Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 4, 73–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:44:11

Функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде

© 2001 г. В. И. Афанасьев

Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде, m_n — математическое ожидание ξ_n , вычисленное при условии, что случайная среда фиксирована. Доказана теорема о сходимости последовательности случайных процессов $\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \xi_n > 0\}$ при $n \rightarrow \infty$ по распределению в соответствующем функциональном пространстве. Эта теорема обобщает предшествующий результат автора, доказанный в предположении, что производящие функции числа непосредственных потомков дробно-линейны.

1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, где

$$\pi_n = \{\pi_n(0), \pi_n(1), \pi_n(2), \dots\}, \quad \pi_n(i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_n(i) = 1, \quad n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

причем последовательности π_n независимы и одинаково распределены при разных n . По определению это означает, что случайные величины ξ_n являются неотрицательными целочисленными и

$$\xi_0 = 1, \quad \mathbf{M}(s^{\xi_{n+1}} \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n) = (f_n(s))^{\xi_n}, \quad (1)$$

где

$$f_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n(i) s^i, \quad s \in [-1, 1], \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Положим

$$X_i = \ln f'_{i-1}(1), \quad \eta_i = f''_{i-1}(1)/(2f'_{i-1}(1)^2), \quad i \in \mathbf{N}.$$

Будем предполагать, что процесс $\{\xi_n\}$ является критическим, то есть $\mathbf{M}X_1 = 0$, и выполнены условия

(а) конечны $\mathbf{M}X_1^2$, $\mathbf{M}\eta_1$, $\mathbf{M}X_1\eta_1$, причем $\mathbf{M}X_1^2 = \sigma^2 > 0$,

(б) $\mathbf{M} \exp(-X_1) < \infty$.

Пусть $T = \inf\{n: \xi_n = 0\}$ — момент вырождения $\{\xi_n\}$. Положим

$$m_n = \mathbf{M}_\pi \xi_n$$

(символы $\mathbf{M}_\pi$ и $\mathbf{P}_\pi$ означают математическое ожидание и вероятность, вычисленные при условии, что случайная среда $\{\pi_n\}$ фиксирована).

Цель настоящей работы — доказательство следующей функциональной предельной теоремы.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и выполнены условия (а) и (b), тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\xi_{[nt]}}{m_{[nt]}}, \quad t \in (0, 1] \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad (2)$$

где μ — случайный процесс с неотрицательными постоянными реализациями на $(0, 1]$, причем $\mathbf{P}(\mu > 0) > 0$, сходимость в (2) надо понимать как сходимость по распределению в пространстве $D[u, 1]$ с топологией Скорохода при любом фиксированном $u \in (0, 1)$.

Указанная теорема обобщает результат автора [1], где помимо условий (а), (b) предполагается, что производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}_0$, являются дробно-линейными. Аналогичные теоремы для докритических ветвящихся процессов в случайной среде рассматриваются в работах автора [2, 3].

2. В данном разделе изучаются свойства так называемых сопровождающих случайных последовательностей. В силу того, что компоненты среды π_n , $n \in \mathbf{N}_0$, одинаково распределены и независимы, случайные величины $X_1, X_2, \dots$ независимы и одинаково распределены. Рассмотрим сопровождающее случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Оно имеет нулевой снос, поскольку процесс $\{\xi_n\}$ является критическим. Пусть $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ — строгие нижние лестничные моменты этого блуждания, то есть

$$\tau_1 = \inf\{n: S_n < 0\}, \quad \tau_2 = \inf\{n > \tau_1: S_n < S_{\tau_1}\}, \dots$$

В работе М. В. Козлова [4] установлено, что если $\mathbf{M}X_1 = 0$ и $\mathbf{M}X_1^2 < \infty$, то при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$, во-первых,

$$\mathbf{P}(\tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad (3)$$

где постоянная c_1 положительна и не зависит от n и j , во-вторых, при любом фиксированном $\lambda \in (0, 1)$

$$\mathbf{P}(\lambda n < \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = o(1/\sqrt{n}). \quad (4)$$

В [4] также доказано, что если $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{M}X_1^2 < \infty$ и $\{\bar{Y}_i, i \in \mathbf{N}\}$ — последовательность случайных векторов одинаковой размерности l такая, что случайные векторы $(X_1, \bar{Y}_1), (X_2, \bar{Y}_2), \dots$ независимы и одинаково распределены, то

$$\{(S_i, \bar{Y}_i), i \in \mathbf{N} \mid n < \tau_1\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{(S_i^{(1)}, \bar{Y}_i^{(1)}), i \in \mathbf{N}\}, \quad (5)$$

где справа в (5) стоит некоторая последовательность случайных векторов, причем $\{S_i^{(1)}, i \in \mathbf{N}\}$ является однородной марковской цепью, сходимость в (5) надо понимать как сходимость по распределению в $(l+1)$ -й степени пространства $\mathbf{R}^\infty$ с топологией покоординатной сходимости. Более того, если

$$G(x, \Gamma) = \mathbf{P}(\bar{Y}_1 \in \Gamma \mid X_1 = x),$$

где $x \in \mathbf{R}$, Γ — борелевское множество из $\mathbf{R}^l$, то при любом фиксированном $k \in \mathbf{N}$ и любых борелевских множествах $D_i \in \mathbf{R}$, $\Gamma_i \in \mathbf{R}^l$, $i = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k \mid n < \tau_1) \\ = \int_{D_1} \dots \int_{D_k} \prod_{i=1}^k G(x_i - x_{i-1}, \Gamma_i) d\mathbf{P}(S_i^{(1)} \leq x_i, i = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (6)$$

Обобщим соотношения (5) и (6).

Лемма 1. Если $\mathbf{M}X_1 = 0$ и $\mathbf{M}X_1^2 < \infty$, то при любом $j \in \mathbf{N}_0$

$$\{(S_i, \bar{Y}_i), i \in \mathbf{N} \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{(S_i^{(j)}, \bar{Y}_i^{(j)}), i \in \mathbf{N}\}, \quad (7)$$

где справа стоит некоторая последовательность случайных векторов, более того, при любом $k \in \mathbf{N}$ и любых борелевских множествах $D_i \in \mathbf{R}$, $\Gamma_i \in \mathbf{R}^l$, $i = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ = \int_{D_1} \dots \int_{D_k} \prod_{i=1}^k G(x_i - x_{i-1}, \Gamma_i) d\mathbf{P}(S_i^{(j)} \leq x_i, i = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. При $j = 0$ доказываемая лемма справедлива ввиду соотношений (5), (6). Не ограничивая общности, можно считать, что предельная при $j = 0$ последовательность случайных векторов $\{(S_i^{(1)}, \bar{Y}_i^{(1)})\}$ задана на том же вероятностном пространстве, что и $\{(S_i, \bar{Y}_i)\}$, причем эти две последовательности независимы. Зафиксируем $j \in \mathbf{N}$. Очевидно, что при $n > k$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ = \sum_{r=1}^k \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, \tau_j = r, \tau_{j+1} > n) \\ + \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j \leq n < \tau_{j+1}). \end{aligned} \quad (9)$$

Положим

$$S'_i = S_{\tau_j+i} - S_{\tau_j}, \quad \bar{Y}'_i = \bar{Y}_{\tau_j+i}, \quad i \in \mathbf{N}_0, \quad \tau'_1 = \tau_{j+1} - \tau_j.$$

Последовательность случайных векторов $\{(S'_i, \bar{Y}'_i)\}$ образует точную вероятностную копию последовательности $\{(S_i, \bar{Y}_i)\}$ и не зависит от $\tau_j, S_1, \bar{Y}_1, S_2, \bar{Y}_2, \dots, S_{\tau_j}, \bar{Y}_{\tau_j}$. Заметим, что при $r \leq k$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, \tau_j = r, \tau_{j+1} > n) = \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, r, \\ S_r + S'_p \in D_{r+p}, \bar{Y}'_p \in \Gamma_{r+p}, p = 1, \dots, k-r, \tau_j = r, \tau'_1 > n-r). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая независимость $\{(S'_i, \bar{Y}'_i)\}$ от $\tau_j, S_1, \bar{Y}_1, \dots, S_{\tau_j}, \bar{Y}_{\tau_j}$ и (3), (5), (6), получаем, что при $r \leq k$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_1} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, \tau_j = r, \tau_{j+1} > n) \\ = \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, r, \tau_j = r, \\ S_r + S_p^{(1)} \in D_{r+p}, \bar{Y}_p^{(1)} \in \Gamma_{r+p}, p = 1, \dots, k-r). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим вероятности

$$\begin{aligned} P_n &= \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j \leq n < \tau_{j+1}), \\ P_n^{(1)} &= \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j \leq \lambda n, \tau_{j+1} > n), \\ P_n^{(2)} &= \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j \leq \lambda n, \tau'_1 > n), \\ P_n^{(3)} &= \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j \leq \lambda n, \tau'_1 > n(1-\lambda)), \end{aligned}$$

где $\lambda \in (0, 1)$. Очевидно, что

$$P_n^{(2)} \leq P_n^{(1)} \leq P_n^{(3)}.$$

Ввиду соотношения (3) и независимости $\{(S'_i, \bar{Y}'_i)\}$ от $\tau_j, S_1, \bar{Y}_1, \dots, S_{\tau_j}, \bar{Y}_{\tau_j}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_1} P_n^{(2)} &= \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_1} P_n^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j) &\leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_1} P_n^{(1)} \leq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_1} P_n^{(1)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j). \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, что

$$\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} = \{\tau_j \leq \lambda n, \tau_{j+1} > n\} + \{\lambda n < \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}. \quad (12)$$

Ввиду соотношений (4) и (12) верхние (нижние) пределы $\sqrt{n}P_n$ и $\sqrt{n}P_n^{(1)}$ при $n \rightarrow \infty$ совпадают, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j) &\leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_1} P_n \leq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_1} P_n \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j). \end{aligned}$$

Так как вероятность P_n не зависит от λ , переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{c_1} P_n = \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j). \quad (13)$$

Из соотношений (3), (9), (10), (13) следует, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ &= \sum_{r=1}^k \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, r, \tau_j = r, S_r + S_p^{(1)} \in D_{r+p}, \\ & \quad \bar{Y}_p^{(1)} \in \Gamma_{r+p}, p = 1, \dots, k-r) \\ & \quad + \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j). \quad (14) \end{aligned}$$

Видно, что выражение в правой части (14) задает собственное распределение, поскольку при

$$D_1 = D_2 = \dots = D_k = \mathbf{R}, \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_k = \mathbf{R}^l$$

правая часть равна

$$\sum_{r=1}^k \mathbf{P}(\tau_j = r) + \mathbf{P}(\tau_j > k) = 1.$$

Итак, соотношение (7) доказано.

Из определения условной вероятности $G(x, \Gamma)$ следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j) \\ &= \int_{D_1} \dots \int_{D_k} \prod_{i=1}^k G(x_i - x_{i-1}, \Gamma_i) d\mathbf{P}(S_i \leq x_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j). \quad (15) \end{aligned}$$

Ввиду соотношения (6) и независимости последовательностей $\{(S_i^{(1)}, \bar{Y}_i^{(1)})\}$ и $\{(S_i, \bar{Y}_i)\}$ при любом $r = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i = 1, \dots, r, \tau_j = r, S_r + S_p^{(1)} \in D_{r+p}, \bar{Y}_p^{(1)} \in \Gamma_{r+p}, p = 1, \dots, k-r) \\ &= \mathbf{M}(\chi_{\{S_i \in D_i, \bar{Y}_i \in \Gamma_i, i=1, \dots, r, \tau_j=r\}} \\ & \quad \times \int_{D_{r+1}-S_r} \dots \int_{D_k-S_r} \prod_{p=1}^{k-r} G(x_{r+p} - x_{r+p-1}, \Gamma_{r+p}) \\ & \quad \times d\mathbf{P}(S_p^{(1)} \leq x_{r+p}, p = 1, \dots, k-r)) \\ &= \int_{D_1} \dots \int_{D_r} \prod_{i=1}^r G(x_i - x_{i-1}, \Gamma_i) \\ & \quad \times \left(\int_{D_{r+1}-x_r} \dots \int_{D_k-x_r} \prod_{p=1}^{k-r} G(x_{r+p} - x_{r+p-1}, \Gamma_{r+p}) \right. \\ & \quad \times d\mathbf{P}(S_p^{(1)} \leq x_{r+p}, p = 1, \dots, k-r) \Big) d\mathbf{P}(S_p \leq x_i, i = 1, \dots, r, \tau_j = r) \\ &= \int_{D_1} \dots \int_{D_k} \prod_{i=1}^k G(x_i - x_{i-1}, \Gamma_i) \\ & \quad \times d\mathbf{P}(S_i \leq x_i, i = 1, \dots, r, \tau_j = r, S_r + S_p^{(1)} \leq x_{r+p}, p = 1, \dots, k-r) \end{aligned} \quad (16)$$

(здесь χ_A — индикатор множества A , при нахождении интеграла по множествам $D_{r+1} - S_r, \dots, D_k - S_r$ случайная величина S_r фиксируется). Складывая (16) при разных r и (15) и учитывая, что ввиду (14)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_i^{(j)} \in D_i, i = 1, \dots, k) \\ &= \sum_{r=1}^k \mathbf{P}(S_i \in D_i, i = 1, \dots, r, \tau_j = r, S_r + S_p^{(1)} \in D_{r+p}, p = 1, \dots, k-r) \\ & \quad + \mathbf{P}(S_i \in D_i, i = 1, \dots, k, k < \tau_j), \end{aligned}$$

получаем соотношение (8). Лемма 1 доказана.

Введем еще две сопровождающие случайные последовательности, порожденные случайной средой:

$$\begin{aligned} a_n &= e^{-S_n}, & n \in \mathbf{N}_0, \\ b_0 &= 0, \quad b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i}, & n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

В работе автора [5] установлено, что если $\mathbf{M}X_1 = 0$ и выполнено условие (а), то при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{a_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \Rightarrow 0, \quad (17)$$

$$\{b_{[nt]}, t \in (0, 1) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \Rightarrow \nu_j, \quad (18)$$

где ν_j — случайный процесс с положительными постоянными реализациями на $(0, 1]$, знак $\Rightarrow$ означает сходимость процессов в смысле конечномерных распределений.

Лемма 2. Если $\mathbf{M}X_1 = 0$ и выполнены условия (а), (б), то при любых фиксированных $j \in \mathbf{N}_0$ и $\lambda \in (0, 1)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1})}{\mathbf{P}(\tau_j \leq n < \tau_{j+1})} = 1, \quad (19)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_n - b_m \mid \tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1}) = 0, \quad (20)$$

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(a_n - a_m \mid \tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1}) = 0. \quad (21)$$

Замечание 1. Соотношение (20) обобщает указанное в [4] и уточненное в работе [6] утверждение: если $\mathbf{M}X_1 = 0$ и выполнено условие (а), то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_n - b_m \mid \tau_1 > n) = 0.$$

Доказательство леммы 2. Зафиксируем $j \in \mathbf{N}$ и положим

$$\begin{aligned} S'_0 &= 0, & S'_i &= S_{\tau_j+i} - S_{\tau_j}, & \eta'_i &= \eta_{\tau_j+i}, & i \in \mathbf{N}, \\ \tau'_1 &= \tau_{j+1} - \tau_j, \\ b'_0 &= 0, & b'_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \eta'_{i+1} e^{-S'_i}, & n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Будем считать, что $n > m$. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1}) &= \sum_{k=j}^{[\lambda m]} \mathbf{P}(\tau_j = k, \tau'_1 > n - k) \\ &= \sum_{k=j}^{[\lambda m]} \mathbf{P}(\tau_j = k) \mathbf{P}(\tau'_1 > n - k), \end{aligned}$$

в силу соотношения (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(\tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1}) = c_1 \mathbf{P}(\tau_j \leq \lambda m).$$

Но $\tau_j < \infty$ п. н., поэтому, снова учитывая (3), получаем соотношение (19).

Установим теперь соотношение (20). При $\tau_j \leq \lambda m$ справедливо представление

$$b_n - b_m = e^{-S_{\tau_j}} (b'_{n-\tau_j} - b'_{m-\tau_j}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(b_n - b_m \mid \tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1}) \\ = \mathbf{P}(\tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1})^{-1} \sum_{k=j}^{[\lambda m]} \mathbf{M}[e^{-S_{\tau_j}} (b'_{n-k} - b'_{m-k}); \tau_j = k, \tau'_1 > n - k]. \end{aligned} \quad (22)$$

Случайные величины со штрихами распределены так же, как соответствующие случайные величины без штрихов, и не зависят от τ_j , S_{τ_j} , поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[e^{-S_{\tau_j}} (b'_{n-k} - b'_{m-k}); \tau_j = k, \tau'_1 > n - k] \\ = \mathbf{M}(e^{-S_{\tau_j}} \tau_j = k) \mathbf{M}(b_{n-k} - b_{m-k}; \tau_1 > n - k). \end{aligned} \quad (23)$$

Из соотношений (22), (23) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(b_n - b_m \mid \tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1}) \\ = \mathbf{P}(\tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1})^{-1} \sum_{k=j}^{[\lambda m]} \mathbf{M}(e^{-S_{\tau_j}} \tau_j = k) \mathbf{M}(b_{n-k} - b_{m-k}; \tau_1 > n - k). \end{aligned} \quad (24)$$

Ввиду замечания 1 для произвольного $\varepsilon \in (0, \infty)$ существует такое $M \in \mathbf{N}$, что при всех $m > M$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_n - b_m \mid \tau_1 > n) \leq \varepsilon. \quad (25)$$

Из соотношений (24), (25) вытекает, что при всех $m > M/(1 - \lambda)$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_n - b_m \mid \tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1}) \leq \varepsilon M e^{-S_{\tau_j}} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\tau_1 > n - \lambda m)}{\mathbf{P}(\tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1})}.$$

Отсюда, применяя соотношения (3) и (19), находим, что

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_n - b_m \mid \tau_j \leq \lambda m, n < \tau_{j+1}) \leq \varepsilon M e^{-S_{\tau_j}}.$$

Вследствие условия (б) последнее математическое ожидание конечно (см. [1]), поэтому ввиду произвольности ε приходим к соотношению (20). Соотношение (21) является следствием (20) (надо положить $\eta_1 = \eta_2 = \dots = 1$). Лемма 2 доказана.

Аналогично устанавливается следующее утверждение (см. [1]).

Лемма 3. Если $\mathbf{M}X_1 = 0$ и выполнены условия (а), (b), то при любых фиксированных $j \in \mathbf{N}$, λ и t таких, что $0 < \lambda < t < 1$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_n - b_{[nt]} \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(a_n - a_{[nt]} \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) &= 0. \end{aligned}$$

3. Перейдем к непосредственному рассмотрению ветвящегося процесса в случайной среде.

Лемма 4. Если $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и $0 < \mathbf{M}X_1^2 < \infty$, то при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\pi_i, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \{\pi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}, \quad (26)$$

где $\{\pi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ — некоторая случайная среда.

Замечание 2. Пусть

$$\pi_i^{(j)} = \{\pi_i^{(j)}(0), \pi_i^{(j)}(1), \dots\}$$

и при $k \in \mathbf{N}_0$

$$\begin{aligned} \pi_{i,k} &= (\pi_i(0), \pi_i(1), \dots, \pi_i(k)), \\ \pi_{i,k}^{(j)} &= (\pi_i^{(j)}(0), \pi_i^{(j)}(1), \dots, \pi_i^{(j)}(k)). \end{aligned}$$

Соотношение (26) надо понимать следующим образом: при любом фиксированном $k \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\pi_{i,k}, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \{\pi_{i,k}^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}.$$

Доказательство леммы 4. Рассмотрим при фиксированном $k \in \mathbf{N}_0$ последовательность случайных векторов

$$(X_1; \pi_{0,k}), (X_2; \pi_{1,k}), \dots$$

Ясно, что эти случайные векторы независимы и одинаково распределены. В силу леммы 1 при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{S_1; \pi_{0,k}; S_2; \pi_{1,k}; \dots \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \{S_1^{(j)}; \pi_{0,k}^{(j)}; S_2^{(j)}; \pi_{2,k}^{(j)}; \dots\}, \quad (27)$$

где $\pi_{0,k}^{(j)}, \pi_{2,k}^{(j)}, \dots$ — некоторые случайные векторы. Ясно, что при любых $i, j, k \in \mathbf{N}_0$ первые $k+1$ компонент вектора $\pi_{i,k+1}^{(j)}$ можно считать совпадающими п. н. с соответствующими компонентами вектора $\pi_{i,k}^{(j)}$. Поэтому последовательность случайных векторов $\{\pi_{i,k}^{(j)}, k \in \mathbf{N}_0\}$ порождает случайную последовательность

$$\pi_i^{(j)} = \{\pi_i^{(j)}(0), \pi_i^{(j)}(1), \dots\}$$

и имеет место соотношение (26). Покажем, что последовательность $\{\pi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ образует случайную среду. Очевидно, $\pi_i^{(j)}(l) \geq 0$ при любом $l \in \mathbf{N}_0$. Установим, что при любых $i, j \in \mathbf{N}_0$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \pi_i^{(j)}(l) = 1. \quad (28)$$

В силу леммы 1 при $L \in \mathbf{N}_0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sum_{l=0}^L \pi_i^{(j)}(l) \geq 1 - \varepsilon \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P} \left(\sum_{l=0}^L \pi_i(l) \geq 1 - \varepsilon \mid X_{i+1} = x_{i+1} - x_i \right) \\ &\quad \times d\mathbf{P}(S_r^{(j)} \leq x_r, r = 1, \dots, i+1). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $L \rightarrow \infty$, по теореме о монотонной сходимости получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \pi_i^{(j)}(l) \geq 1 - \varepsilon \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \pi_i(l) \geq 1 - \varepsilon \mid X_{i+1} = x_{i+1} - x_i \right) \\ &\quad \times d\mathbf{P}(S_r^{(j)} \leq x_r, r = 1, \dots, i+1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{P}(S_r^{(j)} \leq x_r, r = 1, \dots, i+1) = 1. \end{aligned} \quad (29)$$

С другой стороны, с вероятностью 1

$$\sum_{l=0}^L \pi_i(l) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{l=0}^L \pi_i^{(j)}(l) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{l=0}^{\infty} \pi_i^{(j)}(l) \leq 1. \quad (30)$$

Из соотношений (29), (30) следует (28). Лемма 4 доказана.

Компоненты случайной среды $\{\pi_i^{(j)}\}$ не являются, вообще говоря, независимыми одинаково распределенными случайными последовательностями. Тем не менее, зададим ветвящийся процесс $\{\xi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ в случайной среде $\{\pi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ в соответствии с соотношением (1).

Лемма 5. Если $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде и $0 < \mathbf{M}X_1^2 < \infty$, то при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_i, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \{\xi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $k \in \mathbf{N}$ и $l_1, \dots, l_k \in \mathbf{N}_0$. Положим

$$l = \max(l_1, \dots, l_k).$$

Очевидно,

$$\mathbf{P}_{\pi}(\xi_1 = l_1, \dots, \xi_k = l_k) = f(\pi_{0,l}; \pi_{1,l}; \dots; \pi_{k-1,l}),$$

где f — некоторая неслучайная непрерывная и ограниченная функция на $[0, 1]^{(l+1)k}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_1 = l_1, \dots, \xi_k = l_k \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ = \frac{1}{\mathbf{P}(\tau_j \leq n < \tau_{j+1})} \mathbf{M}(\chi_{\{\xi_1=l_1, \dots, \xi_k=l_k\}} \chi_{\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}}) \\ = \frac{1}{\mathbf{P}(\tau_j \leq n < \tau_{j+1})} \mathbf{M}(\chi_{\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}} \mathbf{P}_{\pi}(\xi_1 = l_1, \dots, \xi_k = l_k)) \\ = \mathbf{M}(f(\pi_{0,l}; \pi_{1,l}; \dots; \pi_{k-1,l}) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая лемму 1, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_1 = l_1, \dots, \xi_k = l_k \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = \mathbf{M}f(\pi_{0,l}^{(j)}; \pi_{1,l}^{(j)}; \dots; \pi_{k-1,l}^{(j)}). \quad (31)$$

Ясно, что $f(\pi_{0,l}^{(j)}; \pi_{1,l}^{(j)}; \dots; \pi_{k-1,l}^{(j)})$ имеет тот же смысл для случайной среды $\{\pi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$, что и $f(\pi_{0,l}; \pi_{1,l}; \dots; \pi_{k-1,l})$ для среды $\{\pi_i, i \in \mathbf{N}_0\}$, то есть

$$f(\pi_{0,l}^{(j)}; \pi_{1,l}^{(j)}; \dots; \pi_{k-1,l}^{(j)}) = \mathbf{P}_{\pi^{(j)}}(\xi_1^{(j)} = l_1, \dots, \xi_k^{(j)} = l_k), \quad (32)$$

где $\mathbf{P}_{\pi^{(j)}}$ означает вероятность, вычисленную при условии, что среда $\{\pi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ фиксирована. Из соотношений (31), (32) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_1 = l_1, \dots, \xi_k = l_k \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = \mathbf{P}(\xi_1^{(j)} = l_1, \dots, \xi_k^{(j)} = l_k).$$

Лемма 5 доказана.

Наряду со случайной средой $\{\pi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ у нас имеется случайная последовательность $\{S_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ (см. (7)). Оказывается, что при любом $j \in \mathbf{N}_0$ последовательность $\{S_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ п. н. совпадает с сопровождающим случайным блужданием процесса $\{\xi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$. Положим

$$\begin{aligned} f_{n,j}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(j)}(i) s^i, \quad s \in [-1, 1], \quad n \in \mathbf{N}_0, \\ X_n^{(j)} &= \ln f'_{n-1,j}(1), \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Утверждается, что для любого $i \in \mathbf{N}$ п. н.

$$S_i^{(j)} = \sum_{n=1}^i X_n^{(j)}. \quad (33)$$

Ради краткости изложения покажем, например, что $S_1^{(j)} = X_1^{(j)}$ п. н., что равносильно соотношению

$$\exp S_1^{(j)} = \exp X_1^{(j)} \quad \text{п. н.} \quad (34)$$

Очевидно, что для каждого $m \in \mathbf{N}$

$$\sum_{i=1}^m i \pi_0(i) \leq \exp S_1 \quad \text{п. н.} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m i \pi_0^{(j)}(i) \leq \exp S_1^{(j)} \quad \text{п. н.}$$

Поэтому

$$\exp X_1^{(j)} = \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_0^{(j)}(i) \leq \exp S_1^{(j)} \quad \text{п. н.}$$

Если мы покажем, что для каждого $L \in (0, \infty)$

$$\mathbf{M}((\exp X_1^{(j)}) \wedge L) = \mathbf{M}((\exp S_1^{(j)}) \wedge L), \quad (35)$$

то отсюда будет следовать (34). В силу леммы 1 при каждом $m \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left(\left(\sum_{i=0}^m i\pi_0^{(j)}(i) \right) \wedge L \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M} \left(\left(\sum_{i=0}^m i\pi_0^{(j)}(i) \right) \wedge L \mid S_1^{(j)} = x \right) d\mathbf{P}(S_1^{(j)} \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M} \left(\left(\sum_{i=0}^m i\pi_0(i) \right) \wedge L \mid S_1 = x \right) d\mathbf{P}(S_1^{(j)} \leq x). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, по теореме о монотонной сходимости получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}((\exp X_1^{(j)}) \wedge L) &= \mathbf{M} \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} i\pi_0^{(j)}(i) \right) \wedge L \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M} \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} i\pi_0(i) \right) \wedge L \mid S_1 = x \right) d\mathbf{P}(S_1^{(j)} \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}((\exp S_1) \wedge L \mid S_1 = x) d\mathbf{P}(S_1^{(j)} \leq x) \\ &= \mathbf{M}((\exp S_1^{(j)}) \wedge L). \end{aligned}$$

Итак, соотношение (35), а следовательно, и (34) доказаны.

Вместо соотношения (27) можно написать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{S_1; \pi_{0,k}; \eta_1; S_2; \pi_{1,k}; \eta_2; \dots \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{S_1^{(j)}; \pi_{0,k}^{(j)}; \eta_1^{(j)}; S_2^{(j)}; \pi_{1,k}^{(j)}; \eta_2^{(j)}; \dots\}.$$

Аналогично (33) можно показать, что п. н.

$$\eta_n^{(j)} = \frac{f''_{n-1,j}(1)}{2(f'_{n-1,j}(1))^2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Отсюда следует, что сопровождающие случайные последовательности $\{S_i^{(j)}\}$, $\{a_i^{(j)}\}$, $\{b_i^{(j)}\}$ для случайного процесса $\{\xi_i^{(j)}\}$ являются пределами по распределению при $n \rightarrow \infty$ соответствующих сопровождающих случайных последовательностей $\{S_i\}$, $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ процесса $\{\xi_i\}$, рассматриваемых при условии $\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$.

С учетом сказанного и соотношения $m_i = \exp S_i$, $i \in \mathbf{N}_0$, аналогично лемме 5 устанавливается следующее утверждение.

Лемма 6. Если $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде и $0 < \mathbf{M}X_1^2 < \infty$, то при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_i/m_i, i \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\xi_i^{(j)}/m_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\},$$

где $m_i^{(j)} = \mathbf{M}_{\pi^{(j)}} \xi_i^{(j)}$.

Следующее утверждение, доказанное в работе [1], частично объясняет важную роль, которую играют сопровождающие случайные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ при изучении ветвящихся процессов в случайной среде.

Лемма 7. Пусть $\{\xi_n\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и пусть с вероятностью 1 случайные величины X_1, η_1 конечны, тогда при любых $k, l \in \mathbf{N}_0$, $l \geq k$, справедливо соотношение

$$\mathbf{M}_\pi \left(\frac{\xi_l}{m_l} - \frac{\xi_k}{m_k} \right)^2 = 2(b_l - b_k) + a_l - a_k.$$

Лемма 8. Если $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде и выполнено условие (а), то при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $i \rightarrow \infty$

$$\frac{\xi_i^{(j)}}{m_i^{(j)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu^{(j)},$$

где $\mu^{(j)}$ — некоторая неотрицательная случайная величина, для которой $\mathbf{P}(\mu^{(0)} > 0) > 0$.

Доказательство. При фиксированной среде $\{\pi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ случайная последовательность $\{\xi_i^{(j)}/m_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ является мартингалом и поэтому п. н. существует предел этой последовательности, который мы будем обозначать $\mu_{\pi^{(j)}}$. Это означает, что при фиксированной среде $\{\pi_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ последовательность $\{\xi_i^{(j)}/m_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ фундаментальна с вероятностью 1. Отсюда следует (уже без фиксирования среды), что последовательность $\{\xi_i^{(j)}/m_i^{(j)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ фундаментальна и, следовательно, п. н. существует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\xi_i^{(j)}}{m_i^{(j)}} = \mu^{(j)},$$

где $\mu^{(j)}$ — некоторая неотрицательная случайная величина. Покажем, что вероятность $\mathbf{P}(\mu^{(0)} > 0)$ положительна. В [4] в условиях доказываемой леммы установлено, что с вероятностью 1

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_{i+1}^{(0)} e^{-S_i^{(0)}} < \infty, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} S_i^{(0)} = \infty.$$

Значит, п. н.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(2\eta_{i+1}^{(0)} e^{-S_i^{(0)}} + e^{-S_{i+1}^{(0)}} - e^{-S_i^{(0)}} \right) < \infty.$$

Отсюда ввиду леммы 7 следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{k, l \rightarrow \infty, l > k} \mathbf{M}_{\pi^{(0)}} \left(\frac{\xi_l^{(0)}}{m_l^{(0)}} - \frac{\xi_k^{(0)}}{m_k^{(0)}} \right)^2 &= \lim_{k, l \rightarrow \infty, l > k} (2(b_l^{(0)} - b_k^{(0)}) + a_l^{(0)} - a_k^{(0)}) \\ &= \lim_{k, l \rightarrow \infty, l > k} \sum_{i=k}^{l-1} (2\eta_{i+1}^{(0)} e^{-S_i^{(0)}} + e^{-S_{i+1}^{(0)}} - e^{-S_i^{(0)}}) = 0. \end{aligned}$$

Итак, последовательность $\{\xi_i^{(0)}/m_i^{(0)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ при фиксированной среде $\{\pi_i^{(0)}, i \in \mathbf{N}_0\}$ сходится в среднем квадратическом. Поэтому

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{M}_{\pi^{(0)}} \frac{\xi_i^{(0)}}{m_i^{(0)}} = \mathbf{M}_{\pi^{(0)}} \mu_{\pi^{(0)}}$$

и, следовательно, $\mathbf{M}_{\pi^{(0)}} \mu_{\pi^{(0)}} = 1$. Но это означает, что $\mathbf{P}_{\pi^{(0)}}(\mu_{\pi^{(0)}} > 0) > 0$. Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{P}_{\pi^{(0)}} \left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcap_{i \geq n} \left\{ \frac{\xi_i^{(0)}}{m_i^{(0)}} > \frac{1}{k} \right\} \right) > 0$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcap_{i \geq n} \left\{ \frac{\xi_i^{(0)}}{m_i^{(0)}} > \frac{1}{k} \right\} \right) > 0.$$

Из последнего неравенства получаем, что $\mathbf{P}(\mu^{(j)} > 0) > 0$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. В условиях теоремы 1 при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_n/m_n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu^{(j)},$$

где $\mu^{(j)}$ — та же случайная величина, что и в лемме 8.

Доказательство. Покажем, что для произвольного $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{\xi_n}{m_n} - \frac{\xi_i}{m_i} \right| \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) = 0. \quad (36)$$

Действительно, при $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\left| \frac{\xi_n}{m_n} - \frac{\xi_i}{m_i} \right| \geq \varepsilon; \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) \\ & \leq \mathbf{P}(\lambda i < \tau_j < n < \tau_{j+1}) + \mathbf{P} \left(\left| \frac{\xi_n}{m_n} - \frac{\xi_i}{m_i} \right| \geq \varepsilon; \tau_j \leq \lambda i, n < \tau_{j+1} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (37). По неравенству Чебышева

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\left| \frac{\xi_n}{m_n} - \frac{\xi_i}{m_i} \right| \geq \varepsilon; \tau_j \leq \lambda i, n < \tau_{j+1} \right) \\ & = \mathbf{M} \left(\mathbf{P}_{\pi} \left(\left| \frac{\xi_n}{m_n} - \frac{\xi_i}{m_i} \right| \geq \varepsilon \right); \tau_j \leq \lambda i, n < \tau_{j+1} \right) \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M} \left(\mathbf{M}_{\pi} \left(\frac{\xi_n}{m_n} - \frac{\xi_i}{m_i} \right)^2; \tau_j \leq \lambda i, n < \tau_{j+1} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя лемму 7, находим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\left| \frac{\xi_n}{m_n} - \frac{\xi_i}{m_i} \right| \geq \varepsilon; \tau_j \leq \lambda i, n < \tau_{j+1} \right) \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M}(2(b_n - b_i) + a_n - a_i; \tau_j \leq \lambda i, n < \tau_{j+1}). \end{aligned} \quad (38)$$

Из соотношений (37) и (38) вытекает, что при $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\left| \frac{\xi_n}{m_n} - \frac{\xi_i}{m_i} \right| \geq \varepsilon; \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) \\ & \leq \mathbf{P}(\lambda i < \tau_j < n < \tau_{j+1}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M}(2(b_n - b_i) + a_n - a_i; \tau_j \leq \lambda i, n < \tau_{j+1}). \end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 2, получаем соотношение (36). Из лемм 6, 8 и соотношения (36) следует (см. параграф 4 в [7]) утверждение леммы 9.

Г. Керстинг и И. Гейгер [8] установили, что если $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс и выполнено условие (а), то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{c_2}{\sqrt{n}}, \quad (39)$$

где c_2 — положительная постоянная.

Лемма 10. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде и выполнено условие (а). Если $\{A_n\}$ — такая последовательность случайных событий, что при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = a_j, \quad (40)$$

то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n \mid T > n) = \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j,$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные из соотношений (3) и (39) соответственно.

Доказательство. Справедливо представление

$$\mathbf{P}(A_n \mid T > n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(\tau_j \leq n < \tau_{j+1})}{\mathbf{P}(T > n)} \mathbf{P}(A_n, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}).$$

Пусть $S_m(n)$ — сумма первых m слагаемых последнего ряда, а $R_m(n)$ — соответствующий остаток ряда. Тогда

$$\mathbf{P}(A_n \mid T > n) = S_m(n) + R_m(n). \quad (41)$$

В силу соотношений (3), (39) и (40)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_m(n) = \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{m-1} a_j.$$

Очевидно, $S_m(n) \leq 1$ при $n, m \in \mathbf{N}$, поэтому существует конечный предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_m(n) = \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j. \quad (42)$$

Далее, при $j \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{P}(T > n; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi(T > n); \tau_j \leq n < \tau_{j+1}). \quad (43)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}_\pi(T > n) = 1 - f_0(f_1(\dots f_{n-1}(0)\dots)) \leq \min_{0 \leq i \leq n-1} (f'_0(1) \dots f'_i(1)) = \exp(-M(n)), \quad (44)$$

где $M(n) = \max_{0 \leq i \leq n} (-S_i)$. Из соотношений (43), (44) следует, что при $j \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{P}(T > n; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \leq \mathbf{M}(\exp(-M(n)); \tau_j \leq n < \tau_{j+1}). \quad (45)$$

Покажем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=m}^{\infty} \mathbf{M} \exp(-M(n); \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0. \quad (46)$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{M}(e^{-M(n)}; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = \mathbf{M}e^{-M(n)}. \quad (47)$$

Известно (см., например, [4]), что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}e^{-M(n)} \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-x} dV(x), \quad (48)$$

где

$$V(x) = \chi(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(-S_{\tau_j} \leq x),$$

$\chi(x)$ — индикатор множества $[0, \infty)$. Найдем асимптотику отдельного слагаемого в левой части (47). Из определения строгих нижних лестничных моментов следует, что для произвольного $j \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{M}(e^{-M(n)}; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}). \quad (49)$$

Положим при $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ = \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) + \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \lambda n < \tau_j \leq n < \tau_{j+1}). \end{aligned} \quad (50)$$

Поскольку $\exp(S_{\tau_j}) \leq 1$, в силу соотношения (4)

$$\mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \lambda n < \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (51)$$

Далее, используя обозначения леммы 1, запишем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq \lambda n, \tau'_1 > n) &\leq \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) \\ &\leq \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq \lambda n, \tau'_1 > n(1 - \lambda)). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду независимости τ'_1 от (S_{τ_j}, τ_j) и соотношения (3) получаем, что

$$\begin{aligned} c_1 \mathbf{M} e^{S_{\tau_j}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) \\ &\leq \frac{c_1}{\sqrt{1-\lambda}} \mathbf{M} e^{S_{\tau_j}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Из соотношений (50)–(52) следует, что

$$\begin{aligned} c_1 \mathbf{M} e^{S_{\tau_j}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ &\leq \frac{c_1}{\sqrt{1-\lambda}} \mathbf{M} e^{S_{\tau_j}}. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = c_1 \mathbf{M} e^{S_{\tau_j}}. \quad (53)$$

Из соотношений (3) (при $j = 0$), (49), (53) вытекает, что при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}(e^{-M(n)}; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}} \mathbf{M} e^{S_{\tau_j}}. \quad (54)$$

Из соотношений (47), (48) и (54) получаем (46).

Из соотношений (45), (46) находим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sum_{j=m}^{\infty} \mathbf{P}(T > n; \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0.$$

Отсюда с учетом (39) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} R_m(n) = 0. \quad (55)$$

Из соотношений (41) и (42) видно, что

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{c_4} \sum_{j=0}^{\infty} a_j &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n | T > n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n | T > n) \\ &\leq \frac{c_1}{c_4} \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} R_m(n), \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (55), получаем утверждение леммы 10.

Лемма 11. В условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_n/m_n | T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu,$$

где μ — некоторая неотрицательная случайная величина, для которой $\mathbf{P}(\mu > 0) > 0$.

Доказательство. Пусть x — точка непрерывности сразу всех функций распределения случайных величин $\mu^{(j)}$, $j \in \mathbf{N}_0$, задействованных в лемме 9. Очевидно, что множество D таких точек всюду плотно на числовой прямой. Ясно, что если $x \in D \cap (0, \infty)$, то при каждом $j \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{P} \left(\frac{\xi_n}{m_n} > x, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) = \mathbf{P} \left(\frac{\xi_n}{m_n} > x \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right),$$

и поэтому ввиду леммы 9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\xi_n}{m_n} > x, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) = \mathbf{P}(\mu^{(j)} > x), \quad (56)$$

причем $\mathbf{P}(\mu^{(0)} > x) > 0$ при достаточно малых x . Применяя лемму 10, получаем, что при любом фиксированном $x \in D \cap (0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\xi_n}{m_n} > x \mid T > n \right) = \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mu^{(j)} > x) < \infty, \quad (57)$$

где сумма ряда больше 0 при достаточно малых x . Если же $x \leq 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\xi_n}{m_n} > x \mid T > n \right) = 1. \quad (58)$$

Из соотношения (57) ввиду монотонности $\mathbf{P}(\mu^{(j)} > x)$ по x следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mu^{(j)} > x) = 0. \quad (59)$$

Из соотношений (57)–(59) вытекает утверждение леммы 11.

Лемма 12. В условиях теоремы 1 при каждом фиксированном $u \in (0, 1)$

$$\left\{ \sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0.$$

Доказательство. Ввиду леммы 10 достаточно показать, что при любых фиксированных $\varepsilon \in (0, \infty)$, $j \in \mathbf{N}_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) = 0,$$

что вследствие соотношения (4) эквивалентно равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1} \right) = 0, \quad (60)$$

где $\lambda = u/2$. Поскольку случайная последовательность $\{\xi_n/m_n\}$, рассматриваемая при фиксированной случайной среде, является мартингалом, в силу неравенства Дуба

$$\mathbf{P}_\pi \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M}_\pi (X_n(1) - X_n(u))^2.$$

Отсюда, учитывая лемму 7, получаем, что

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1} \right) \\
 &= \mathbf{M} \left(\mathbf{P}_\pi \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1} \right) \right) \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M} (\mathbf{M}_\pi (X_n(1) - X_n(u))^2 \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M} (2(b_n - b_{[nu]}) + a_n - a_{[nu]} \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}).
 \end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 3, приходим к соотношению (60). Лемма 12 доказана.

Доказательство теоремы 1. Ввиду леммы 11 при $n \rightarrow \infty$

$$\{X_n(1) \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad (61)$$

откуда, применяя лемму 12, получаем, что при каждом фиксированном $u \in (0, 1)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{X_n(t), t \in [u, 1] \mid T > n\} \Rightarrow \mu \quad (62)$$

(здесь μ означает случайный процесс, сопоставляющий каждому $t \in (0, 1]$ случайную величину, стоящую в правой части (61)). Осталось показать, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{X_n}(\delta, u, 1) \geq \varepsilon \mid T > n) = 0, \quad (63)$$

где $w_f(\delta, u, v)$ означает модуль непрерывности функции $f \in D[u, v]$, $0 \leq u < v < \infty$, то есть

$$w_f(\delta, u, v) = \sup |f(s) - f(t)|,$$

где супремум берется по всем s, t таким, что $s, t \in [u, v]$, $|t - s| < \delta$, $\delta \in (0, \infty)$. Заметим, что при любых $u \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\{w_{X_n}(\delta, u, 1) \geq \varepsilon\} \subset \left\{ \sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Отсюда, снова применяя лемму 12, получаем соотношение (63). Из соотношений (62) и (63) следует (см. параграф 15 в [7]) утверждение теоремы 1.

Список литературы

1. Афанасьев В. И., Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 52–67.
2. Афанасьев В. И., Предельные теоремы для умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1998) **10**, №1, 141–157.
3. Афанасьев В. И., Предельные теоремы для промежуточно докритического и строго докритического ветвящихся процессов в случайной среде. *Дискретная математика* (2001) **13**, №1, 132–157.
4. Козлов М. В., Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №4, 813–825.
5. Афанасьев В. И., Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1993) **5**, №1, 45–58.
6. Borovkov K. A., Vatutin V. A., Reduced critical branching processes in random environment. *Stoch. Proc. Appl.* (1997) **71**, 225–240.
7. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*. Наука, Москва, 1977.
8. Geiger J., Kersting G., The survival probability of a critical branching process in random environment. *Теория вероятностей и ее применения* (2000) **45**, №3, 607–615.

Статья поступила 10.11.2001