim (|K_1| + \dots + |K_n| - n)|M_n|.$$

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ утверждение теоремы верно. Далее предполагаем $n \geq 2$. Алгоритм сортировки частично упорядоченного множества M_n разобьем на пять шагов.

1. *Поиск единственного элемента $S_0(M_n)$.* Пусть $|M_n| = m_n$, $M_n = \{x_1, \dots, x_{m_n}\}$. Рассмотрим следующий процесс: $y_1 = x_1$, а при $i \in \{2, \dots, m_n\}$, если $x_i > y_{i-1}$, то $y_i = x_i$, в противном случае $y_i = y_{i-1}$. При таком построении $y_{m_n} \in \max(M_n)$. Таким образом, единственный элемент множества $S_0(M_n)$ можно найти за не более чем m_n шагов.

2. *Вычерпывание слоя $S_1(M_n)$.* Пусть $s = |S_1(M_n)|$, а $D_0 = M_n \setminus S_0(M_n)$. Рассмотрим следующий процесс:

$$d_i \in \max(D_{i-1}), \quad D_i = D_{i-1} \setminus \{x \in D_{i-1} : x \leq d_i\}, \quad i \in \{1, \dots, s\}.$$

Здесь d_i — произвольный элемент $\max(D_{i-1})$, получаемый по алгоритму шага 1. По построению, получившееся множество $\{d_i\}_{i=1}^s$ совпадает с $S_1(M_n)$. Таким образом, сложность вычерпывания слоя $S_1(M_n)$ равна $2 \sum_{i=1}^s |D_{i-1}|$. Теперь оценим величину $|D_i|$ для $i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$.

По определению

$$D_i = D_{i-1} \setminus \{x \in D_{i-1} : x \leq d_i\}.$$

По построению $S_0(M_n) \cap D_i = \emptyset$ при $i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$. Следовательно, так как $d_i \in S_1(M_n)$, множество D_{i-1} не содержит элементов, больших d_i , и поэтому

$$D_i = \{x \in D_{i-1} : x \not\leq d_i\}.$$

По индукции получаем, что

$$D_i = \{x \in M_n \setminus S_0(M_n) : x \not\leq d_1, \dots, x \not\leq d_i\}.$$

Возьмем произвольное покомпонентное разложение

$$\psi: M_n \rightarrow K_1 \times \dots \times K_n.$$

Так как все $d_j \in S_1(M_n)$, для образа $\psi(d_j) = (d_{j,1}, \dots, d_{j,n})$ существует единственный индекс $l_j \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $d_{j,l_j} \in S_1(K_{l_j})$ и $d_{j,r} \in S_0(K_r)$ для всех $r \in \{1, \dots, n\} \setminus \{l_j\}$. Следовательно, для любого $x \in M_n \setminus S_0(M_n)$ для образа

$\psi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ отношение $(x_1, \dots, x_n) ? (d_{j,1}, \dots, d_{j,n})$ справедливо тогда и только тогда, когда либо $x_{l_j} ? d_{j,l_j}$, либо $x_{l_j} > d_{j,l_j}$. Таким образом,

$$D_i = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in M_n \setminus S_0(M_n) : ((x_{l_1} ? d_{1,l_1}) \vee (x_{l_1} > d_{1,l_1})) \wedge \dots \wedge ((x_{l_i} ? d_{i,l_i}) \vee (x_{l_i} > d_{i,l_i}))\}.$$

Пусть

$$D'_i = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in M_n : ((x_{l_1} ? d_{1,l_1}) \vee (x_{l_1} > d_{1,l_1})) \wedge \dots \wedge ((x_{l_i} ? d_{i,l_i}) \vee (x_{l_i} > d_{i,l_i}))\}.$$

Тогда $D'_i = D_i \cup S_0(M_n)$ и, соответственно, $|D'_i| = |D_i| + 1$. Так как все элементы d_i принадлежат $S_1(M_n)$ и различны между собой, равенство $l_i = l_j$ влечет неравенство $d_{i,l_i} \neq d_{j,l_j}$. Таким образом, при переходе от множества D'_{i-1} к множеству D'_i мы запрещаем хотя бы одно значение (в том числе и d_{i,l_i}) по одной из координат (в данном случае по l_i) покомпонентного разложения элементов множества M_n . А так как по условию $|K_j| \leq k$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$, мы запретим не менее $1/k$ части элементов множества D'_{i-1} . Поэтому,

$$\frac{|D'_i|}{|D'_{i-1}|} \leq \frac{k-1}{k}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|D'_i|} > \frac{1}{|D'_{i-1}|}$$

и

$$\frac{|D_i|}{|D_{i-1}|} = \frac{|D'_i| - 1}{|D'_{i-1}| - 1} = \frac{|D'_i|(1 - 1/|D'_i|)}{|D'_{i-1}|(1 - 1/|D'_{i-1}|)} < \frac{k-1}{k}.$$

В итоге получаем, что оценка сложности шага 2 равна

$$2 \sum_{i=1}^s |D_{i-1}| < 2|D_0| \sum_{i=0}^{\infty} ((k-1)/k)^i < 2km_n.$$

3. *Подготовка к извлечению каркаса.* Пусть

$$l = \max\{|S_1(K)| : K \in \{K_i\}\}.$$

Этот максимум существует в силу ограниченности множества $\{|K_i|\}$. Сравнивая все элементы $S_1(M_n)$ со всеми элементами M_n , найдем множество $U_l(M_n)$. На это нам потребуется не более $|S_1(M_n)|m_n$ сравнений. Это и будет сложностью шага 3.

4. *Извлечение каркаса.* Рассмотрим произвольное покомпонентное разложение

$$\psi: M_n \rightarrow K_1 \times \dots \times K_n.$$

Пусть набор множеств $\{F_i\}_{i=1}^n$ — каркас декартова множества наборов $K_1 \times \dots \times K_n$. Положим $G_i = \psi^{-1}(F_i)$ при $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда набор множеств $\{G_i\}_{i=1}^n$ по определению будет простым каркасом частично упорядоченного множества M_n . Согласно

теореме 2, этот набор будет единственным с точностью до перестановки. Используя лемму 1, получаем, что

$$F_i = C_{\psi(M_n)}(S_1(\psi(G_i))).$$

Тогда включение $F_i \subseteq \psi(U_l(M_n))$ при $i \in \{1, \dots, n\}$ вытекает из следствия 11 леммы 7 и предложения 12. Следовательно, простой каркас $\{G_i\}_{i=1}^n$ целиком содержится в множестве $U_l(M_n)$. Попарно сравним между собой все элементы множества $U_l(M_n)$. На это потребуется не более $|U_l(M_n)|^2/2$ сравнений. Покажем, что произведенных к данному моменту операций достаточно для выявления простого каркаса $\{G_i\}_{i=1}^n$.

Для начала покажем, что этих операций достаточно для определения простоты множества $C_{M_n}(T)$ для любого $T \subseteq S_1(M_n)$. Так как $M_n \cong K_1 \times \dots \times K_n$ и множество $C_{M_n}(T)$ при $T \subseteq S_1(M_n)$ определяется только отношением сравнимости, утверждение леммы 2 справедливо и для простых каркасов в M_n . Теперь по лемме 2 для $T \subseteq S_1(M_n)$ из простоты множества $C_{M_n}(T)$ следует существование такого $i \in \{1, \dots, n\}$, что $T \subseteq S_1(G_i)$. А так как для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует такое $j \in \{1, \dots, n\}$, что $G_i \cong K_j$, то $|T| \leq l$. Таким образом, воспользовавшись следствием 11 леммы 7 и предложением 12, получаем, что если множество $C_{M_n}(T)$ простое, то $|T| \leq l$ и $C_{M_n}(T) \subseteq U_l(M_n)$. В итоге получаем следующий алгоритм распознавания простоты множества $C_{M_n}(T)$ для любого $T \subseteq S_1(M_n)$: если $|T| > l$, то множество $C_{M_n}(T)$ заведомо не простое, в противном случае воспользуемся результатами операций шага 3 для построения множества $C_{M_n}(T)$ и результатами попарных сравнений элементов множества $U_l(M_n)$ для определения простоты множества $C_{M_n}(T)$.

Так как $M_n \cong K_1 \times \dots \times K_n$ и множество $C_{M_n}(T)$ при $T \subseteq S_1(M_n)$ определяется только отношением сравнимости, утверждения леммы 1 и теоремы 1 справедливы и для простых каркасов в M_n . Согласно теореме 1, если набор множеств $T_1, \dots, T_k$ — все максимальные по включению подмножества $S_1(M_n)$ такие, что множества $C_{M_n}(T_1), \dots, C_{M_n}(T_k)$ простые, то $k = n$ и набор множеств $T_1, \dots, T_k$ с точностью до перестановки совпадает с набором множеств $S_1(G_1), \dots, S_1(G_n)$. Для выявления набора множеств $T_1, \dots, T_n$ воспользуемся приведенным выше алгоритмом распознавания простоты множества $C_{M_n}(T)$ при $T \subseteq S_1(M_n)$. Обозначим $H_i = C_{M_n}(T_i)$ при $i \in \{1, \dots, n\}$. Согласно лемме 1, набор множеств $\{H_i\}_{i=1}^n$ является одной из перестановок простого каркаса множества M_n .

5. *Развешивание остальных элементов.* По определению простого каркаса существует перестановка $\pi \in S(n)$, при которой для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ существует изоморфизм $\phi_i: H_i \rightarrow K_{\pi(i)}$. Для каждого $x \in M_n$ определим элементы его покомпонентного разложения $\psi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ согласно правилу

$$x_i = \min\{t: t = \phi_i(y), y \in H_i, y \geq x\}.$$

Так как $S_0(M_n) \subset H_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, а сравнения всех элементов с элементами $S_1(M_n)$ были произведены еще на шаге 3, на определение всех компонент покомпонентного разложения любого элемент $x \in M_n$ будет истрачено не более

$$\sum_{i=1}^n (|K_i| - |S_0(K_i)| - |S_1(K_i)|)$$

сравнений. На все x из M_n будет истрачено не более

$$(|K_1| + \dots + |K_n| - n - |S_1(M_n)|)m_n$$

сравнений. Это и будет сложностью шага 5.

Согласно предложению 1, для решения задачи сортировки частично упорядоченного множества M остается для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ задать сборки $\varphi_i: K_i \rightarrow V_i$, где V_i — множество вершин диаграммы Хассе частично упорядоченного множества K_i . Это можно сделать перебором, исходя из операций шага 3.

Алгоритм построен. Оценим его сложность при $n \geq l$ и $n \rightarrow \infty$. Ограничение $n \geq l$ позволяет применить лемму 6 для оценки сложности шага 3 и получить верхнюю оценку

$$\begin{aligned} L(M_n) &\leq m_n + 2km_n + |S_1(M_n)|m_n + \frac{1}{2} \left(\frac{k^l}{l!} n^l \right)^2 \\ &\quad + (|K_1| + \dots + |K_n| - n - |S_1(M_n)|)m_n \\ &= (|K_1| + \dots + |K_n| - n + 2k + 1)m_n + o(m_n). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 12. В условиях теоремы 5 справедлива оценка

$$L(M_n) \asymp |M_n| \log |M_n|.$$

Пример 1. Обозначим через B частично упорядоченное множество мощности 2, один из элементов которого больше другого. Тогда при $n \in \mathbb{N}$ частично упорядоченное множество B^n представляет собой классический n -мерный куб. Так как множество B является простым и $S_0(B) = 1$, к частично упорядоченному множеству B^n применима теорема 4. Поэтому

$$L(B^n) \gtrsim |B^n| \log_2 |B^n| = n 2^n.$$

Аналогично, согласно теореме 5 справедлива оценка

$$L(B^n) \lesssim (2n - n)2^n = n 2^n.$$

Следовательно,

$$L(B^n) \sim n 2^n.$$

Остается заметить, что нижняя оценка для $L(B^n)$ была впервые получена в [3], а верхняя в [5].

Список литературы

1. Ахо А. В., Хопкрофт Дж., Ульман Дж., *Построение и анализ вычислительных алгоритмов*. Мир, Москва, 1979.
2. Кнут Д., *Искусство программирования для ЭВМ. Сортировка и поиск*, т. 3. Мир, Москва, 1978.
3. Морозенко В. В., О сложности сортировки булевой алгебры. *Дискретная математика* (1991) 3, №1, 42–47.
4. Боровков А. А., *Теория вероятностей*. Наука, Москва, 1986.
5. Faigle U., Turan G., Sorting and recognition problems for ordered sets. *SIAM J. Comput.* (1988) 17, №1, 100–113.

Статья поступила 18.12.2000.