Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Елизаров, Разрешимые и локально замкнутые модули и кольца, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 1, 30–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm30>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:57:38

Разрешимые и локально замкнутые модули и кольца

© 2006 г. В. П. Елизаров

Описаны классы всех модулей и всех колец, системы линейных уравнений над которыми разрешимы тогда и только тогда, когда они согласованы относительно линейных соотношений.

Работа выполнена при поддержке программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 2358.2003.9.

1. Введение

Термин кольцо далее означает ассоциативное кольцо с единицей, а термин модуль — унитарный модуль. Запись T_R или ${}_R T$ означает, что T — правый или соответственно левый модуль над кольцом R . Для множества F через $F_{m,n}$ обозначим совокупность всех $m \times n$ матриц с элементами из F . В частных случаях полагаем

$$F_{1,n} = F(n), \quad F_{m,1} = F^{(m)}.$$

Рассматриваются системы левых линейных уравнений над модулем ${}_R \Lambda$, то есть системы уравнений вида

$$A\xi^\downarrow = \beta^\downarrow, \quad (1)$$

где $A \in R_{m,n}$, $\beta^\downarrow \in \Lambda^{(m)}$ и $\xi^\downarrow$ — вектор неизвестных со значениями из $\Lambda^{(n)}$. Система уравнений (1) называется разрешимой, если она имеет хотя бы одно решение.

Через 0 и θ обозначим нули соответственно кольца R и модуля Λ . Система уравнений (1) называется согласованной относительно линейных соотношений (lc -согласованной), если для любого вектора $\vec{C} \in R(m)$ справедлива импликация

$$\vec{C}A = \vec{0} \implies \vec{C}\beta^\downarrow = \theta$$

(при $\Lambda = R$ этот термин введен в [2]).

Очевидно, что разрешимая система уравнений (1) является lc -согласованной. Обратное в общем случае неверно. Простейший пример — уравнение $2x_1 = 1$ над модулем ${}_Z \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел.

При $\Lambda = R$ систему уравнений (1) запишем в виде

$$AX^\downarrow = B^\downarrow, \quad (2)$$

где $B^\downarrow \in R^{(m)}$ и $X^\downarrow$ — вектор неизвестных со значениями из $R^{(n)}$. Известны некоторые классы колец, для системы уравнений вида (2) над которыми критерий разрешимости — lc -согласованность: тела (см. §105 в [10]), коммутативные цепные кольца, над которыми разрешимо любое lc -согласованное уравнение вида

$$ax_1 = b$$

(см. [7]), конечные коммутативные квазифробениусовы кольца (см. [5, 6]), произвольные квазифробениусовы кольца (см. [1]).

В [1] была сформулирована задача описать класс всех колец, над которыми разрешима любая lc -согласованная система уравнений вида (2). В [2] такие кольца названы lc -совместными, а в [3] — lc -разрешимыми. Указанная задача является частью Проблемы 2 из [3]. В [1] задача была решена в классе $\mathcal{N}$ нетеровых слева и справа колец: класс всех lc -разрешимых колец из $\mathcal{N}$ — это в точности класс квазифробениусовых колец.

В настоящей работе решается задача более общая, чем задача, поставленная в [1], и Проблема 2 из [3]. А именно, в §2 описан класс $\mathcal{K}(R)$ всех R -модулей, для систем уравнений вида (1) над которыми критерием разрешимости является lc -согласованность. Описание внутреннее, то есть использует только свойства самих модулей. Как следствие получается описание класса всех lc -разрешимых колец. В §3 указан один подкласс класса $\mathcal{K}(R)$ и, как следствие, один подкласс класса lc -разрешимых колец, в котором содержится класс квазифробениусовых колец.

2. Класс lc -разрешимых модулей

Введем некоторые понятия и обозначения.

Определение 1. Модуль ${}_R\Lambda$ назовем lc -разрешимым, если любая lc -согласованная система уравнений вида (1) является разрешимой.

Для подмножеств $S \subset R^{(m)}$, $T \subset R^{(m)}$ и вектора $\gamma^\downarrow \in \Lambda^{(m)}$ определим аннуляторы в $R^{(m)}$ и $\Lambda^{(m)}$, полагая

$$\begin{aligned} \text{Ann}_{R^{(m)}} S &= \{\vec{C} \in R^{(m)} \mid \vec{C}S = \{0\}\}, \\ \text{Ann}_{R^{(m)}} \gamma^\downarrow &= \{\vec{D} \in R^{(m)} \mid \vec{D}\gamma^\downarrow = \theta\}, \\ \text{Ann}_{\Lambda^{(m)}} T &= \{\delta^\downarrow \in \Lambda^{(m)} \mid T\delta^\downarrow = \{\theta\}\}. \end{aligned}$$

Введем также обозначение

$$S\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^k S_i^\downarrow \lambda_i \mid k \in \mathbb{N}, S_i^\downarrow \in S, \lambda_i \in \Lambda \right\}.$$

Определение 2. Модуль ${}_R\Lambda$ назовем локально R -замкнутым справа, если для любого $m \in \mathbb{N}$ и для любого конечно порожденного подмодуля L из $R_R^{(m)}$ справедливо равенство

$$\text{Ann}_{\Lambda^{(m)}} \text{Ann}_{R^{(m)}} L = L\Lambda.$$

Для удобства ссылок сформулируем два утверждения.

Предложение 1. Для $S \subset R^{(m)}$ и $\gamma^\downarrow \in \Lambda^{(m)}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \text{Ann}_{\Lambda^{(m)}} \text{Ann}_{R^{(m)}} S &\supset S\Lambda, \\ \text{Ann}_{\Lambda^{(m)}} \text{Ann}_{R^{(m)}} \gamma^\downarrow &\ni \gamma^\downarrow. \end{aligned} \quad (3)$$

Ввиду предложения 1 определение 2 корректно.

Для векторов $D_1^\downarrow, \dots, D_k^\downarrow$ из $R^{(m)}$ обозначим через $\langle D_1^\downarrow, \dots, D_k^\downarrow \rangle$ порожденный ими подмодуль модуля $R_R^{(m)}$.

Предложение 2. Справедливо равенство

$$\text{Ann}_{R^{(m)}} \{D_1^\downarrow, \dots, D_k^\downarrow\} = \text{Ann}_{R^{(m)}} \langle D_1^\downarrow, \dots, D_k^\downarrow \rangle.$$

Получим критерий разрешимости системы уравнений (1) над локально R -замкнутым справа модулем ${}_R \Lambda$.

Теорема 1. Система уравнений (1) над локально R -замкнутым справа модулем ${}_R \Lambda$ разрешима тогда и только тогда, когда она lc -согласованная.

Доказательство. Докажем только нетривиальную часть теоремы. Пусть система уравнений (1) lc -согласованная,

$$\begin{aligned} A &= (A_1^\downarrow, \dots, A_n^\downarrow), \\ M &= \langle A_1^\downarrow, \dots, A_n^\downarrow \rangle. \end{aligned}$$

Условие lc -согласованности можно записать в виде

$$\text{Ann}_{R^{(m)}} \{A_1^\downarrow, \dots, A_n^\downarrow\} \subset \text{Ann}_{R^{(m)}} \beta^\downarrow$$

или, согласно предложению 2, в виде

$$\text{Ann}_{R^{(m)}} M \subset \text{Ann}_{R^{(m)}} \beta^\downarrow. \quad (4)$$

Из (4) следует соотношение

$$\text{Ann}_{\Lambda^{(m)}} \text{Ann}_{R^{(m)}} M \supset \text{Ann}_{\Lambda^{(m)}} \text{Ann}_{R^{(m)}} \beta^\downarrow. \quad (5)$$

По условию и предложению 1 из (5) получаем, что

$$M\Lambda \ni \beta^\downarrow.$$

Стало быть, справедливо равенство

$$\beta = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n A_j^\downarrow d_{ji} \right) \lambda_i, \quad (6)$$

где $k \in \mathbb{N}$, $d_{ij} \in R$ и $\lambda_i \in \Lambda$. Равенство (6) перепишем в виде

$$\beta^\downarrow = \sum_{j=1}^n A_j^\downarrow \mu_j,$$

где

$$\mu_j = \sum_{i=1}^k d_{ji} \lambda_i, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Таким образом, вектор

$$\mu^\downarrow = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$$

является решением системы уравнений (1).

Следующее утверждение показывает, что условие на модуль ${}_R\Lambda$ в теореме 1 существенно.

Предложение 3. Если модуль ${}_R\Lambda$ не является локально R -замкнутым справа, то существует lc -согласованная система левых линейных уравнений над ${}_R\Lambda$, не имеющая решений.

Доказательство. Ввиду условия, определения 2 и предложения 1 найдутся такие $t \in \mathbb{N}$ и подмодуль $H = \langle D_1^\downarrow, \dots, D_p^\downarrow \rangle$ модуля $R_R^{(t)}$, что

$$\text{Ann}_{\Lambda^{(t)}} \text{Ann}_{R^{(t)}} H \supsetneq H\Lambda.$$

Поэтому существует такой вектор $\alpha^\downarrow \in \Lambda^{(t)}$, что справедливы соотношения

$$\text{Ann}_{R^{(t)}} H\alpha^\downarrow = \{\theta\} \quad (7)$$

и

$$\alpha^\downarrow \notin H\Lambda. \quad (8)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$D\xi^\downarrow = \alpha^\downarrow \quad (9)$$

над модулем ${}_R\Lambda$, где

$$D = (D_1^\downarrow, \dots, D_p^\downarrow) \in R_{t,p}.$$

Ввиду (7) и предложения 2 система уравнений (9) lc -согласованная, но соотношение (8) означает, что у нее нет решений.

Теорема 1 и предложение 3 позволяют внутренним образом охарактеризовать класс lc -разрешимых R -модулей.

Теорема 2. Класс lc -разрешимых R -модулей — это в точности класс локально R -замкнутых справа модулей.

Класс всех локально R -замкнутых справа модулей обозначим через $\mathcal{H}(R)$.

Применим полученные результаты в случае, когда $\Lambda = R$.

Определение 3. Кольцо R называется lc -разрешимым, если любая lc -согласованная система уравнений над R вида (2) разрешима [2, 3].

Определение 4. Кольцо R назовем локально замкнутым справа, если для любого $m \in \mathbb{N}$ и любого конечно порожденного подмодуля L из $R_R^{(m)}$ справедливо равенство

$$\text{Ann}_{R^{(m)}} \text{Ann}_{R^{(m)}} L = L.$$

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 1 и предложения 3, получаем внутреннее описание класса всех lc -разрешимых колец.

Теорема 3. *Класс lc -разрешимых колец — это в точности класс локально замкнутых справа колец.*

3. Подкласс класса $\mathcal{H}(R)$

В этом параграфе мы укажем некоторый подкласс класса модулей $\mathcal{H}(R)$ и некоторый подкласс класса локально замкнутых справа колец.

Определение 5. Модуль ${}_R\Lambda$ назовем замкнутым относительно конечно порожденных правых идеалов кольца R (или, коротко, α -модулем), если для любого конечно порожденного правого идеала J кольца R справедливо равенство

$$\text{Ann}_\Lambda \text{Ann}_R J = J\Lambda.$$

По определению 2 всякий локально R -замкнутый справа модуль ${}_R\Lambda$ является α -модулем.

Предложение 4. *Уравнение*

$$\vec{A}\xi^\downarrow = \beta$$

над α -модулем ${}_R\Lambda$, где $\vec{A} \in R(n)$ и $\beta \in \Lambda$, разрешимо тогда и только тогда, когда оно lc -согласовано.

Это утверждение является частным случаем теоремы 1.

Лемма 1 ([2]). *Если система уравнений (1) lc -согласованная, то lc -согласована и любая ее подсистема.*

Предложение 5. *Если $n \in \mathbb{N}$ и T, F — подмножества $R(n)$, то при*

$$T \cap F = \emptyset$$

справедливо включение

$$\text{Ann}_{\Lambda^{(n)}}(T \cap F) \supset \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} T + \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} F.$$

Доказательство стандартно.

Определение 6. Модуль ${}_R\Lambda$ назовем δ -модулем, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любых конечно порожденных подмодулей K и L из ${}_R R(n)$ справедливо равенство

$$\text{Ann}_{\Lambda^{(n)}}(K \cap L) = \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} K + \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} L.$$

Ввиду предложения 5 определение 6 корректно.

Теорема 4. *Система уравнений (1) над α - и δ -модулем ${}_R\Lambda$ разрешима тогда и только тогда, когда она lc -согласована.*

Доказательство. Докажем только нетривиальную часть теоремы. Пусть система уравнений (1) lc -согласованная.

При $m = 1$ система уравнений (1) разрешима по предложению 4.

Пусть $m = 2$. По лемме 1 каждое уравнение системы (1) lc -согласовано, и по случаю $m = 1$ оно разрешимо. Значит, при некоторых векторах $\mu_i^\downarrow \in \Lambda^{(n)}$ справедливы равенства

$$\vec{A}_i \mu_i^\downarrow = \beta_i, \quad i = 1, 2.$$

Через $\langle \vec{A}_i \rangle$ обозначим подмодуль из ${}_R R(n)$, порожденный вектором $\vec{A}_i$. Так как справедливо равенство

$$\text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} \vec{A}_i = \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} \langle \vec{A}_i \rangle, \quad i = 1, 2,$$

то множество Ω_i всех решений i -го уравнения системы (1) записывается в виде

$$\Omega_i = \mu_i^\downarrow + \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} \langle \vec{A}_i \rangle, \quad i = 1, 2.$$

Покажем, что

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset.$$

Пусть

$$\vec{U} \in \langle \vec{A}_1 \rangle \cap \langle \vec{A}_2 \rangle,$$

то есть

$$\vec{U} = c_1 \vec{A}_1 = c_2 \vec{A}_2$$

при некоторых $c_1, c_2 \in R$. Из равенства

$$(c_1, -c_2) \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

ввиду lc -согласованности системы уравнений (1) следует равенство

$$(c_1, -c_2) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \theta,$$

то есть равенство

$$c_1 \vec{A}_1 \mu_1^\downarrow + (-c_2) \vec{A}_2 \mu_2^\downarrow = \theta$$

или равенство

$$\vec{U}(\mu_1^\downarrow - \mu_2^\downarrow) = \theta.$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\mu_1^\downarrow - \mu_2^\downarrow \in \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} (\langle \vec{A}_1 \rangle \cap \langle \vec{A}_2 \rangle). \quad (10)$$

Так как ${}_R \Lambda - \beta$ -модуль, из (10) получаем, что

$$\mu_1^\downarrow - \mu_2^\downarrow \in \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} \langle \vec{A}_1 \rangle + \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} \langle \vec{A}_2 \rangle.$$

Поэтому существуют такие векторы $\delta_i^\downarrow \in \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} \langle \vec{A}_i \rangle$, $i \in \{1, 2\}$, что

$$\mu_1^\downarrow + \delta_1^\downarrow = \mu_2^\downarrow + \delta_2^\downarrow \in \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

Это означает, что при $m = 2$ система уравнений (1) разрешима.

Предположим, что при произвольном фиксированном $k \geq 2$ любая lc -согласованная система левых линейных уравнений над ${}_R\Lambda$, состоящая из k уравнений от n неизвестных, разрешима, и пусть система (1) содержит $m = k + 1$ уравнений.

По лемме 1 lc -согласованы подсистемы системы уравнений (1)

$$\vec{A}\xi^\downarrow = \beta^\downarrow \quad (11)$$

и

$$\begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_{k+1} \end{pmatrix} \xi^\downarrow = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_{k+1} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

состоящие соответственно из первых k уравнений и из 1-го и $k + 1$ -го уравнений.

По предположению индукции и случаю $m = 2$ системы уравнений (11) и (12) разрешимы. Запишем множества Σ_1 и Σ_2 всех их решений:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \mu^\downarrow + \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} K, \\ \Sigma_2 &= \lambda^\downarrow + \text{Ann}_{\Lambda^{(n)}} L, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mu^\downarrow$ и $\lambda^\downarrow$ — некоторые фиксированные решения соответственно систем уравнений (11) и (12),

$$\begin{aligned} K &= \langle \vec{A}_1, \dots, \vec{A}_k \rangle, \\ L &= \langle \vec{A}_1, \vec{A}_{k+1} \rangle. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset.$$

Пусть

$$\vec{V} \in K \cap L,$$

то есть

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \sum_{i=1}^k c_i \vec{A}_i \\ &= d_1 \vec{A}_1 + d_{k+1} \vec{A}_{k+1}, \end{aligned}$$

где $c_i, d_i \in R$. Тогда справедливо равенство

$$(c_1 - d_1) \vec{A}_1 + \sum_{i=2}^k c_i \vec{A}_i + (-d_{k+1}) \vec{A}_{k+1} = \vec{0}. \quad (14)$$

Ввиду (13) вектор $\beta^\downarrow = (\beta_1, \dots, \beta_{k+1})^T$ можно записать в виде

$$\beta^\downarrow = (\vec{A}_1 \lambda^\downarrow, \vec{A}_2 \mu^\downarrow, \dots, \vec{A}_k \mu^\downarrow, \vec{A}_{k+1} \lambda^\downarrow)^T.$$

Поэтому из (14) и lc -согласованности системы уравнений (1) выводим соотношение

$$(c_1 - d_1)\vec{A}_1\lambda^\downarrow + \sum_{i=2}^k c_i \vec{A}_i \mu^\downarrow + (-d_{k+1})\vec{A}_{k+1}\lambda^\downarrow = \theta. \quad (15)$$

Вычитая из равенства (15) почленно равенство (14), умноженное справа на $\lambda^\downarrow$, получаем равенство

$$\sum_{i=2}^k c_i \vec{A}_i (\mu^\downarrow - \lambda^\downarrow) = \theta. \quad (16)$$

Так как

$$\vec{A}_1 \mu^\downarrow = \beta_1 = \vec{A}_1 \lambda^\downarrow,$$

из (16) следует равенство

$$\sum_{i=1}^k c_i \vec{A}_i (\mu^\downarrow - \lambda^\downarrow) = \theta,$$

означающее, что справедливо соотношение

$$\mu^\downarrow - \lambda^\downarrow \in \text{Ann}_{\Lambda(m)} \vec{V}.$$

Таким образом, доказано включение

$$\mu^\downarrow - \lambda^\downarrow \in \text{Ann}_{\Lambda(m)} (K \cap L). \quad (17)$$

Поскольку $\Lambda^{(n)}$ — δ -модуль, из (17) выводим соотношение

$$\mu^\downarrow - \lambda^\downarrow \in \text{Ann}_{\Lambda(m)} K + \text{Ann}_{\Lambda(m)} L.$$

Значит, существуют такие векторы $\gamma_1^\downarrow \in \text{Ann}_{\Lambda(m)} K$ и $\gamma_2^\downarrow \in \text{Ann}_{\Lambda(m)} L$, что

$$\mu^\downarrow + \gamma_1^\downarrow = \lambda^\downarrow + \gamma_2^\downarrow \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2.$$

Следовательно, система уравнений (1) при $m = k + 1$ разрешима.

Теорема 4 показывает, что всякий α - и δ -модуль ${}_R \Lambda$ является lc -разрешимым. Ввиду теоремы 2 можем указать подкласс класса $\mathcal{H}(R)$.

Теорема 5. *Класс левых R -модулей, являющихся α - и δ -модулями, есть подкласс класса $\mathcal{H}(R)$ локально замкнутых справа R -модулей.*

Применим полученные результаты в случае, когда $\Lambda = R$.

Определение 7. Кольцо R назовем α -кольцом (δ -кольцом), если модуль ${}_R R$ является α -модулем (δ -модулем).

Из теоремы 5 получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Класс всех колец, являющихся α - и δ -кольцами, есть подкласс класса всех локально замкнутых справа колец.*

Укажем подкласс класса всех α - и δ -колец.

Определение 8. Артиново справа и слева кольцо R называется квазифробениусовым (QF-кольцом), если для любого его правого идеала J и любого левого идеала I справедливы равенства

$$\begin{aligned}\text{Ann}_r \text{Ann}_l J &= J, \\ \text{Ann}_l \text{Ann}_r I &= I,\end{aligned}\tag{18}$$

где для $S \subset R$ через $\text{Ann}_r S$ ($\text{Ann}_l S$) обозначен правый (левый) аннулятор S в R (см. стр. 327 в [4]).

Предложение 6 ([1, 8]). Если R — QF-кольцо, то для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых конечно порожденных подмодулей F из $R_R^{(n)}$ и G из ${}_R R(n)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\text{Ann}_{R(n)} \text{Ann}_{R(n)} F &= F, \\ \text{Ann}_{R(n)} \text{Ann}_{R(n)} G &= G\end{aligned}$$

Предложение 7. QF-кольцо R является α - и β -кольцом.

Доказательство. Ввиду первого из равенств (18) кольцо R является α -кольцом.

Пусть K и L — конечно порожденные подмодули из ${}_R R(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Введем обозначения

$$\begin{aligned}J_1 &= \text{Ann}_{R(n)} K, \\ J_2 &= \text{Ann}_{R(n)} L.\end{aligned}$$

Ясно, что J_1, J_2 — подмодули из $R_R^{(n)}$. По утверждению 6 верны равенства

$$\begin{aligned}\text{Ann}_{R(n)} J_1 &= K, \\ \text{Ann}_{R(n)} J_2 &= L.\end{aligned}$$

Ввиду того, что

$$\text{Ann}_{R(n)} J_1 \cap \text{Ann}_{R(n)} J_2 = \text{Ann}_{R(n)} (J_1 + J_2),$$

справедливо равенство

$$K \cap L = \text{Ann}_{R(n)} (J_1 + J_2).$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}\text{Ann}_{R(n)} (K \cap L) &= \text{Ann}_{R(n)} \text{Ann}_{R(n)} (J_1 + J_2) = J_1 + J_2 \\ &= \text{Ann}_{R(n)} K + \text{Ann}_{R(n)} L.\end{aligned}$$

Значит, R — δ -кольцо.

В случае, когда R — конечное коммутативное кольцо и ${}_R \Lambda$ — конечный модуль, являющийся (R, R) -бимодулем со свойством $\mu r = r \mu$ для любых $\mu \in \Lambda$ и $r \in R$, предложение 7 доказано в [9].

Ввиду предложения 7 можем указать подкласс класса всех α - и δ -колец.

Теорема 7. Класс всех QF-колец является подклассом класса всех α - и δ -колец.

Список литературы

1. Елизаров В. П., Системы линейных уравнений над квазифробениусовыми кольцами. *Фундамент. и прикл. матем.* (1995) **1**, №2, 535–539.
2. Елизаров В. П., Условия совместности систем линейных уравнений над кольцами. *Фундамент. и прикл. матем.* (2000) **6**, №3, 777–788.
3. Елизаров В. П., Условия, необходимые для разрешимости системы линейных уравнений над кольцом. *Дискретная математика* (2004) **16**, №2, 44–53.
4. Каш Ф., *Модули и кольца*. Мир, Москва, 1981.
5. Нечаев А. А., Линейные рекуррентные последовательности над квазифробениусовыми модулями. *Успехи матем. наук* (1993) **48**, №3, 197–198.
6. Нечаев А. А., Конечные квазифробениусовы модули, приложения к кодам и линейным рекуррентам. *Фундамент. и прикл. матем.* (1995) **1**, №1, 229–254.
7. Camion P., Levy L. S., Mann H. B., Linear equations over a commutative ring. *J. Algebra* (1971) **17**, №3, 432–446.
8. Hall M., A type of algebraic closure. *Ann. Math.* (1939) **40**, 360–369.
9. Nechaev A. A., Polylinear recurring sequences over modules and quasi-Frobenius modules. In: *Proc. First Intern. Tainan–Moscow Algebra Workshop*. de Gruyter, Berlin, 1996, pp. 283–288.
10. van der Waerden B. L., *Moderne Algebra*, v. 2. Springer, Berlin, 1931.

Статья поступила 17.01.2005.