Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 3, 125–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 10:49:28

Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп

© 2001 г. В. А. Ведерников, М. М. Сорокина

Предложен новый функциональный подход к исследованию классов групп, позволивший на языке функций описать все формации и классы Фиттинга конечных групп. Построены Ω -расслоенные формации $\Omega F(f, \varphi)$ и Ω -расслоенные классы Фиттинга $\Omega F(f, \varphi)$ со спутником f и направлением φ . Каждому спутнику f соответствует бесконечное множество различных направлений φ . Одно из направлений приводит к ранее рассмотренным Ω -композиционным формациям. На этом пути получены Ω -канонические и Ω -свободные формации и классы Фиттинга. При фиксированном направлении φ получено строение минимального спутника f .

1. Введение

Понятие формации было введено в 1963 году Гашюцем в [1], и уже в этой работе функциональные методы нашли применение в построении формаций. А именно, Гашюцем были введены локальные формации, занимающие центральное место в теории формаций. Дальнейшее развитие функциональный подход к изучению формаций нашел в работе Л. А. Шеметкова [2], в которой были определены ступенчатые, примарно постоянные, однородные и композиционные формации. Отметим, что композиционные формации были построены также Бэром (см. [3]), а Хартли в [4] определил локальные классы Фиттинга. В последние годы Л. А. Шеметковым и А. Н. Скибой интенсивно исследуются частично локальные (ω -локальные) формации и классы Фиттинга (см., например, [5, 6]). В [7, 8] независимо определены и исследованы Ω -композиционные формации с помощью Ω -композиционного спутника f , где Ω — непустой подкласс класса $\mathcal{I}$ всех простых групп. Идея построения новых видов формаций и классов Фиттинга с помощью Ω -спутников привела к необходимости рассмотрения Ω -спутников различных направлений, причем направление Ω -спутника f определяется как отображение класса $\mathcal{I}$ в множество всех непустых формаций Фиттинга. Ясно, что такие направления образуют бесконечное множество, и значит, для фиксированного класса Ω можно построить бесконечное множество новых видов формаций (Ω -расслоенных формаций).

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Приведем некоторые обозначения и определения, другие обозначения и определения, встречающиеся в статье, можно найти в книгах [9, 10]. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ обозначает класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$; в частности, (G) — класс всех групп,

изоморфных группе G ; $K(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; $K(\mathfrak{X})$ — объединение классов $K(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$. Пусть $\mathcal{I}$ — класс всех простых конечных групп, Ω — непустой подкласс класса $\mathcal{I}$. Если $K(G) \subseteq \Omega$, то G называется Ω -группой. Через $\mathfrak{G}_\Omega$ обозначают множество всех Ω -групп [7] и полагают что $1 \in \mathfrak{G}_\Omega$. Пусть $A \in \mathcal{I}$. Тогда $\mathfrak{G}_A = \mathfrak{G}_{(A)}$, $A' = \mathcal{I} \setminus (A)$. Главный фактор H/K группы G называется главным A -фактором, если $K(H/K) = (A)$. Через $F_A(G)$ обозначают пересечение централизаторов всех главных A -факторов группы G . Если в G нет главных A -факторов, то полагают $F_A(G) = G$ [11]. Запись $M \triangleleft G$ означает, что M является нормальной подгруппой группы G . Пусть $\mathfrak{F}$ — формация (класс Фиттинга). Тогда $G^\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{F}$ -корадикал ($G_\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{F}$ -радикал) группы G . Будем полагать

$$O_\Omega(G) = G_{\mathfrak{G}_\Omega}, \quad O^\Omega(G) = G^{\mathfrak{G}_\Omega}, \quad O_{\Omega', \Omega} = G_{\mathfrak{G}_{\Omega'} \mathfrak{G}_\Omega}, \quad O^{\Omega, \Omega'} = G^{\mathfrak{G}_\Omega \mathfrak{G}_{\Omega'}}.$$

Через $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ будем обозначать гашущево произведение формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, то есть класс всех таких групп G , для которых $G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F}$.

2. Ω -расслоенные формации

Определение 1. Функцию $f: \Omega \cup \{\Omega\}' \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из Ω , назовем Ω -формационной функцией или, коротко, ΩF -функцией. Функцию $g: \mathcal{I} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathcal{I}$, назовем формационной функцией или, коротко, F -функцией. Функцию $\varphi: \mathcal{I} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathcal{I}$, назовем формационно-радикальной функцией или, коротко, FR -функцией.

Лемма 1. Пусть f — ΩF -функция, φ — FR -функция и

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \Omega F(f, \varphi) \\ &= \{G \in \mathfrak{H} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in \varphi(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}. \end{aligned}$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией.

Доказательство. Пусть $g \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$. Так как

$$NO_\Omega(G)/N \cong O_\Omega(G)/(N \cap O_\Omega(G/N)) \in \mathfrak{G}_\Omega,$$

то $NO_\Omega(G)/N \subseteq O_\Omega(G/N) = R/N$. Поэтому

$$(G/N)/O_\Omega(G/N) \cong G/R \cong (G/O_\Omega(G))/(R/(R/O_\Omega(G))) \in f(\Omega').$$

Поскольку для любого $A \in \Omega \cap K(G/N)$ верно $NG_{\varphi(A)}/N \cong G_{\varphi(A)}/N \cap G_{\varphi(A)} \in \varphi(A)$, то $NG_{\varphi(A)}/N \subseteq (G/N)_{\varphi(A)}$ и

$$(G/N)/(G/N)_{\varphi(A)} \cong G/T \cong (G/G_{\varphi(A)})/(T/G_{\varphi(A)}) \in \varphi(A)$$

для всех $A \in \Omega \cap K(G/N)$. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G/N_i \in \mathfrak{H}$, $i = 1, 2$. Покажем, что $G/D \in \mathfrak{F}$, где $D = N_1 \cap N_2$. Ясно, что G/D изоморфно подпрямому произведению групп G/N_1 и G/N_2 . Поэтому существует такая группа T , что $T = K \times L$, H — подпрямое произведение

групп K и L , причем $K \cong G/N_1$, $L \cong G/N_2$ и $H \cong G/D$. Так как $\mathfrak{G}_\Omega$ является формацией Фиттинга, по лемме 8 из [7] $O_\Omega(H) = H \cap O_\Omega(T)$. Далее, $O_\Omega(T) = O_\Omega(K) \times O_\Omega(L)$ и $O_\Omega(T)H$ является подпрямым произведением групп K и L . Тогда по лемме 2 из [12] $HO_\Omega(T)/O_\Omega(T)$ является подпрямым произведением групп $KO_\Omega(T)/O_\Omega(T) \cong K/O_\Omega(K)$ и $LO_\Omega(T)/O_\Omega(T) \cong L/O_\Omega(L)$. Так как $K/O_\Omega(K) \cong (G/N_1)/O_\Omega(G/N_1) \in f(\Omega')$ и $L/O_\Omega(L) \in f(\Omega')$, то $HO_\Omega(T)/O_\Omega(T) \cong H/O_\Omega(H) \in f(\Omega')$, и значит, $(G/D)/O_\Omega(G/D) \in f(\Omega')$. Поскольку $\varphi(A)$ — формация Фиттинга, аналогично получим, что $(G/D)/(G/D)_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G/D)$. Следовательно, $G/D \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}$ является формацией. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть f — F -функция, φ — FR -функция и

$$\mathfrak{F} = F(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\varphi(A)} \text{ для всех } A \in K(G)\}.$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией.

Определение 2. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем Ω -расслоенной, если $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где f и φ — некоторые ΩF -функция и ΩR -функция соответственно. Функцию f будем называть ΩF -спутником, а функцию φ — направлением Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}$. Пусть f — F -функция. Формацию $\mathfrak{F} = F(f, \varphi)$ назовем расслоенной формацией с направлением φ , а f будем называть F -спутником формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{M}$ — формация, $K(\mathfrak{M}) \cap \Omega = \emptyset$. Тогда $\mathfrak{M} = \Omega F(m, \varphi)$, где m — ΩF -функция такая, что $m(\Omega') = \mathfrak{M}$, $m(A) = \emptyset$ для всех $A \in \Omega$, и φ — произвольная FR -функция. В частности, пустая формация $\emptyset$ и единичная формация (1) являются Ω -расслоенными формациями для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathcal{I}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \Omega F(m, \varphi)$, m и φ определены в формулировке леммы. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Если $G \in \mathfrak{M}$, то $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{M} = m(\Omega')$ и из $A \in \Omega \cap K(G) = \emptyset$ следует, что $G/G_{\varphi(A)} \in m(A)$. Поэтому $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$.

Допустим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда H — монолитическая группа с монолитом $P = H^{\mathfrak{M}}$. Так как $H/O_\Omega(H) \in m(\Omega') = \mathfrak{M}$, то $P \subseteq O_\Omega(H)$. Пусть $K(P) = (B)$. Тогда $B \in K(H) \cap \Omega$ и $H/H_{\varphi(B)} \in m(B) = \emptyset$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Определение 3. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ назовем Ω -свободной или, коротко, ΩFr -формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{\Omega'}$ для любого $A \in \mathcal{I}$, и будем обозначать

$$\mathfrak{F} = Fr(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/O_{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\},$$

а f будем называть ΩFr -спутником формации $\mathfrak{F}$. Пусть f — F -функция. Формацию

$$\mathfrak{F} = Fr(t) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$$

назовем свободной формацией с Fr -спутником f .

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является Ω -свободной формацией.

Доказательство. Пусть f — такая ΩF -функция, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$,

$$f(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$$

для всех $A \in \Omega$, и $\mathfrak{F}_1 = \Omega Fr(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда $H/O_\Omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Кроме того, $H/O_{A'}(H) \in (G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}) \subseteq f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — монолитическая группа с монолитом $M = T^\mathfrak{F}$. Поскольку $T/O_\Omega(T) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $\Omega = K(\mathfrak{F})$, то $T/O_\Omega(T)$ является Ω -группой. Поскольку расширение Ω -группы с помощью Ω -группы является Ω -группой, то $T = O_\Omega(T)$. Пусть $K(M) = (A)$. Тогда $A \in \Omega$ и по определению $\mathfrak{F}_1$ справедливо включение $T/O_{A'}(T) \in f(A) \subset \mathfrak{F}$. Следовательно, $M \subseteq O_{A'}(T)$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 1 и леммы 3 следует, что каждая формация является Ω -свободной для некоторого непустого класса простых групп Ω . Обозначим направление свободной формации через φ_0 .

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где φ — произвольная FR -функция. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $\mathfrak{F} = \Omega F(g, \varphi)$, где $g(A) = f(A) \cap \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$;
- (2) $\mathfrak{F} = \Omega F(h, \varphi)$, где $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega F(g, \varphi)$, где g — функция, описанная в пункте 1 леммы. Так как $g(A) \subseteq f(A)$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — формация, то $\{G/O_\Omega(G), G/G_{\varphi(A)}\} \subseteq \mathfrak{F}$, и значит, $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \cap \mathfrak{F} = g(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \cap \mathfrak{F} = g(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Пусть h — ΩF -функция из пункта 2 леммы и $\mathfrak{H} = \Omega F(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A) = h(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $P = H^\mathfrak{F}$. Из $H/O_\Omega(H) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$ следует, что $P \subseteq O_\Omega(H)$ и $H/O_\Omega(H) \cong (H/P)/(O_\Omega(H)/P) = (H/P)/O_\Omega(H/P) \in f(\Omega')$. Кроме того, для любого $A \in \Omega \cap K(H)$ справедливо включение $H/H_{\varphi(A)} \in h(A) = f(A)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Замечание 2. Пусть A — простая группа и $\mathfrak{S}_{cA}$ — класс всех конечных групп, у которых каждый главный A -фактор централен. Если A — неабелева простая группа, то $\mathfrak{S}_{cA} = \mathfrak{S}_{A'}$. Нетрудно показать, что класс $\mathfrak{S}_{cA}$ является формацией Фиттинга и $\mathfrak{S}_{cA}$ -радикал группы G равен $F_A(G)$ (см. теоремы 5 и 7 в [13]). Обозначим $\mathfrak{S}_{cA}$ -корадикал группы G через $F^A(G)$.

Определение 4. Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называется Ω -композиционной или, коротко, ΩC -формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любого $A \in \mathcal{I}$, в этом случае пишут

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \Omega CF(f) \\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/F_A(G) \in f(A) \text{ для любого } A \in \Omega \cap K(G)\}, \end{aligned}$$

а f называют ΩC-спутником формации $\mathfrak{F}$ (см. [7, 8]). В случае, когда функция f является формационной, получаем определение композиционной формации

$$\mathfrak{F} = CF(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/F_A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$$

с C-спутником f .

Определение 5. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называют Ω-канонической или, коротко, ΩK-формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'} \mathfrak{G}_A$ для любого $A \in \mathcal{I}$ и пишут

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \Omega KF(f) \\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}, \end{aligned}$$

а f называют ΩK-спутником формации $\mathfrak{F}$. Пусть f — F-функция. Формацию

$$\mathfrak{F} = KF(t) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$$

назовем канонической формацией с K-спутником f .

Пример 1. Пусть $\mathfrak{F} = \text{form } A$, где A — простая неабелева группа. Тогда $K(\mathfrak{F}) = (A)$. Пусть $\Omega = (A)$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ не является Ω-канонической формацией. Пусть

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &= \Omega KF(f) \\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_A(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для } A \in \Omega \cap K(G)\}. \end{aligned}$$

Если $f(\Omega') = \emptyset$, то условие $G/O_A(G) \in f(\Omega')$ не выполняется ни для одной группы, и значит, $\mathfrak{F}_1 = \emptyset$. Пусть $f(\Omega') \neq \emptyset$. Если $f(A) = \emptyset$, то условие $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для $A \in \Omega \cap K(G)$ будет выполняться лишь для A' -групп. Поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_{A'}$ и $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}$. Пусть $f(\Omega') \neq \emptyset$, $f(A) \neq \emptyset$ и H — произвольная (A) -группа. Тогда $H/O_A(H) \in f(\Omega')$ и $H/O_{A',A}(H) \in f(A)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$. Так как регулярное сплетение $A \wr A \in \mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1$. Формация $\mathfrak{F}$ является композиционной. Поэтому композиционная формация $\mathfrak{F}$ не обязана быть Ω-канонической. Заметим, что $\mathfrak{L} = \text{lform } A = \mathfrak{N}_{\pi(A)} \text{form } A \neq \mathfrak{F}_1$. Поэтому и локальная формация $\mathfrak{L}$ не обязана быть Ω-канонической.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ и ΩF-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — расслоенная формация с направлением φ и F-спутником f_1 таким, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \emptyset$ для любого $A \in \mathfrak{F} \setminus \Omega$.

Такие ΩF-спутник f и F-спутник f_1 формации $\mathfrak{F}$ будем называть согласованными.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \Omega F(f, \varphi) \\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим F-функцию f_1 такую, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \emptyset$ для любого $A \in \mathcal{I} \setminus \Omega$. Пусть

$$\mathfrak{F}_1 = F(f_1, \varphi) = \{H \in \mathfrak{G} \mid H/H_{\varphi(A)} \in f_1(A) \text{ для любого } A \in K(H)\}.$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда G является Ω -группой, и значит, $G/G_{\varphi(A)} \in f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in K(G) \cap \Omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — монолитическая группа с монолитом $M = T^{\mathfrak{F}}$. В силу леммы 4 можно считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Пусть $K(M) = (B)$. Поскольку $T \in \mathfrak{F}_1$, то $T/T_{\varphi(B)} \in f_1(B)$, и значит, $f_1(B) \neq \emptyset$. Тогда из определения f_1 следует, что $B \in \Omega$ и $M \subseteq O_{\Omega}(T)$. Поэтому $T/O_{\Omega}(T) \cong (T/M)/(O_{\Omega}(T)/M) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$ и $T/T_{\varphi(A)} = f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in K(T) = \Omega \cap K(T)$. Отсюда получаем, что $T \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие, следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Докажем достаточность. Пусть теперь $\mathfrak{F} = F(g, \varphi)$ — расслоенная формация с направлением φ . Рассмотрим ΩF -функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$, $h(A) = g(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega F(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и для любого $A \in \Omega \cap K(G)$ справедливо включение $G/G_{\varphi(A)} \in g(A) = h(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка в $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H — монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Так как $H/O_{\Omega} \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $M \subseteq O_{\Omega}(H)$. Поскольку $H/M \in \mathfrak{F}$ и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$, то H/M является Ω -группой, и значит, H — Ω -группа. В силу определения $\mathfrak{H}$ справедливо включение $H/H_{\varphi(A)} \in h(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(H) = K(H)$, и из определения функции h следует, что $H/H_{\varphi(A)} \in h(A) = g(A)$ для любого $A \in K(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие, поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, и теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω -свободной с ΩFr -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — свободная формация с Fr -спутником f_1 , согласованным с f .

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω -композиционной с ΩC -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — композиционная формация с C -спутником f_1 , согласованным с f .

Следствие 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω -канонической с ΩK -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — каноническая формация с K -спутником f_1 , согласованным с f .

Замечание 3. Пусть ψ_1 и ψ_2 — произвольные ΩF -функции (F -функции, FR -функции). Будем говорить, что $\psi_1 \leq \psi_2$, если $\psi_1(A) \leq \psi_2(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (для всех $A \in \mathcal{I}$). Среди направлений φ расслоенной формации с $\varphi_0 \leq \varphi$ важное место занимают направления, удовлетворяющие равенству $\mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для всех $A \in \mathcal{I}$. Этому равенству удовлетворяют направления Ω -свободной, Ω -композиционной, Ω -канонической формаций, а также направления вида $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{X}$ для любого $A \in \mathcal{I}$ и любой непустой формации Фиттинга $\mathfrak{X}$.

Определение 6. Направление φ расслоенной формации назовем правильным или, коротко, r -направлением, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A)$ для любого $A \in \mathcal{I}$.

Теорема 3. Если $\mathfrak{F}$ — расслоенная формация с r -направлением φ , то $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенной формацией с r -направлением φ для любого непустого класса $\Omega \subset \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть Ω — непустой подкласс класса $\mathcal{I}$, $\mathfrak{F} = F(f, \varphi)$ — расслоенная формация с r -направлением φ . Рассмотрим ΩF -функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$,

$h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega F(h, \varphi)$. Как и при доказательстве теоремы 2, легко проверить, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $H \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ и H — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H — монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Пусть $K(M) = (B)$. Как и при доказательстве теоремы 2, $M \subseteq O_{\Omega}(H)$ и поэтому $B \in \Omega$. Тогда $H/H_{\varphi(B)} \in h(B) = f(B)$. Пусть $A \in K(H)/(B)$. Введем обозначение $(H/M)_{\varphi(A)} = T/M$. Поскольку $T/M \in \varphi(A)$ и $M \in \mathfrak{G}_{A'}$, то $T \in \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$. Отсюда получаем равенство $(H/M)_{\varphi(A)} = H_{\varphi(A)}/M$, и значит,

$$H/H_{\varphi(A)} \cong (H/M)/(H_{\varphi(A)}/M) = (H/M)/(H/M)_{\varphi(A)} \in f(A).$$

Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. теорема доказана.

Следствие 4. Если $\mathfrak{F}$ — свободная формация, то $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной формацией для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathcal{I}$.

Следствие 5 ([7]). Если $\mathfrak{F}$ — композиционная формация, то $\mathfrak{F}$ является Ω-композиционной формацией для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathcal{I}$.

Следствие 6. Если $\mathfrak{F}$ — каноническая формация, то $\mathfrak{F}$ является Ω-канонической формацией для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathcal{I}$.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-канонической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является Ω-композиционной.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $A \in K(G)$. Тогда $A \in \mathfrak{A}$. Пусть $A \cong Z_p$. Покажем, что $F_{Z_p}(G) = O_{(Z_p)', Z_p}(G)$. Действительно, поскольку $G \in \mathfrak{G}$, каждый главный p -фактор группы G является главным Z_p -фактором группы G , и поэтому $F_{Z_p}(G) = F_p(G)$. Так как $F_p(G) \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$, то $F_{Z_p}(G) \subseteq O_{(Z_p)', Z_p}(G)$. С другой стороны, $F_p(G)$ — наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа группы G . Следовательно, $F_{Z_p}(G) = O_{(Z_p)', Z_p}(G)$. Пусть

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \Omega KF(f) \\ &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/O_{A', A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}. \end{aligned}$$

Это, в силу равенства $F_A(G) = O_{A', A}(G)$ для всех $A \in K(G)$, справедливо тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/F_A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\} \\ &= \Omega CF(f). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 7. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$. Формация $\mathfrak{F}$ является канонической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является локальной.

Доказательство проводится путем последовательного применения при $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$ следствия 3, теоремы 4, следствия 2 и равносильности понятий композиционности и локальности для разрешимой формации.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор ΩF -функций (F -функций). Обозначим через $\bigcap_{i \in I} f_i$ такую ΩF -функцию (F -функцию) f , что

$$f(A) = \bigcap_{i \in I} f_i(A)$$

для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (для всех $A \in \mathcal{T}$).

Лемма 5. Пусть φ — произвольная FR -функция, $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \Omega F(f_i, \varphi)$, $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega F(f, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}_i$, и значит, $G/O_\Omega(G) \in f_i(\Omega')$, $i \in I$. Поэтому $G/O_\Omega(G) \in \bigcap_{i \in I} f_i(\Omega') = f(\Omega')$. Так как для любого $A \in \Omega \cap K(G)$ справедливы включения $G/G_{\varphi(A)} \in f_i(A)$, $i \in I$, то $G/G_{\varphi(A)} \in \bigcap_{i \in I} f_i(A) = f(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $B \in \mathfrak{H}$. Тогда $B/O_\Omega(B) \in f(\Omega') = \bigcap_{i \in I} f_i(\Omega')$ и $B/B_{\varphi(A)} \in f(A) = \bigcap_{i \in I} f_i(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(B)$. Отсюда следует, что $B/O_\Omega(B) \in f_i(\Omega')$ и $B/B_{\varphi(A)} \in f_i(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(B)$, $i \in I$. Поэтому $B \in \mathfrak{F}_i$, $i \in I$, и значит, $B \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Нетрудно проверить, что и для расслоенных формаций справедливо утверждение, аналогичное лемме 5.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Обозначим через $\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех Ω -расслоенных формаций с направлением φ , которые содержат $\mathfrak{X}$, $F(\mathfrak{X}, \varphi)$ — пересечение всех расслоенных формаций с направлением φ , содержащих $\mathfrak{X}$. При фиксированной φ формации $\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $F(\mathfrak{X}, \varphi)$ будем также обозначать $\Omega F(\mathfrak{X})$ и $F(\mathfrak{X})$ соответственно. Далее $\Omega Fr()$ и $Fr(\mathfrak{X})$ — Ω -свободная и свободная формация соответственно, порожденные множеством $\mathfrak{X}$; $\Omega CF(\mathfrak{X})$ и $CF(\mathfrak{X})$, $\Omega KF(\mathfrak{X})$ и $KF(\mathfrak{X})$ — соответственно Ω -композиционная и композиционная, Ω -каноническая и каноническая формации, порожденные $\mathfrak{X}$.

В силу замечания 3 можно считать, что всякое множество ΩF -функций (F -функций) является частично упорядоченным, и имеет смысл говорить о его минимальных и максимальных элементах. ΩF -функцию (F -функцию) f назовем минимальным ΩF -спутником (F -спутником) Ω -расслоенной (расслоенной) формации $\mathfrak{F}$ с направлением φ , если f является минимальным элементом множества всех ΩF -спутников (F -спутников) формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω -расслоенная формация $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным ΩF -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \text{form}(G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. При $\mathfrak{X} = (1)$ утверждение верно. Пусть $K(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, φ — такая FR -функция, что $\varphi_0 \leq \varphi$. Поскольку класс $\mathfrak{G}$ является Ω -расслоенной формацией с направлением φ и $\subseteq \mathfrak{G}$, то формация $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует, и значит, множество L всех ΩF -спутников формации $\mathfrak{F}$ непусто. Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L . По лемме 5 $\mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$ и поэтому $f_1 \in L$. Кроме того, для любого

элемента $h \in L$ справедливо неравенство $f_1 \leq h$. Тем самым установлено, что f_1 — единственный минимальный ΩF -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f — ΩF -функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$. Тогда $M/O_\Omega(M) \in f(\Omega')$ и из включения $K(M) \subseteq (\mathfrak{X})$ следует, что $M/M_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(M)$. Это означает, что $M \in \Omega F(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \Omega F(f, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \Omega F(f, \varphi)$.

Покажем, что $f \leq f_1$. Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{F}$, что $A \in \Omega \cap K(H)$. Из $\mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$ следует $H/H_{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Поэтому $f_1(A) \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $A \in \Omega \cap K(G)$, то из того, что $G \in \mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$, получаем включение $G/G_{\varphi(A)} \in f_1(A)$.

Пусть теперь $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{X}) \setminus (\Omega \cap K(G)))$. Тогда $G \in \mathfrak{G}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$, и поэтому $G/G_{\varphi(A)} \cong 1 \in f_1(A)$. Таким образом, $f(A) = \text{form}(G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(A)$. Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\Omega')$. Если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$, то $f(A) = \emptyset \subseteq f_1(A)$. Следовательно, $f \leq f_1$ и $\Omega F(f, \varphi) \subseteq \Omega F(f_1, \varphi)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, и значит, $f \in L$. Поскольку f_1 — единственный минимальный ΩF -спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f \leq f_1$ влечет $f = f_1$. Теорема доказана.

Следствие 8. Пусть f_i — минимальный ΩF -спутник Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ тогда и только тогда, когда $f_1 \leq f_2$.

Следствие 9. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω -свободная формация $\mathfrak{F} = \Omega FR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩFr -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенной формацией с направлением φ_0 , по теореме 5 формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ΩFr -спутником f , причем $f(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in \Omega \cap F(\mathfrak{X})$. Следствие доказано.

Следствие 10. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда свободная формация $\mathfrak{F} = Fr(\mathfrak{X})$ обладает единственным Fr -спутником f_1 таким, что

$$f_1(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f_1(A) = \emptyset$, если $A \in \mathfrak{F} \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \mathcal{I}$. Согласно следствию 4 формация $\mathfrak{F}$ является Ω -свободной, и значит, по следствию 9, $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ΩFr -спутником f , причем $\Omega \cap K(\mathfrak{X}) = K(\mathfrak{X})$. По следствию 1 формация $\mathfrak{F}$ обладает Fr -спутником f_1 , согласованным с f . Пусть g_1 — внутренний Fr -спутник формации $\mathfrak{F}$ и g — внутренний ΩFr -спутник формации $\mathfrak{F}$, согласованный с g_1 . Так как $f \leq g$, то и $f_1 \leq g_1$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным Fr -спутником f_1 . Следствие доказано.

Доказательства двух следующих утверждений проводятся аналогично доказательствам следствий 9 и 10 соответственно.

Следствие 11. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω -каноническая формация $\mathfrak{F} = \Omega KF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩK -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 12. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда каноническая формация $\mathfrak{F} = \Omega KF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным K -спутником f таким, что $f(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \mathcal{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 13 ([7, 8]). Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω -композиционная формация $\mathfrak{F} = \Omega CF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩC -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \text{form}(G/F_A(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 14. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп и $K(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Тогда композиционная формация $\mathfrak{F} = CF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным C -спутником f таким, что $f(A) = \text{form}(G/F_A(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \mathcal{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.

Лемма 6. Пусть Ω — непустой класс простых групп. Если формация $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенной с r -направлением φ , то $\mathfrak{F}$ является (Z_p) -расслоенной формацией с r -направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ — Ω -расслоенная формация с r -направлением φ и $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является (Z_p) -расслоенной формацией с r -направлением φ . Пусть $(Z_p)F$ -функция f_p такова, что $f_p(Z_p) = f(Z_p)$, $f_p((Z_p)') = \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{F}_1 = (Z_p)F(f_p, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} = f_p((Z_p)')$. Если $Z_p \in K(G)$, то $G/G_{\varphi(Z_p)} \in f(Z_p) = f_p(Z_p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $P = H^{\mathfrak{F}}$. В силу леммы 4, можно считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Тогда

$$H/O_\Omega(H) \cong (H/O_p(H))/(O_\Omega(H)/O_p(H)) \in f((Z_p)') = \mathfrak{F} = f(\Omega').$$

Пусть $A \in \Omega \cap K(H)$. Если $A \cong Z_p$, то $H/H_{\varphi(Z_p)} \in f_p(Z_p) = f(Z_p)$. Пусть A не изоморфна Z_p . Из включения $H/O_p(H) \in \mathfrak{F}$ следует, что $P \subseteq O_p(H)$ и $P \in \mathfrak{G}_{A'}$. Пусть $(H/P)_{\varphi(A)} = T/P$. Тогда $T \in \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ и поэтому $T = H_{\varphi(A)}$. Отсюда получаем, что

$$H/H_{\varphi(A)} \cong (H/P)/(H_{\varphi(A)}/P) = (H/P)/(H/P)_{\varphi(A)} \in f(A).$$

Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

Замечание 4. Лемма 1 не допускает обращения. Действительно, в силу примера 1 формация $\mathfrak{F} = \text{form } A$, где A — простая неабелева группа, не является Ω -канонической формацией для $\Omega = (A)$. Однако, по лемме 3, $\mathfrak{F}$ является (Z_p) -канонической для любого простого p , и, в частности, для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.

Определение 7. Правильное направление φ расслоенной формации назовем $гп$ -направлением, если $A \notin \varphi(A)$ для любой неабелевой группы $A \in \mathcal{I}$.

Замечание 5. Направления Ω -свободной и Ω -композиционной формаций являются $гп$ -направлениями, а направление Ω -канонической формации не является $гп$ -направлением. Отметим, что $г$ -направления φ расслоенной формации такие, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}$ для любой простой группы $A \in \mathcal{I}$, также являются $гп$ -направлениями.

Теорема 6. Пусть Ω — непустой класс простых групп. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенной с $гп$ -направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (Z_p) -расслоенной формацией с $гп$ -направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 6.

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = (Z_p)F(b_p, \varphi)$ — (Z_p) -расслоенная формация с $гп$ -направлением φ для всех $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. В силу леммы 4 и теоремы 5 можно считать что $b_p((Z_p)') = \mathfrak{F}$ и

$$b_p(Z_p) = \text{form}(G/G_{\varphi(Z_p)} \mid G \in \mathfrak{F})$$

для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Пусть b — такая ΩF -функция, что $b(\Omega') = \mathfrak{F}$, $b(Z_p) = b_p(Z_p)$ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$, $b(Z_p) = \emptyset$ для всех $Z_p \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F})$, $b(A) = \mathfrak{F}$, если $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$, и $\mathfrak{B} = \Omega F(b, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = b(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Если $A \cong Z_p$, то $G/G_{\varphi(Z_p)} \in b_p(Z_p) = b(Z_p)$. Если $A \notin \mathfrak{A}$, то $G/G_{\varphi(A)} \in \mathfrak{F} = b(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Предположим, что $B \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$ и B — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда группа B монолитична с монолитом $R = B^{\mathfrak{F}}$. Пусть $A \in K(R)$. Поскольку $B/O_\Omega(B) \in b(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $R \subseteq O_\Omega(B)$ и $A \in \Omega$. Так как $B/B_{\varphi(A)} \in b(A)$, то $b(A) \neq \emptyset$, и значит, $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Пусть A — неабелева группа. Так как φ — $гп$ -направление, то $A \notin \varphi(A)$, и значит, $B_{\varphi(A)} = 1$. Отсюда получаем, что

$$B \cong B/B_{\varphi(A)} \in b(A) = \mathfrak{F},$$

что невозможно. Поэтому $A \cong Z_p$. Тогда $B/B_{\varphi(Z_p)} \in b(Z_p) = b_p(Z_p)$. Кроме того,

$$B/O_p(B) \cong (B/R)/(O_p(B)/R) \in \mathfrak{F} = b_p((Z_p)').$$

Таким образом, $B \in (Z_p)F(b_p, \varphi) = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Теорема доказана.

Следствие 15. Пусть Ω — непустой класс простых групп и $\Omega_1 = \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенной с $гп$ -направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является Ω_1 -расслоенной формацией с $гп$ -направлением φ .

Доказательство. По теореме 6, $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенной формацией с $гп$ -направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (A) -расслоенной формацией с $гп$ -направлением φ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F}) = \Omega_1 \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F})$, но это по теореме 6 выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является Ω_1 -расслоенной с $гп$ -направлением φ . Следствие доказано.

3. Ω -расслоенные классы Фиттинга групп

В дальнейшем неоднократно будет применяться известная, по-видимому, лемма.

Лемма 7. Пусть N — нормальная подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- $O^\Omega(N) \subseteq N \cap O^\Omega(G)$,
- если $G/N \in \mathfrak{G}_\Omega$, то $O^\Omega(G) = O^\Omega(N)$,
- если $H \triangleleft G$ и $G = HN$, то $O^\Omega(H)O^\Omega(N)$.

Определение 8. Функцию $f: \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из Ω , назовем Ω -радикальной функцией или, коротко, ΩR -функцией

Функцию $g: \mathcal{I} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathcal{I}$, назовем радикальной функцией или, коротко, R -функцией.

Лемма 8. Пусть f — ΩR -функция, φ — FR -функция и

$$\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}.$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$. Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 7 $O^\Omega(N) \subseteq O^\Omega(G) \in f(\Omega')$ и класс $f(\Omega')$ нормально наследствен, то $O^\Omega(N) \in f(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(N)$. Тогда $A \in \Omega \cap K(G)$ и по условию $S = G^{\varphi(A)} \in f(A)$. Из того, что $NS/S \triangleleft G/S\varphi$, и нормальной наследственности класса $\varphi(A)$ следует, что $N/N \cap S \in \varphi(A)$. Поэтому $T = N^{\varphi(A)} \subseteq N \cap S$. Так как $T \triangleleft S$ и класс $F(A)$ нормально наследствен, то $T \in f(A)$, и значит, $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G = HK$, $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, H и K принадлежат $\mathfrak{F}$. Так как по лемме 7 $O^\Omega(G) = O^\Omega(H)O^\Omega(K)$ и $O^\Omega(H)$ и $O^\Omega(K)$ принадлежат классу Фиттинга $F(\Omega')$, то $O^\Omega(G) \in f(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Покажем, что $G^{\varphi(A)} \in f(A)$. Так как $X = H^{\varphi(A)} \in f(A)$, $Y = K^{\varphi(A)} \in f(A)$ и $f(A)$ — класс Фиттинга, то $D = XY \in f(A)$, причем $D \triangleleft G$. Из равенства $G = HK$ следует, что $G/D = HD/D \cdot KD/D$. По модулярному тождеству Дедекинда $HD/D \cong H/H \cap D = H/X(H \cap Y)$. Поскольку $H/X \in \varphi(A)$ и $\varphi(A)$ — формация, то

$$H/X(H \cap Y) \cong (H/X)/(X(H \cap Y)/X) \in \varphi(A),$$

и значит, $HD/D \in \varphi(A)$. Аналогично можно показать, что $KD/D \in \varphi(A)$. Так как $\varphi(A)$ — класс Фиттинга, то $G/D = HD/D \cdot KD/D \in \varphi(A)$. Следовательно, $G^{\varphi(A)} \subseteq D$. Из включения $D \in f(A)$ получим, что $G^{\varphi(A)} \in f(A)$, и значит, $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 9. Пусть f — R -функция, φ — FR -функция и

$$\mathfrak{F} = R(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}.$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

Определение 9. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем Ω-расслоенным, если $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, где f и φ — некоторые ΩR-функция и FR-функция соответственно. Функцию f будем называть ΩR-спутником, а функцию φ — направлением Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Напомним, что группа G называется комонолитической, если в G имеется такая нормальная подгруппа M (комонолит группы G), что G/M — простая группа и $N \subseteq M$ для любой собственной нормальной подгруппы N группы G (см. [6]).

Лемма 10. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга и $K(\mathfrak{M}) \cap \Omega = \emptyset$. Тогда $\mathfrak{M} = \Omega R(m, \varphi)$, где m — ΩR-функция такая, что $m(\Omega') = \mathfrak{M}$, $M(A) = \emptyset$ для всех $A \in \Omega$, и φ — произвольная FR-функция. В частности, классы Фиттинга $\emptyset$ и (1) являются Ω-расслоенными для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathcal{I}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \Omega R(m, \varphi)$, где m и φ определены в лемме. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда $O^\Omega(G) = G \in \mathfrak{M} = m(\Omega')$, и из $A \in \Omega \cap K(G) = \emptyset$ следует, что $G^{\varphi(A)} \in m(A)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{M}_1$, и значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Предположим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}$. Тогда $O^\Omega(H) \in m(\Omega') = \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ и $|H| \neq 1$. Пусть M_1 и M_2 — собственные нормальные подгруппы группы H такие, что $H = M_1 M_2$. Так как $M_i \in \mathfrak{M}_1$, то в силу выбора H справедливо включение $M_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, 2$, и значит, $H \in \mathfrak{M}$. Получили противоречие. Следовательно, H — комонолитическая группа с комонолитом M . Тогда $M \in \mathfrak{M}$, $M = H_{\mathfrak{M}}$ и H/M — простая группа. Если $H/M \notin \Omega$, то $H = O^\Omega(H) \in m(\Omega') = \mathfrak{M}$, что невозможно. Поэтому $(H/M) = (A) \subseteq \Omega$. Тогда $H^{\varphi(A)} \in m(A) = \emptyset$. Опять получаем противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. Лемма доказана.

Определение 10. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ назовем Ω-свободным или, коротко, ΩFr-классом Фиттинга, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любого $A \in \mathcal{I}$, и будем писать

$$\mathfrak{F} = \Omega Fr R(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } O^{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\},$$

а f будем называть ΩFr-спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть f — R-функция. Класс Фиттинга

$$\mathfrak{F} = Fr R(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$$

назовем свободным классом Фиттинга.

Теорема 7. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является Ω-свободным классом Фиттинга.

Доказательство. Пусть ΩR-функция f такая, что $f(A) = \text{fit}(O^{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $A \in \Omega$, $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{F}_1 = \Omega Fr R(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\Omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Далее, $O^{A'}(H) \in (O^{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$, и значит,

$$O^{A'}(H) \in \text{fit}(O^{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}) = f(A)$$

для любого $A \in \Omega \cap K(H)$. Следовательно, $H \in \Omega Fr R(f) = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Как и при доказательстве леммы 10, нетрудно проверить, что T — комонолитическая группа с

комонотомом $L = T_{\mathfrak{F}}$. Так как $O^{\Omega}(T) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega} \subseteq L$, и значит, $T/L \cong A \in \Omega$. Из определения $\Omega FrR(f)$ следует, что $O^{A'}(T) \in f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Из комонотичности группы T следует, что $T = O^{A'}(T)$. Поэтому $T \in \mathfrak{F}$. Получено противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

Замечание 6. Из теоремы 7 и леммы 10 следует, что каждый класс Фиттинга является Ω -свободным для некоторого непустого класса простых групп Ω . Обозначим направление Ω -свободного класса Фиттинга через φ_0 .

Лемма 11. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, где φ — произвольная FR -функция. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $\mathfrak{F} = \Omega R(g, \varphi)$, где $g(A) = f(A)\mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$,
- (2) $\mathfrak{F} = \Omega R(h, \varphi)$, где $f(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = f(A)$ для всех $A \in \Omega$,
- (3) если $\varphi_0 \leq \varphi$ и $\Omega \subseteq K(\mathfrak{F})$, то

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega\}.$$

Доказательство. Докажем часть 1. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega R(g, \varphi)$, где g — ΩR -функция из первого утверждения леммы. Так как $g(A) \subseteq f(A)$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Поскольку класс $\mathfrak{F}$ нормально наследствен, то $\{O^{\Omega}(G), G^{\varphi(A)}\} \subseteq \mathfrak{F}$, и значит, $O^{\Omega}(G) \in f(A) \cap \mathfrak{F} = g(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A) \cap \mathfrak{F} = g(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Докажем часть 2. Пусть h — ΩR -функция, описанная во втором утверждении леммы, и $\mathfrak{H} = \Omega R(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O_{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и B — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа B является комонотической с комонотомом $M = B_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $B \in \mathfrak{H}$, то $O^{\Omega}(B) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, и $O^{\Omega}(B) \subseteq M$. Тогда $B/M \cong (B/O^{\Omega}(B))/(M/O^{\Omega}(B)) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$ и по лемме 7 $O^{\Omega}(B) = O^{\Omega}(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega}(M) \in f(\Omega')$, и следовательно, $O^{\Omega}(B) \in f(\Omega')$. Далее, $B \in \mathfrak{H}$ влечет $B^{\varphi(A)} \in h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(B)$. Таким образом, $B \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Докажем теперь часть 3. Пусть $\varphi_0 \leq \varphi$, $\Omega \subseteq K(\mathfrak{F})$ и $G \in \mathfrak{F}$. Если $A \in \Omega \cap K(G)$, то $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ по определению класса $\Omega R(f, \varphi)$. Пусть $A \in \Omega \setminus K(G)$. Так как $\Omega \subseteq K(\mathfrak{F})$, то найдется такая группа $L \in \mathfrak{F}$, что $A \in K(L)$. Отсюда получаем, что $L^{\varphi(A)} \in f(A)$, и значит, $f(A) \neq \emptyset$. Поскольку $A \notin K(G)$, то $G \in \mathfrak{G}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и поэтому $G^{\varphi(A)} = 1 \in f(A)$. Таким образом, $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega$. Лемма доказана.

Определение 11. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ назовем Ω -композиционным или, коротко, ΩC -классом Фиттинга, если $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и пишем

$$\mathfrak{F} = \Omega CR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } F^A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\},$$

а f назовем ΩC -спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. В случае, когда f является R -функцией, получаем определение композиционного класса Фиттинга

$$\mathfrak{F} = CR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid F^A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$$

с C -спутником f .

Определение 12. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ назовем Ω-каноническим или, коротко, ΩK-классом Фиттинга, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_A \mathfrak{G}_{A'}$ для любого $A \in \mathcal{I}$, и пишем

$$\mathfrak{F} = \Omega KR(f) \\ = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } O^{A, A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\},$$

а ΩR-функцию f назовем ΩK-спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть f — R-функция. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = KR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{A, A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\}$ назовем каноническим классом Фиттинга с K-спутником f .

Теорема 8. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенным с направлением φ и ΩR-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — расслоенный класс Фиттинга с направлением φ и R-спутником f_1 таким, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \emptyset$ для любого $A \in \mathcal{I} \setminus \Omega$.

Такие ΩR-спутник f и R-спутник f_1 класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть согласованными.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть

$$\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi) \\ = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\}.$$

Рассмотрим R-функцию f_1 такую, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \emptyset$ для любого $A \in \mathcal{I} \setminus \Omega$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = R(f_1, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$, то G является Ω-группой, и значит, $G^{\varphi(A)} \in f(A) = f_1(A)$ для любого $A \in K(G) \cap \Omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая группа с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. В силу леммы 11 можно считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Пусть $T/M \cong B$. Поскольку $T \in \mathfrak{F}_1$, то $T^{\varphi(B)} \in f_1(B)$, и значит, $f_1(B) \neq \emptyset$. Тогда из определения f_1 следует, что $B \in \Omega$ и $O^\Omega(T) \subseteq M$. Поэтому $O^\Omega(T) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Далее, из $M \in \mathfrak{F}$ и $B \in \Omega$ следует $K(T) \subseteq \Omega$ и $T^{\varphi(A)} \in f_1(A) = f(A)$ для всех $A \in K(T)$. Теперь из определения Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ следует, что $T \in \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Докажем достаточность. Пусть теперь $\mathfrak{F} = R(g, \varphi)$ — расслоенный класс Фиттинга с направлением φ . Рассмотрим ΩR-функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$, $h(A) = g(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega R(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in g(A) = h(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H — комонолитическая группа с комонолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Так как $O^\Omega(H) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $O^\Omega \subseteq M$. Из $H/M \cong (H/O^\Omega(H))/(M/O^\Omega(H)) \in \mathfrak{G}_\Omega$ следует, что $K(H) \subseteq \Omega$, и поэтому $H^{\varphi(A)} \in h(A) = g(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(H) = K(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Следствие 16. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-свободным с ΩFr-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — свободный класс Фиттинга с Fr-спутником f_1 , согласованным с f .

Следствие 17. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω -композиционным с ΩC -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — композиционный класс Фиттинга с C -спутником f_1 , согласованным с f .

Следствие 18. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega \supseteq K(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω -каноническим с ΩK -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — каноническим класс Фиттинга с K -спутником f_1 , согласованным с f .

Определение 13. Направление φ расслоенного класса Фиттинга назовем правильным или, коротко, r -направлением, если $\varphi(A) = \varphi(A)\mathfrak{G}_{A'}$ для любого $A \in \mathcal{I}$.

Теорема 9. Если $\mathfrak{F}$ — расслоенный класс Фиттинга с r -направлением φ , то $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенным классом Фиттинга с r -направлением φ для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathcal{I}$.

Доказательство. Пусть Ω — непустой подкласс класса $\mathcal{I}$, $\mathfrak{F} = R(f, \varphi)$ — расслоенный класс Фиттинга с r -направлением φ . Рассмотрим ΩR -функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$, $h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega R(h, \varphi)$. Как и при доказательстве теоремы 8, легко проверить, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $H \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ и H — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H — комонолитическая группа с монолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Пусть $K(M) = (B)$. Как и в доказательстве теоремы 8, $O^{\Omega}(H) \subseteq M$ и $H/M \cong (H/O^{\Omega}(H))/(M/O^{\Omega}(H)) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$. Поэтому $B \in \Omega$ и $H^{\varphi(B)} \in h(B) = f(B)$. Пусть $A \in K(H) \setminus (B)$. Тогда $A \in K(M)$ и $H/M \in \mathfrak{G}_{A'}$. Так как $H/M \cong (H/M^{\varphi(A)})/(M/M^{\varphi(A)})$, то $H/M^{\varphi(A)} \in \varphi(A)\mathfrak{G}_{A'} = \varphi(A)$ и $H^{\varphi(A)} \subseteq M^{\varphi(A)}$. Из $M \in \mathfrak{F}$ получаем, что $H^{\varphi(A)} \in f(A)$. Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Следствие 19. Если $\mathfrak{F}$ — свободный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является Ω -свободным классом Фиттинга для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathcal{I}$.

Следствие 20. Если $\mathfrak{F}$ — композиционный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является Ω -композиционным классом Фиттинга для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathcal{I}$.

Следствие 21. Если $\mathfrak{F}$ — канонический класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является Ω -каноническим классом Фиттинга для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathcal{I}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор ΩR -функций (R -функций). Обозначим через $\bigcap_{i \in I} f_i$ такую ΩR -функцию (R -функцию) f , что

$$f(A) = \bigcap_{i \in I} f_i(A)$$

для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ ($A \in \mathcal{I}$).

Лемма 12. Пусть φ — произвольная ΩR -функция,

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i,$$

где $\mathfrak{F}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$ ($\mathfrak{F}_i = R(f_i, \varphi)$), $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ ($\mathfrak{F} = R(f, \varphi)$), где

$$f = \bigcap_{i \in I} f_i.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Обозначим через $\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех Ω-расслоенных классов Фиттинга с направлением φ , которые содержат $\mathfrak{X}$, и через $R(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех расслоенных классов Фиттинга с направлением φ , содержащих $\mathfrak{X}$. При фиксированном φ классы Фиттинга $\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $R(\mathfrak{X}, \varphi)$ будем также коротко обозначать $\Omega R(\mathfrak{X})$ и $R(\mathfrak{X})$ соответственно. Далее $\Omega Fr(\mathfrak{X})$ и $Fr R(\mathfrak{X})$ — Ω-свободный и свободный классы Фиттинга соответственно, порожденные множеством $\mathfrak{X}$; $\Omega CR(\mathfrak{X})$ и $CR(\mathfrak{X})$, $\Omega KR(\mathfrak{X})$ и $KR(\mathfrak{X})$ — соответственно Ω-композиционный и композиционный, Ω-канонический и канонический классы Фиттинга, порожденные классом $\mathfrak{X}$.

Пусть f_1 и f_2 — произвольные ΩR-функции (R-функции). Будем говорить, что $f_1 \leq f_2$, если $f_1(A) \subseteq f_2(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ ($A \in \mathcal{I}$). Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех ΩR-спутников Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ с фиксированным направлением φ . Назовем ΩR-функцию f минимальным ΩR-спутником Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, если f является минимальным элементом множества $\{f_i \mid i \in I\}$. Аналогично определяется минимальный R-спутник расслоенного класса Фиттинга.

Теорема 10. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω-расслоенный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным ΩR-спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \text{fit}(O^\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \text{fit}(G^{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенным классом Фиттинга с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует, и значит, множество L всех ΩR-спутников класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ непусто. Обозначим f_1 пересечение всех элементов из L . По лемме 12 $\mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$ и f_1 — единственный минимальный ΩR-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть f — ΩR-функция, описанная в теореме. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$. Тогда $O^\Omega(M) \in f(\Omega')$ и из $K(M) \subseteq K(\mathfrak{X})$ следует, что $M^{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(M)$. Это означает, что $M \in \Omega R(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \Omega R(f, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \Omega R(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \Omega R(f, \varphi)$.

Покажем, что $\Omega R(f, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{F}$, что $A \in \Omega \cap K(H)$. Из равенства $\mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$ следует, что $H^{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Поэтому $f_1(A) \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $A \in \Omega \cap K(G)$, то из $G \in \mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$ получаем, что $G^{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Пусть теперь $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{X})) \setminus (\Omega \cap K(G))$. Тогда $G \in \mathfrak{G}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и поэтому $G^{\varphi(A)} = 1 \in f_1(A)$. Таким образом,

$$f(A) = \text{fit}(G^{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(A).$$

Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $f(\Omega') = \text{fit}(O^\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\Omega')$. Если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$, то $f(A) = \emptyset \subseteq f_1(A)$. Следовательно, $f \leq f_1$ и $\Omega R(f, \varphi) \subseteq \Omega R(f_1, \varphi)$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, и значит, $f \in L$. Поскольку f_1 — единственный минимальный ΩR-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $f \leq f_1$ влечет $f = f_1$. Теорема доказана.

Следствие 22. Пусть f_i — минимальный ΩR -спутник Ω -расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. Включение $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $f_1 \leq f_2$.

Следствие 23. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω -свободный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega FrR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩFr -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \text{fit}(O^\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \text{fit}(O^{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 24. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда свободный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = FrR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным Fr -спутником f_1 таким, что $f_1(A) = \text{fit}(O^{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f_1(A) = \emptyset$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \mathfrak{I}$. Согласно следствию 19 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω -свободным, и значит, по следствию 23 класс $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ΩFr -спутником f , причем $\Omega \cap K(\mathfrak{X}) = K(\mathfrak{X})$. По следствию 16 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает Fr -спутником f_1 , согласованным с f . Пусть g_1 — внутренний Fr -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и g — внутренний ΩFr -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, согласованный с g_1 . Так как $f \leq g$, то и $f_1 \leq g_1$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным Fr -спутником f_1 . Следствие доказано.

Следствие 25. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω -канонический класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega KR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩK -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \text{fit}(O^\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \text{fit}(O^{A,A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 26. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда канонический класс Фиттинга $\mathfrak{F} = KR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным K -спутником f таким, что $f(A) = \text{fit}(O^{A,A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 27. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда Ω -композиционный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega CR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩC -спутником f таким, что

$$f(\Omega') = \text{fit}(O^\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \text{fit}(F^A(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 28. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда композиционный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = CR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным C -спутником f таким, что $f(A) = \text{fit}(F^A(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.

Лемма 13. Пусть Ω — непустой класс простых групп. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенным с τ -направлением φ , то $\mathfrak{F}$ является (Z_p) -расслоенным с τ -направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ — Ω-расслоенный класс Фиттинга с r -направлением φ и $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является (Z_p) -расслоенным классом Фиттинга с направлением φ . Пусть f_p — такая $(Z_p)R$ -функция, что $f_p(Z_p) = f(Z_p)$, $f_p((Z_p)') = \mathfrak{F}$, и пусть $\mathfrak{F}_1 = (Z_p)R(f_p, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^p(G) \in \mathfrak{F} = f_p((Z_p)')$. Если $Z_p \in K(G)$, то $G^{\varphi(Z_p)} \in f(Z_p) = f_p(Z_p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и H — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H комонолитична с монолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 11 можно считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Тогда из включения $Z_p \in \Omega$ следует, что $O^{\Omega}(H) \subseteq O^p(H)$, и значит, $O^{\Omega}(H) \in f((Z_p)') = \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(H)$. Если $A \cong Z_p$, то

$$H^{\varphi(Z_p)} \in f_p(Z_p) = f(Z_p).$$

Пусть A неизоморфна Z_p . Из $O^p(H) \in \mathfrak{F}$ следует, что $O^p(H) \subseteq M$. Тогда

$$H/M \cong (H/O^p(H))/(M/O^p(H)) \in \mathfrak{G}_{A'}.$$

Так как $H/M \cong (H/M^{\varphi(A)})/(M/M^{\varphi(A)})$, то $(H/M^{\varphi(A)}) \in \varphi(A)\mathfrak{G}_{A'} = \varphi(A)$ и $H^{\varphi(A)} \subseteq M^{\varphi(A)} \in f(A)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

Определение 14. Правильное направление φ расслоенного класса Фиттинга назовем rn -направлением, если $A \notin \varphi(A)$ для любой неабелевой простой группы $A \in \mathfrak{I}$.

Замечание 7. Как и для формаций, направления Ω-свободного и Ω-композиционного классов Фиттинга являются rn -направлениями, а направление Ω-канонического класса Фиттинга не является rn -направлением. Отметим, что r -направления φ расслоенного класса Фиттинга такие, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{G}_{A'}$ для любой простой группы $A \in \mathfrak{I}$, также являются rn -направлениями.

Теорема 11. Пусть Ω — непустой класс простых групп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенным с rn -направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (Z_p) -расслоенным классом Фиттинга с rn -направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 13. Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = (Z_p)R(b_p, \varphi)$ — (Z_p) -расслоенный класс Фиттинга с rn -направлением φ для всех $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. В силу леммы 11 и теоремы 10 можно считать, что $b_p((Z_p)') = \mathfrak{F}$ и $b_p(Z_p) = \text{fit}(G^{\varphi(Z_p)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Пусть b — такая ΩR-функция, что $b(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $b(Z_p) = b_p(Z_p)$ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$, $b(Z_p) = \emptyset$ для всех $Z_p \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F})$, $b(A) = \mathfrak{F}$, если $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$, и $\mathfrak{B} = \Omega R(b, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = b(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Если $A \cong Z_p$, то $G^{\varphi(Z_p)} \in b_p(Z_p) = b(Z_p)$. Если $A \in \mathfrak{A}$, то $G^{\varphi(A)} \in \mathfrak{F} = b(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Предположим, что $B \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$ и B — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда группа B комонолитична с монолитом $M = B_{\mathfrak{F}}$. Пусть $A \in K(B/M)$. Поскольку $O^{\Omega}(B) \in b(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega}(B) \subseteq M$. Тогда

$$B/M \cong (B/O^{\Omega}(B))/(M/O^{\Omega}(B)) \in \mathfrak{G}_{\Omega},$$

и значит, $A \in \Omega$. Пусть $A \notin \mathfrak{A}$. Тогда $A \notin \varphi(A)$. Если $B^{\varphi(A)} \subset B$, то

$$B/M \cong (B/B^{\varphi(A)})/(M/B^{\varphi(A)}) \in \varphi(A),$$

что невозможно. Следовательно, $B = B^{\varphi(A)} \in b(A) = \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Таким образом, $A \cong Z_p$. Если $Z_p \notin K(\mathfrak{F})$, то $b(Z_p) = \emptyset$, что в силу $B^{\varphi(Z_p)} \in b(Z_p)$ невозможно. Следовательно, $Z_p \in K(\mathfrak{F})$ и $B^{\varphi(Z_p)} \in b(Z_p) = b_p(Z_p)$. Кроме того, из $B/M \in \mathfrak{A}_p$ следует, что $O^p(B) \subseteq M$ и поэтому $O^p(B) \in \mathfrak{F} = b_p((Z_p)')$. Таким образом, $B \in (Z_p)R(b_p, \varphi) = \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Теорема доказана.

Следствие 29. Пусть Ω — непустой класс простых групп и $\Omega_1 = \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенным классом Фиттинга с gn -направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является Ω_1 -расслоенным классом Фиттинга с gn -направлением φ .

Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 15.

Список литературы

1. Gaschütz W., Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Math. Z.* (1963) **80**, №4, 300–305.
2. Шеметков Л. А., Ступенчатые формации групп. *Матем. сб.* (1974) **94**, №4, 628–648.
3. Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groups*. Gruyter, Berlin, 1992.
4. Hartley B., On Fischer's analysis of formation theory. *Proc. London Math. Soc.* (1969) **3**, №9, 193–207.
5. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., О частично локальных формациях. *Докл. АН Беларуси* (1995) **39**, №3, 123–143.
6. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Матем. труды* (1999) **2**, №1, 1–34.
7. Ведерников В. А., Коптюх Д. Г., Частично композиционные формации групп. Препринт №2. БГПУ, Брянск, 1999, 1–28.
8. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., Частично композиционные формации конечных групп. *Докл. АН Беларуси* (1999) **43**, №4, 5–8.
9. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп*. Наука, Москва, 1978.
10. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., *Формации алгебраических систем*. Наука, Москва, 1989.
11. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., О минимальном композиционном экране композиционной формации. *Вопросы алгебры* (1992) **7**, 39–43.
12. Ведерников В. А., Прямые произведения и формации конечных групп. *Алгебра и логика* (1990) **29**, №10, 523–548.
13. Ведерников В. А., О некоторых классах конечных групп. *Докл. АН БССР* (1988) **32**, №10, 872–875.

Статья поступила 23.03.2000.