Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гильманшин, А. М. Зубков, Н. А. Колокольникова, Оценки экстремальных значений среднего числа ячеек, содержащих заданное число частиц, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 1, 11–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm3>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 11:45:17

Оценки экстремальных значений среднего числа ячеек, содержащих заданное число частиц

© 2007 г. Р. Р. Гильманшин, А. М. Зубков,
Н. А. Колокольникова

Изучаются экстремальные значения математического ожидания числа ячеек, содержащих ровно r частиц, в множестве полиномиальных схем размещения n частиц по N ячейкам. Описаны свойства распределений, на которых достигаются экстремальные значения, и получены двусторонние оценки экстремальных значений.

Работа второго автора выполнена при поддержке программой Отделения математических наук РАН “Современные проблемы теоретической математики” и программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 4129.2006.1.

Пусть в N ячейках независимо друг от друга размещаются n частиц в соответствии с полиномиальной схемой: каждая частица независимо от остальных попадает в ячейку с номером i с вероятностью p_i , $i = 1, 2, \dots, N$, $p_1 + \dots + p_N = 1$. Обозначим $\mu_r(n, N) = \mu_r(n; p_1, \dots, p_N)$ число ячеек, содержащих ровно r частиц, $r = 0, 1, \dots, n$. Наша цель — исследовать экстремальные значения математического ожидания $\mathbf{M}\mu_r(n; p_1, \dots, p_N)$ на симплексе вероятностных распределений

$$D_N = \{\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N): p_1, \dots, p_N \geq 0, p_1 + \dots + p_N = 1\}$$

на множестве $\{1, \dots, N\}$.

Легко проверить (см. стр. 111 в [1]), что

$$\mathbf{M}\mu_r(n, N) = \binom{n}{r} \sum_{i=1}^N p_i^r (1 - p_i)^{n-r}. \quad (1)$$

Случай $r = 0$ был рассмотрен в [2]. В частности, в [2] доказано, что минимальное значение $\mathbf{M}\mu_0(n; p_1, \dots, p_N)$ принимает при $p_1 = \dots = p_N = 1/N$ и что при любых целых $n, N \geq 1, k \geq 0$ и $(p_1, \dots, p_N) \in D_N$

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n; 1/N, \dots, 1/N) \leq k\} \geq \mathbf{P}\{\mu_0(n, p_1, \dots, p_N) \leq k\}.$$

Другими словами, при любом $(p_1, \dots, p_N) \in D_N \setminus \{(1/N, \dots, 1/N)\}$ распределение случайной величины $\mu_0(n; 1/N, \dots, 1/N)$ стохастически меньше распределения $\mu_0(n; p_1, \dots, p_N)$.

Теорема 1. Экстремальные значения $\mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in D_N$, при фиксированном $r \geq 1$ могут достигаться только на таких распределениях $(p_1, \dots, p_N) \in D_N$, в которых отличные от нуля вероятности либо одинаковы, либо принимают не более двух разных значений, скажем, $x \neq y$, и при этом

$$\text{либо } 0 < x < M_r < y < r/n, \quad \text{либо } r/n < x < m_r < y < 1, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{r}{n} - \frac{1}{n(n-1)} \sqrt{r(n-1)(n-r)} \quad \text{при } r > 1, \quad M_1 = 0, \\ m_r &= \frac{r}{n} + \frac{1}{n(n-1)} \sqrt{r(n-1)(n-r)} \quad \text{при } r > 1, \quad m_1 = \frac{2}{n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Как будет видно из доказательства теоремы 1, во многих случаях значения вероятностей экстремальных распределений являются корнями многочленов высоких степеней, и поэтому в общем случае для них нельзя получить явные формулы.

Теорема 2 содержит конструктивные верхние и нижние оценки для экстремальных значений $\mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p})$. В ее формулировке используется функция

$$f_{r,n}(z) = \begin{cases} z \left(\frac{r-1}{n-1} \right)^{r-1} \left(1 - \frac{r-1}{n-1} \right)^{n-r}, & z \in [0, (r-1)/(n-1)], \\ z^r (1-z)^{n-r}, & z \in [(r-1)/(n-1), r/n], \\ \left(\frac{r}{n} \right)^r \left(1 - \frac{r}{n} \right)^{n-r}, & z \in [r/n, 1]. \end{cases}$$

На рисунках приведены графики функций $f_{r,n}(z)$ и $z^r (1-z)^{n-r}$ при $r = 1, n = 6$ и при $r = 3, n = 6$.

Теорема 2. Пусть $r \geq 1$.

(А) Минимальные значения $\mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in D_N$, определяются формулой

$$\min_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq r, \\ 1/N^{r-1}, & \text{если } n = r. \end{cases}$$

(В) Если $r \leq n \leq (r-1)N$ и $[x]$ обозначает целую часть x , то

$$\begin{aligned} & \binom{n}{r} \left(\left[\frac{n-1}{r-1} \right] f_{r,n} \left(\frac{r-1}{n-1} \right) + \left(1 - \frac{r-1}{n-1} \left[\frac{n-1}{r-1} \right] \right)^r \left(\frac{r-1}{n-1} \left[\frac{n-1}{r-1} \right] \right)^{n-r} \right) \\ & \leq \max_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}) \leq \binom{n}{r} \frac{n-1}{r-1} f_{r,n} \left(\frac{r-1}{n-1} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Если $(r-1)N+1 \leq n \leq rN$, то

$$\max_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}) = \binom{n}{r} N f_{r,n}(1/N). \quad (5)$$

Если $n \geq rN$, то

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} \left((N-1) f_{r,n}\left(\frac{r}{n}\right) + \left(1 - \frac{r}{n}(N-1)\right)^r \left(\frac{r}{n}(N-1)\right)^{n-r} \right) &\leq \max_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}) \\ &\leq \binom{n}{r} N f_{r,n}\left(\frac{r}{n}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство теоремы 1. Экстремальные значения функции $\mathbf{M}\mu_r(n; p_1, \dots, p_N)$ в D_N могут достигаться либо в его внутренней части D_N^+ (где $p_1, \dots, p_N > 0$), либо на границе. Граничные точки симплекса D_N соответствуют распределениям $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$, для которых $\min_{1 \leq j \leq N} p_j = 0$. Так как выражение в правой части (1) не зависит от нумерации вероятностей, часть границы симплекса D_N , состоящая из распределений с $M < N$ ненулевыми вероятностями, является объединением $\binom{N}{M}$ множеств, изоморфных D_M^+ . Поэтому если $B_M \subset D_M^+$ — множество точек экстремумов $\mathbf{M}\mu_r(n; p_1, \dots, p_M)$ внутри D_M^+ , то

$$\max_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}) = \max_{1 \leq M \leq N} \max_{\mathbf{p} \in B_M} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}), \quad (7)$$

$$\min_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}) = \min_{1 \leq M \leq N} \min_{\mathbf{p} \in B_M} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}). \quad (8)$$

Точки локальных экстремумов функции $\mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p})$ в D_M^+ должны удовлетворять системе уравнений, получающихся при приравнении нулю производных функции Лагранжа, которая в силу (1) имеет вид

$$F(p_1, \dots, p_M, \lambda) = \sum_{i=1}^M \binom{n}{r} p_i^r (1-p_i)^{n-r} + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^M p_i \right).$$

Дифференцирование $F(p_1, \dots, p_M, \lambda)$ по $p_1, \dots, p_M$ и λ дает систему уравнений

$$\binom{n}{r} p_i^{r-1} (1-p_i)^{n-r-1} (r - np_i) - \lambda = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad \sum_{i=1}^M p_i = 1. \quad (9)$$

Вводя функции

$$\Psi_r(z) = z^{r-1} (1-z)^{n-r-1} (r - nz), \quad z \in [0, 1], \quad (10)$$

систему (9) можно представить в виде

$$\Psi_r(p_i) = \lambda', \quad \lambda' = \lambda / \binom{n}{r}, \quad i = 1, \dots, M, \quad \sum_{i=1}^M p_i = 1. \quad (11)$$

Используя (10) и равенства

$$\begin{aligned} \Psi_1'(z) &= (n-1)(1-z)^{n-3}(nz-2), \\ \Psi_r'(z) &= z^{r-2}(1-z)^{n-r-2}(n(n-1)z^2 - 2rz(n-1) + r(r-1)), \quad r \geq 2, \end{aligned}$$

нетрудно убедиться в справедливости следующих замечаний:

- (а) $\Psi_r(z) = 0$ только при $z = 1$, $z = r/n$, и если $r > 1$, то и при $z = 0$;
- (б) $\Psi_r(z) > 0$ при $0 < z < r/n$, $\Psi_r(z) < 0$ при $r/n < z < 1$;
- (в) функция $\Psi_r(z)$ на отрезке $[0, 1]$ имеет максимум и минимум соответственно в точках M_r и m_r , определенных в (3);
- (г) $\Psi_r(z)$ возрастает на $(0, M_r) \cup (m_r, 1)$ и убывает на (M_r, m_r) .

Из (а)–(г) следует, что решения $p_1, \dots, p_M$ системы (11) принимают либо одно, либо два значения и что если они принимают два разных значения, то выполняются утверждения (2) теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Получим оценки для экстремальных значений математических ожиданий $\mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p})$ при $r \geq 1$.

Оценим минимальные значения. Если $n \neq r$, то

$$\min_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}) = \mathbf{M}\mu_r(n; (1, 0, \dots, 0)) = 0.$$

Если же $n = r$, то в силу замечаний (а)–(г) из доказательства теоремы 1 точка $(p_1, \dots, p_M)$ минимума $\mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p})$ в D_M^+ , $M \leq N$, с точностью до перенумерации координат имеет вид

$$p_j = x, \quad j = 1, \dots, k, \quad p_j = y = \frac{1 - kx}{M - k}, \quad j = k + 1, \dots, M,$$

при некотором $k \in \{1, \dots, M - 1\}$, причем в силу симметрии x и y можно считать, что $x \in (0, 1/M]$. Значит,

$$\min_{\mathbf{p} \in D_M^+} \mathbf{M}\mu_r(r; \mathbf{p}) = \min_{1 \leq k < M} \min_{x \in (0, 1/M]} \left(kx^r + (M - k) \left(\frac{1 - kx}{M - k} \right)^r \right).$$

При любом $r \geq 1$ и любом фиксированном $k \in \{1, \dots, M - 1\}$ ввиду выпуклости функции $u(z) = z^r$ и неравенства Иенсена

$$\begin{aligned} kx^r + (M - k) \left(\frac{1 - kx}{M - k} \right)^r &= ku(x) + (M - k)u\left(\frac{1 - kx}{M - k}\right) \\ &\geq Mu\left(\frac{1}{M} \left(kx + (M - k) \frac{1 - kx}{M - k} \right)\right) = Mu\left(\frac{1}{M}\right) = \frac{1}{M^{r-1}}, \end{aligned}$$

и согласно (8)

$$\min_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(r; \mathbf{p}, r, N) = \min_{M \leq N} \min_{\mathbf{p} \in D_M^+} \mathbf{M}\mu_r(r; \mathbf{p}) = \min_{M \leq N} \frac{1}{M^{r-1}} = \frac{1}{N^{r-1}},$$

тем самым утверждение А доказано.

Оценим максимальные значения. Рассмотрим сначала случай, когда $r \geq 1$, $r \leq n \leq (r-1)N$. Из замечаний (а)–(в) следует, что при всех $z \in [0, 1]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} z^r(1-z)^{n-r} &\leq \max_{x \in [0,1]} x^r(1-x)^{n-r} = \left(\frac{r}{n}\right)^r \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{n-r}, \\ z^r(1-z)^{n-r} &\leq z \max_{x \in [0,1]} \frac{1}{x} x^r(1-x)^{n-r} = z \left(\frac{r-1}{n-1}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{r-1}{n-1}\right)^{n-r}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что введенная в начале статьи функция $f_{r,n}(z)$ мажорирует функцию $z^r(1-z)^{n-r}$ на отрезке $[0, 1]$ и является выпуклой вверх. Поэтому в силу неравенства Иенсена при любом $\mathbf{p} \in D_N$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}) &= \binom{n}{r} \sum_{i=1}^N p_i^r (1-p_i)^{n-r} \leq \binom{n}{r} \sum_{i=1}^N f_{r,n}(p_i) \leq \binom{n}{r} N f_{r,n}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i\right) \\ &= \binom{n}{r} N f_{r,n}\left(\frac{1}{N}\right) = \binom{n}{r} \frac{n-1}{r-1} f_{r,n}\left(\frac{r-1}{n-1}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

так как из условия $n \leq (r-1)N$ следует, что $1/N < (r-1)/(n-1)$, то есть точка $1/N$ находится на отрезке, где

$$f_{r,n}(z) = z \left(\frac{r-1}{n-1}\right)^{-1} f_{r,n}\left(\frac{r-1}{n-1}\right).$$

Нижняя оценка для $\max_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p})$ реализуется на распределении, в котором $[(n-1)/(r-1)] < N$ вероятностей равны $(r-1)/(n-1)$, одна вероятность равна $1 - [(n-1)/(r-1)](r-1)/(n-1)$, а остальные вероятности равны 0. Тем самым доказаны оценки (4).

В случае, когда $N(r-1) + 1 \leq n \leq rN$, то есть $(r-1)/(n-1) \leq 1/N \leq r/n$, верхняя оценка (12) совпадает со значением $\mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p})$ при равномерном распределении $\mathbf{p} = (1/N, \dots, 1/N)$, что доказывает соотношение (5).

Наконец, если $n \geq rN$, то нижнюю оценку для $\max_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p})$ можно получить, выбрав в качестве $\mathbf{p}$ распределение, в котором $N-1$ вероятностей равны r/n (точке максимума функции $x^r(1-x)^{n-r}$), то есть

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}) &\geq \mathbf{M}\mu_r\left(n; \left(\frac{r}{n}, \dots, \frac{r}{n}, 1 - (N-1)\frac{r}{n}\right)\right) \\ &= \binom{n}{r} \left((N-1) \left(\frac{r}{n}\right)^r \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{n-r} + \left(1 - \frac{(N-1)r}{n}\right)^r \left(\frac{(N-1)r}{n}\right)^{n-r} \right). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p} \in D_N} \mathbf{M}\mu_r(n; \mathbf{p}) &= \max_{\mathbf{p} \in D_N} \sum_{i=1}^N \binom{n}{r} p_i^r (1-p_i)^{n-r} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \binom{n}{r} \max_{p \in [0,1]} p^r (1-p)^{n-r} = \binom{n}{r} N \left(\frac{r}{n}\right)^r \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{n-r}. \end{aligned}$$

Тем самым доказаны оценки (6) и теорема 2.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
2. Зубков А. М., Попов Н. Н., Отношение частичного порядка, порожденное распределением числа занятых ячеек. *Математические заметки* (1982) **32**, №1, 97–102.
3. Колокольникова Н. А., Гильманшин Р. Р., Экстремальные задачи в теории случайных размещений. В сб.: *Труды XII Байкальской международной конф. "Методы оптимизации и их приложения"*. Иркутск, 2001, т. 5, с. 71–75.
4. Гильманшин Р. Р., Колокольникова Н. А., Об одной экстремальной задаче в теории случайных размещений. В сб.: *Тез. докл. конф. "Колмогоров и современная математика"*. Изд-во МГУ, Москва, 2003, с. 627–628.

Статья поступила 27.03.2006.

Переработанный вариант поступил 20.12.2006.